

DS n°1 - Atomistique et électrocinétique
(Samedi 26 septembre 2026 - Durée 4h)

L'utilisation des calculatrices est autorisée. Toute réponse non justifiée ne sera pas considérée. La précision, la clarté ainsi que les efforts de présentation (résultats encadrés ou soulignés) seront pris en compte dans la note. Les efforts d'explication (schémas) seront valorisés.

1 CHIMIE - ATOMISTIQUE et CRISTALLOGRAPHIE

Cette partie aborde quelques aspects de la chimie du silicium.

Données spécifiques :

Nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Masse volumique du silicium : $\rho = 2,33 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$

Masse molaire du silicium : $M = 28,1 \text{ g.mol}^{-1}$

Rayon de l'ion nitrure N^{3-} : $r(\text{N}^{3-}) = 140 \text{ pm}$

Rayons de l'ion Si^{4+} : $r(\text{Si}^{4+}) = 27 \text{ pm}$ (si coordinence = 4) ou 40 pm (si coordinence = 6)

Électronégativités : $\chi(\text{O}) = 3,44$ $\chi(\text{Si}) = 1,93$ $\chi(\text{Cl}) = 3,16$

A. Structure du silicium

- A.1. Écrire la configuration électronique à l'état fondamental de l'atome de silicium Si ($Z=14$). Préciser ses électrons de cœur et de valence.
- A.2. En déduire sa position dans la classification périodique de Mendeleïev (numéro de période ; numéro de colonne). Citer un élément chimique très répandu qui possède la même configuration de valence. Quel sera l'élément le plus électronégatif des deux ? Justifier.
- A.3. Le silicium intervient naturellement dans de nombreux composés : SiO_2 , $\text{Si}(\text{OH})_4$, SiCl_4 . Donner la structure de Lewis pour chacun de ces composés. Quel est le nombre d'oxydation du silicium dans chacun des cas ? Quelle est la géométrie de ces molécules autour de l'atome de Silicium ?

B. Cristallographie du silicium et du nitrure de silicium

Le silicium forme une structure de type diamant, c'est à dire une structure cubique faces centrées d'atomes de silicium, avec occupation d'un site tétraédrique (noté T) sur deux par un atome de silicium.

- B.1. Dans une structure cubique faces centrées (cfc), préciser le nombre de sites T et de sites O appartenant en propre à la maille.
- B.2. En déduire la population de la maille de type diamant du silicium en détaillant le calcul. Préciser la coordinence de l'atome de silicium dans la structure.
- B.3. Écrire la relation entre le paramètre de la maille a et le rayon $r(\text{Si})$ de l'atome de silicium dans la structure de type diamant.
- B.4. À partir de la masse volumique fournie, établir que la valeur du rayon $r(\text{Si})$ est de 118 pm .
- B.5. Calculer la compacité de la structure. Commenter.

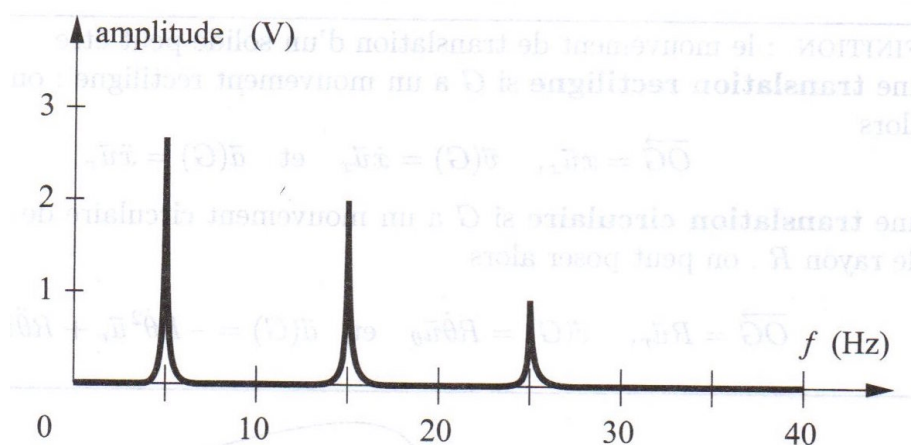
- B.6. Comment expliquer que le silicium soit un matériau très dur ? Pour ce faire, on détaillera la nature de la liaison Si-Si dans la structure.

Le nitrure de silicium, quant à lui, cristallise sous trois variétés dont l'une est appelée gamma. Cette dernière est une structure spinelle, c'est-à-dire une structure cubique faces centrées d'ions nitrure N^{3-} , dans laquelle les ions de Si^{4+} occupent $1/8$ ème des sites tétraédriques (notés T) et la moitié des sites octaédriques (notés O).

- B.7. Le nitrure de silicium peut exister à l'état solide sous différentes variétés cristallines. Comment appelle-t-on ce phénomène ?
- B.8. L'occupation des sites T et O est-elle cohérente avec la stœchiométrie de Si_3N_4 ?
- B.9. Dans une structure cfc, l'habitabilité des sites T est inférieure à celle des sites O. Déterminer l'habitabilité des sites T en détaillant le calcul. Sachant que les alliages Si_3N_4 sont des alliages d'insertion, en déduire le rayon maximal de l'ion Si^{4+} . Est-ce cohérent avec les données ?
- B.10. Quelle est la nature de la liaison entre Si^{4+} et N^{3-} ?

2 SIGNAL NUMÉRIQUE

Un capteur de vibrations transforme les vibrations mécaniques d'une charpente métallique en signal électrique. Ce signal est analysé par la fonction FFT d'un oscilloscope qui donne le spectre en amplitude suivant :



1. Pour numériser ce signal, on choisit une fréquence d'échantillonnage $f_e = 80$ Hz. Justifier ce choix.
2. Dresser le spectre du signal numérisé dans l'intervalle $[0, 240$ Hz]. On pourra supposer que les duplications d'un signal ont la même amplitude que le signal lui-même dans le spectre. On fera figurer tous les pics dans le spectre, mais on ne précisera les fréquences que des 9 pics de plus basse fréquence.
3. Le signal électrique subit un parasitage par le signal du réseau électrique à la fréquence 50 Hz. Quelle modification du spectre cela provoque-t-il ? Pourquoi est-ce problématique ?
4. Quel type de filtrage doit-on faire subir au signal électrique pour éviter cet inconvénient ? Proposer un montage simple réalisant ce filtrage en précisant des valeurs numériques réalistes pour les composants.

3 UN ANALYSEUR DE FOURIER TRÈS SIMPLIFIÉ

3.1 Quelques généralités

1. Soit un système physique qui à une grandeur d'entrée fonction du temps $e(t)$ fait correspondre une grandeur de sortie fonction du temps $s(t)$. À quelle condition ce système peut-il être dit linéaire ?
2. On étudie expérimentalement le transfert de plusieurs systèmes (système 1, système 2, système 3) à l'aide d'un analyseur de spectre numérique ; pour cela, on applique à leur entrée le même signal $e(t)$. On donne ci-dessous les spectres de Fourier du signal $e(t)$ (c'est-à-dire les fréquences qui composent ce signal) et ceux des signaux obtenus en sortie des trois systèmes.

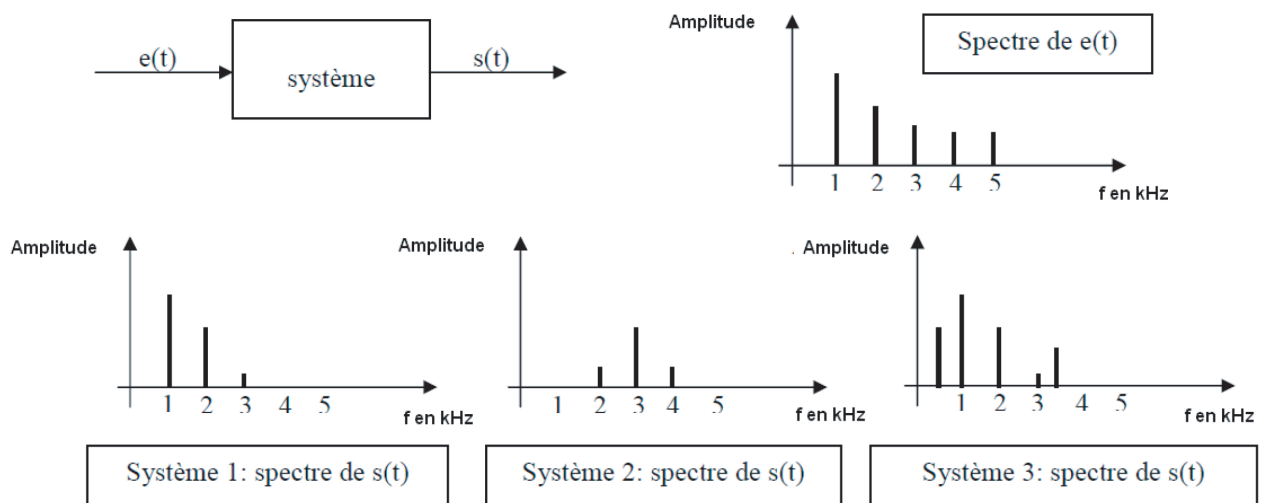


FIGURE 1 –

- (a) Le système 1 est-il linéaire ? Quel est son rôle ?
- (b) Qu'en est-il des systèmes 2 et 3 ?

3.2 Filtres peu sélectifs

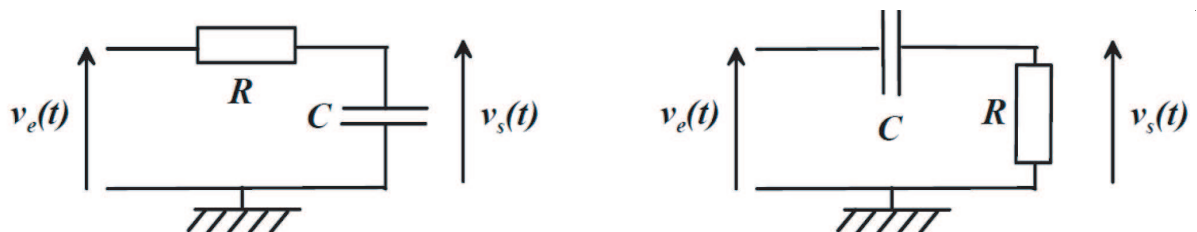


FIGURE 2 – (À gauche) Circuit RC. (À droite) Circuit CR.

1. Réaliser l'étude qualitative à haute et basse fréquence des montages RC et CR proposée sur la figure précédente.

2. Établir les fonctions de transfert des filtres RC et CR.
3. Tracer sommairement les diagrammes de Bode des filtres RC et CR.
4. (a) Les 3 documents de la figure suivante donnent les réponses d'un même filtre (Filtre 1) du 1er ordre à un signal triangulaire d'amplitude 1 V et de fréquence 50 Hz, puis 10 kHz. À quel type de filtre le Filtre 1 correspond-il ? Évaluer l'ordre de grandeur de sa fréquence caractéristique.

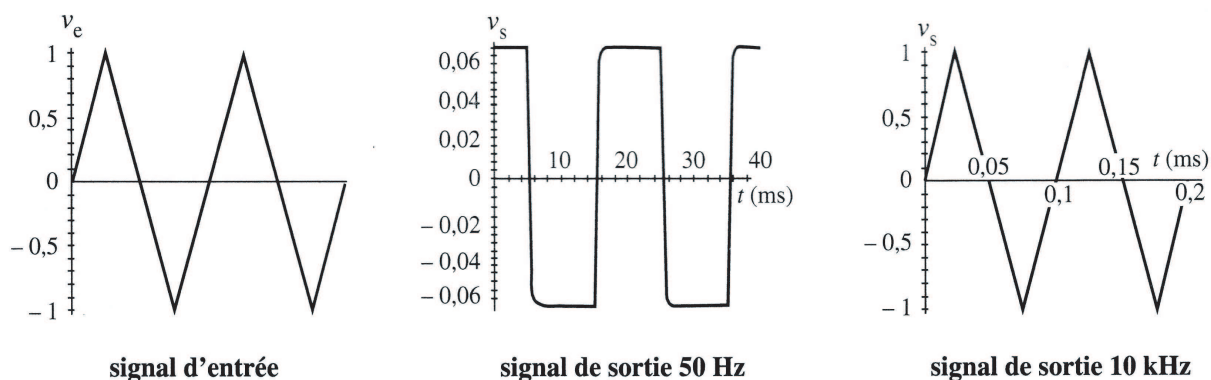


FIGURE 3 –

- (b) Les 3 documents de la figure 4 suivante donnent les réponses d'un second filtre (Filtre 2) du 1er ordre à un signal crêteau d'amplitude 1V et de fréquence 100 Hz, puis 20 kHz. À quel type de filtre le Filtre 2 correspond-il ? Évaluer l'ordre de grandeur de sa fréquence caractéristique.

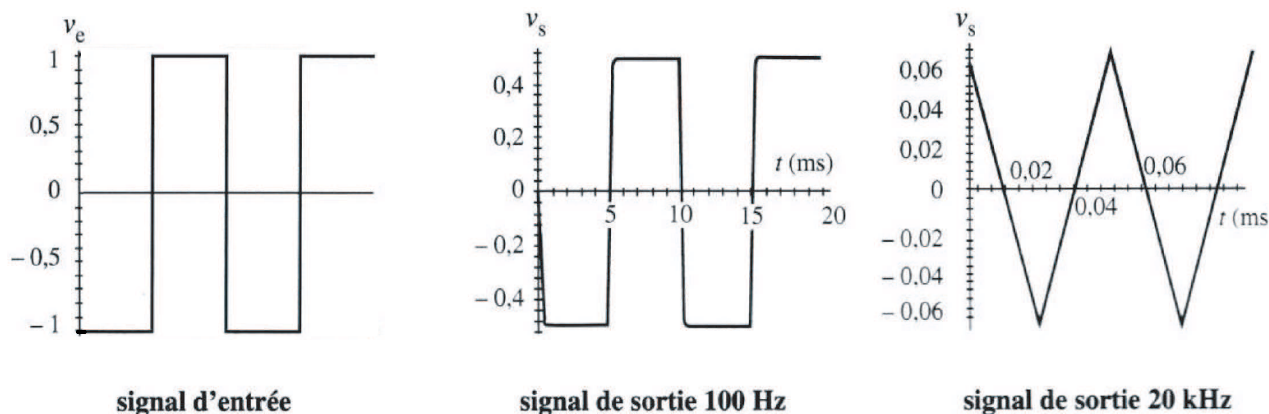


FIGURE 4 –

3.3 Filtre sélectif

On s'intéresse maintenant au filtre passif présenté dans la figure ci-dessous. On impose à l'entrée une tension $e(t)$ sinusoïdale de pulsation ω .

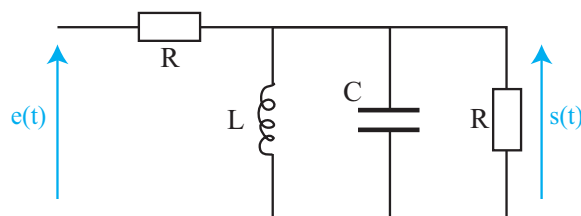


FIGURE 5 –

1. Représenter un montage expérimental qui permettrait de visualiser $e(t)$ et $s(t)$. On fera apparaître tous les appareils et connexions nécessaires.
2. Décrire un protocole expérimental qui permettrait d'étudier le comportement en fréquence du circuit.
3. On note $\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e}$ la fonction de transfert de ce filtre. Pourquoi étudie-t-on le transfert pour une tension sinusoïdale ?
4. Calculer sa fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ et la mettre sous forme canonique. On précisera les expressions de la pulsation caractéristique ω_0 , du facteur de qualité Q , et de la valeur maximale H_0 .
5. Définir puis **calculer** les pulsations de coupure du filtre en fonction de ω_0 et Q . En déduire la bande passante $\Delta\omega$.
6. Tracer l'allure du gain linéaire $G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ et de la phase $\varphi(\omega) = \arg(\underline{H}(j\omega))$.

3.4 Analyseur de Fourier élémentaire

On met à l'entrée du circuit précédent le signal $e(t)$ représenté ci-dessous (figure 6) avec $f = 1/T = 3,0$ kHz et $E = 10$ V.

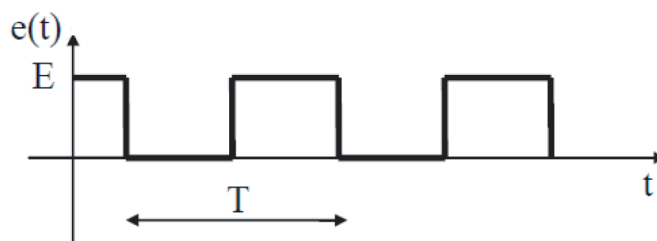


FIGURE 6 –

On montre que l'on peut décomposer le signal $e(t)$ sous la forme :

$$e(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \cos(2\pi ft) + \frac{2E}{3\pi} \cos(2\pi 3ft) + \frac{2E}{5\pi} \cos(2\pi 5ft) + \dots + \frac{2E}{(2k+1)\pi} \cos(2\pi(2k+1)ft)$$

1. Comment s'appellent les diverses fréquences qui apparaissent dans l'expression de $e(t)$?

2. Tracer l'allure du signal de sortie $s(t)$ si le circuit de la figure 5 est réglé pour $f_0 = 3,0$ kHz et $Q = 20$.
3. Calculer les valeurs de L et C correspondantes si on fixe $R = 1\text{ k}\Omega$? Quelles contraintes avait-on pour le choix de la résistance?
4. Comment pourrait-on utiliser le circuit de la figure 5 pour déterminer le spectre en fréquence de $e(t)$?

4 OSCILLATEURS MÉCANIQUES

Le Millennium Bridge

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaires pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés. L'objectif de ce problème est la modélisation de plus en plus fine d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millennium Bridge de Londres.



Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires $\hat{u}_x$ ou d'une flèche dans le cas général $\vec{v}$.

A l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les grandeurs complexes sont soulignées : $\underline{z} \in \mathbb{C}$. Un point sur une grandeur indique la dérivée par rapport au temps de cette grandeur : $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$.

I. — Oscillateur simple

Un oscillateur est constitué d'une masse m dont le centre d'inertie G est repéré par la position x dans le référentiel galiléen $(O, \hat{u}_x)$ – voir figure 1. L'origine O se situe au niveau du sol. L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité α , exerçant sur m une force de frottement $\vec{F}_f = -\alpha \dot{x} \hat{u}_x$, avec $\alpha > 0$. À tout instant t , on assimile la distance OG à la longueur $\ell(t)$ du ressort. L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g \hat{u}_x$ avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

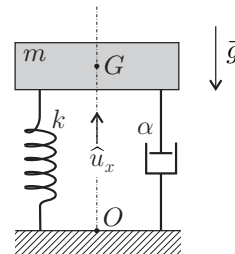


FIG. 1 – Oscillateur

□ 1 — En appliquant la relation fondamentale de la dynamique établir l'équation différentielle $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$ dans laquelle on a introduit la fonction $X(t) = x(t) - \tilde{x}$ où $\tilde{x}$ est une constante que l'on déterminera en fonction de g , ω_0 et ℓ_0 . On précisera les expressions et significations de ω_0 et ξ .

□ 2 — Dans le régime libre, le système est mis en vibration uniquement par des conditions initiales non nulles $X(0) = X_0 \neq 0$ et $\dot{X}(0) = V_0 \neq 0$. Déterminer les solutions du régime libre (en fonction de ω_0 , ξ , X_0 , V_0 et t) pour les cas $\xi = 0$ et $0 < \xi < 1$ et préciser leur comportement. Dans certains cas, le vent peut induire sur le système une force proportionnelle au vecteur vitesse que l'on écrit $\vec{F}_v = \beta \dot{x} \hat{u}_x$, avec $\beta > 0$. Quelle peut-être la conséquence de ce phénomène ?

Différents cas peuvent être examinés pour l'excitation (ou forçage) $F(t)$ de l'oscillateur étudié lors des deux premières questions. Nous nous placerons dans l'optique d'une passerelle piétonne.

L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte dans cette partie.

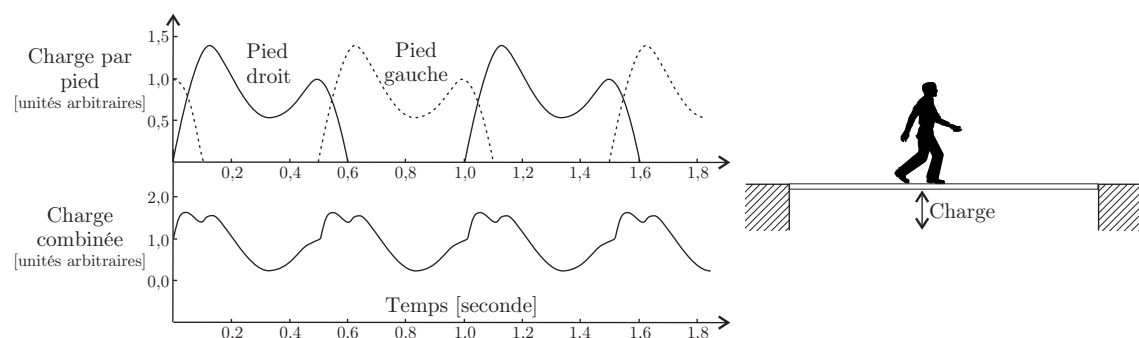


FIGURE 2 – Forçage d'une passerelle par la marche d'un piéton.

Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représenterons cette force, appelée charge, par un vecteur périodique $\vec{F}(t) = \vec{F}_0 + \vec{F}_1 \cos(2\pi ft)$.

Le vecteur $\vec{F}_0$ correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, la fréquence f correspond à celle d'une marche normale. Nous considérerons que $\vec{F}_1 = 0,4 \vec{F}_0$. Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés comme $-\hat{u}_x$.

On note $F_0 = \|\vec{F}_0\|$ le module de la force statique, $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ la réponse en déplacement de l'oscillateur et $\underline{Y} = Y_m e^{i\omega t}$ sa représentation complexe.

□ **3** — Que devient l'équation de l'oscillateur en Y sous le forçage piéton ? Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$, rapport de la représentation complexe de la réponse en déplacement $\underline{Y}$ sur la représentation complexe de l'excitation $\underline{E} = \frac{1}{m} \underline{F}_1$. On exprimera $\underline{H} = \underline{Y}/\underline{E}$ en fonction de ξ , ω_0 et $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$.

□ **4** — Sous quelle condition portant sur ξ , un phénomène de résonance peut-il se produire ? Pour quelle pulsation ω_r obtient-on alors ce phénomène ? Exprimer le gain en amplitude à la résonance $|\underline{H}|(\omega_r)$ dans la limite $\xi^2 \ll 1$.

□ **5** — En se plaçant dans l'hypothèse $\xi^2 \ll 1$ et à partir d'une analyse de la courbe 1 de la figure 3, déterminer un ordre de grandeur de ξ ainsi que la valeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur modélisant le Millennium Bridge avant la mise en place des amortisseurs harmoniques.

□ **6** — Pourquoi est-il important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure soumise à une action périodique ?

Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation.

□ **7** — Quel(s) type(s) de capteur(s) est-il envisageable d'utiliser pour obtenir un signal électrique issu de la marche d'un piéton ?

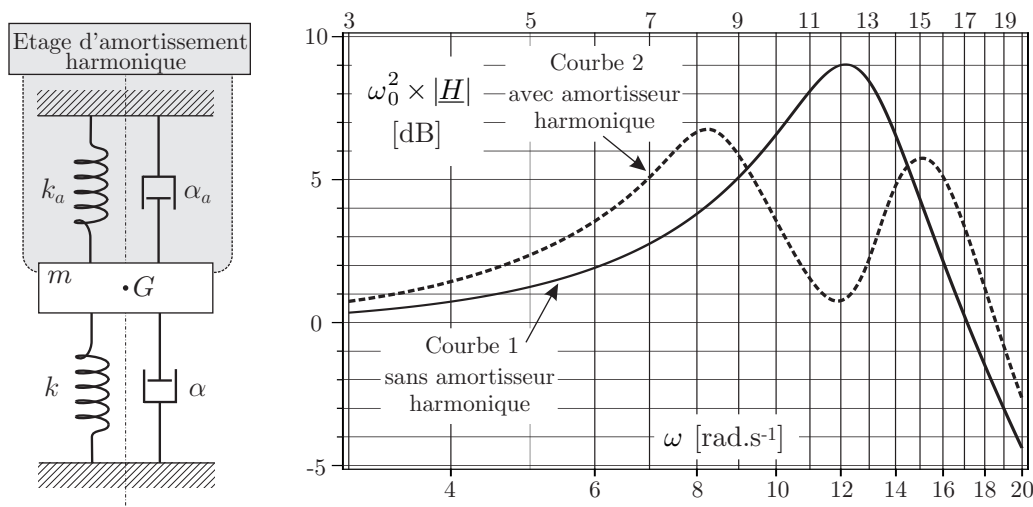


FIGURE 3 – Schéma et réponse d'un amortisseur harmonique appliqué au modèle du Millennium Bridge.

L'acquisition est effectuée sur des durées allant de quelques secondes à quelques minutes. Les signaux ainsi obtenus sont similaires mais pas parfaitement identiques. Chacun de ces signaux présente les caractéristiques essentielles du signal de la charge combinée représentée sur la figure 2. On calcule alors le spectre de ces signaux en les échantillonnant en $N = 300$ points équidistants sur un intervalle $[t_{\min}, t_{\max}]$. Les différents spectres obtenus sont rassemblés sur la figure 4.

❑ 8 — Analyser et interpréter aussi précisément que possible ces différents spectres. Sont-ils tous exploitables? Lequel vous paraît le plus pertinent? En déduire la (ou les) fréquence(s) caractéristique(s) de la marche étudiée. Était-ce qualitativement prévisible?

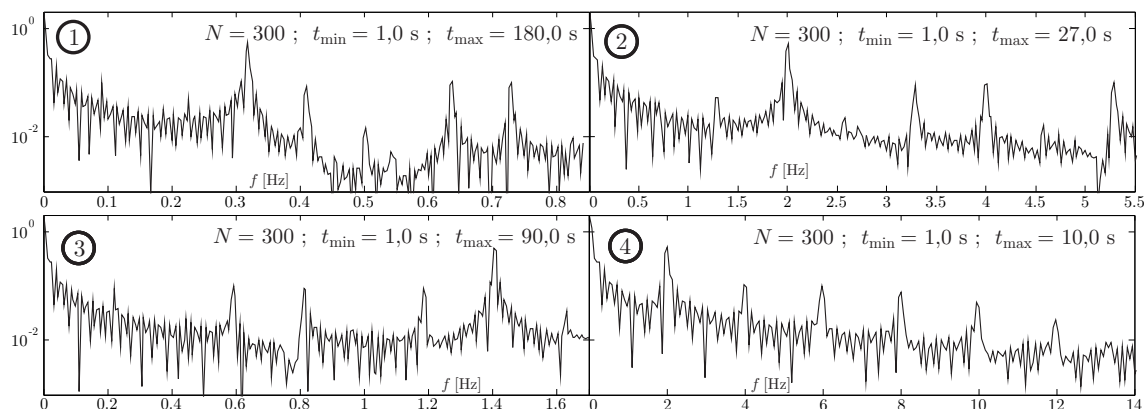


FIGURE 4 – Spectres des signaux correspondants à la marche d'un piéton

❑ 9 — À partir d'une exploitation des données fournies dans le sujet, expliquer l'origine du problème concernant le Millennium Bridge et justifier que l'installation d'amortisseurs harmoniques ait pu le résoudre.

FIN DE LA PARTIE I

5 OSCILLATEUR À RÉSISTANCE NÉGATIVE

I. Étude d'un dipôle simulant une résistance négative

On s'intéresse à un dipôle $\mathcal{D}$ de bornes A et M , réalisé à l'aide d'un Amplificateur Opérationnel (A.O.) ou Amplificateur Linéaire Intégré (ALI) et conformément au schéma donné sur la Figure 7.

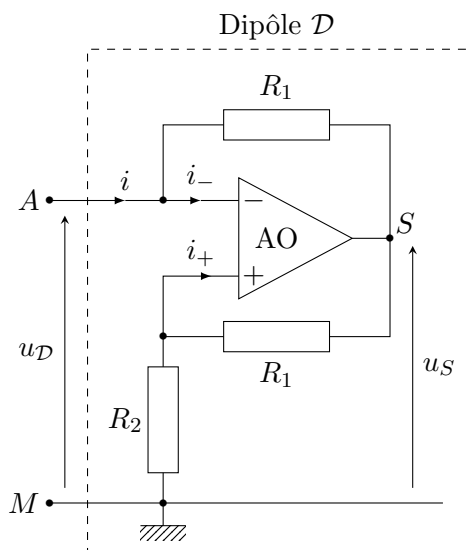


FIGURE 7 – Dipôle $\mathcal{D}$ étudié

L'ALI est supposé idéal ; il peut fonctionner en régime linéaire ou en régime de saturation. Dans tout le problème, on fera les hypothèses suivantes :

- Les courants d'entrée i_+ et i_- sont nuls
- Si l'ALI est en régime linéaire alors :

$$\varepsilon = 0 \quad \text{et} \quad -U_{\text{sat}} < u_S < U_{\text{sat}}$$

où $U_{\text{sat}} > 0$ est la tension de saturation (de l'ordre de 13V), ε est la tension différentielle d'entrée et u_s la tension de sortie (différence de potentiel entre les points S et M)

- En régime de saturation : $u_s = U_{\text{sat}}$ (saturation haute) si $\varepsilon > 0$ et $u_s = -U_{\text{sat}}$ (saturation basse) si $\varepsilon < 0$.

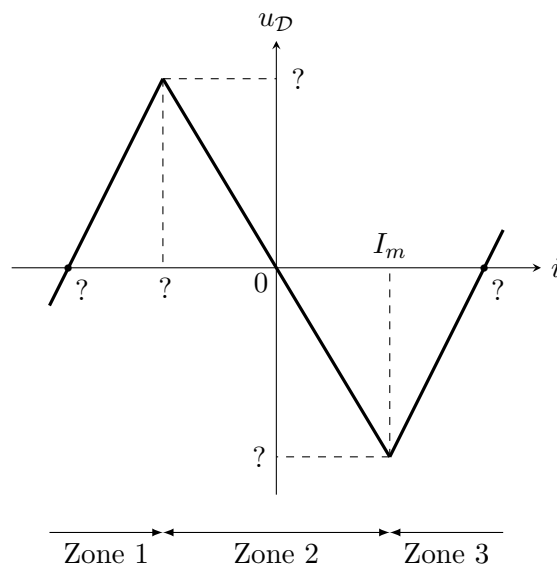
1. Montrer que lorsque l'ALI est en régime linéaire, la relation entre $u_{\mathcal{D}}$ et i est de la forme :

$$u_{\mathcal{D}} = -R_2 i$$

En déduire la valeur I_m de i ($I_m > 0$) telle que la tension u_S atteigne la saturation basse : $u_S = -U_{\text{sat}}$.

2. Pour $i \geq I_m$ l'ALI reste en régime de saturation basse. Montrer que la relation entre $u_{\mathcal{D}}$ et i devient $u_{\mathcal{D}} = R_1 i - U_{\text{sat}}$.
3. De la même façon, u_s atteint la saturation haute pour $i = -I_m$ et y reste pour $i < -I_m$. Que devient alors la relation entre $u_{\mathcal{D}}$ et i si $i < -I_m$?

4. Après l'avoir reproduit sur votre copie, compléter le schéma donné sur la Figure 8, visualisant la caractéristique de $\mathcal{D}$, c'est à dire $u_{\mathcal{D}}$ en fonction de i , i pouvant prendre des valeurs aussi bien négatives que positives. Expliciter les coordonnées des points remarquables (notés ?) de cette caractéristique.

FIGURE 8 – Caractéristique du dipôle $\mathcal{D}$

II. Montage oscillateur

Conditions de démarrage des oscillations

Le dipôle $\mathcal{D}$ est désormais connecté à l'association en série d'un condensateur de capacité C , d'une bobine d'inductance L et d'une résistance R comme indiqué sur la Figure 9.

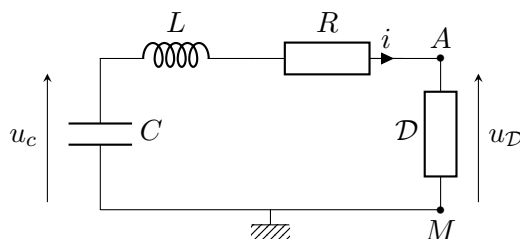


FIGURE 9 – Montage oscillateur

L'intensité i du courant circulant dans la bobine est initialement nulle et la tension aux bornes du condensateur est $u_c(t=0) = U_0$ suffisamment faible pour que le dipôle $\mathcal{D}$ puisse être considéré comme une "résistance négative".

1. Montrer que $i(t)$ est solution d'une équation différentielle du second ordre de la forme

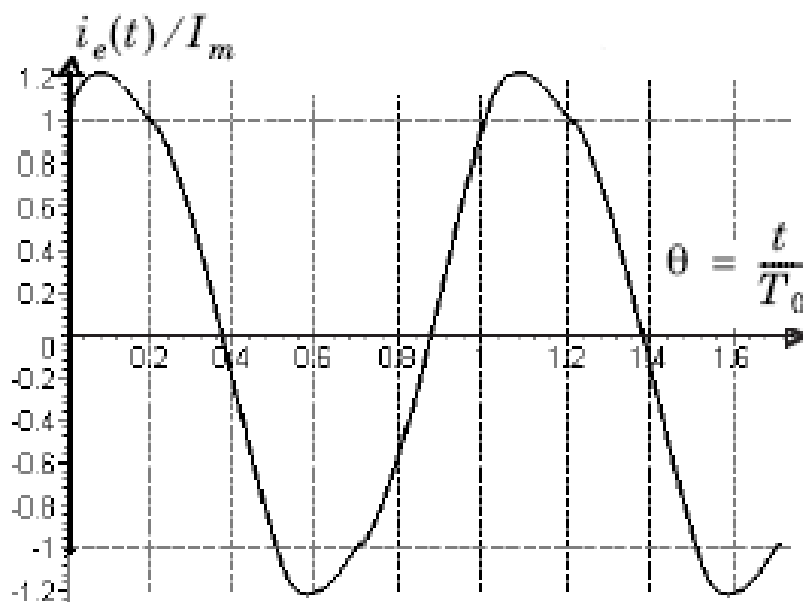
$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0.$$

Exprimer l'amortissement ξ et la pulsation ω_0 en fonction de L , C , R et R_2 .

2. D'après les conditions initiales, quelles sont les valeurs de $i(t = 0)$ et $\frac{di}{dt}(t = 0)$? On suppose que $|\xi| < 1$. Expliciter la solution $i(t)$.
3. Que se passe-t-il si U_0 est nul? Commenter.
4. On suppose donc que U_0 n'est pas nul mais de très faible valeur. Quelle est la condition sur ξ puis sur R_2 pour que les oscillations de i présentent une amplitude croissante au cours du temps? On suppose désormais que cette condition est réalisée.
5. $AN : R_2 = 350 \Omega$, $R = 100 \Omega$, $C = 1,28 \text{ nF}$, $L = 2,0 \text{ mH}$. Calculer la valeur de ξ et de $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Amplitude des oscillations

6. Représenter l'allure de l'évolution de $i(t)$ en fonction du temps à compter de $t = 0$. En utilisant la caractéristique du dipôle $\mathcal{D}$, montrer que cette loi d'évolution n'est valable que sur une durée limitée.
7. Donner l'autre équation différentielle régissant l'évolution de $i(t)$ après cette phase de démarrage.
8. Après un régime transitoire que l'on n'étudiera pas, les variations de i en fonction du temps suivent un régime périodique établi. La figure ci-dessous montre les évolutions de i/I_m en fonction de la variable réduite $\theta = t/T_0$.



Déterminer les domaines de cette courbe qui se rapportent respectivement aux zones (1), (2) et (3) de la caractéristique de $\mathcal{D}$ donnée sur la Figure 8.

9. Comment qualifier les oscillations représentées sur la figure précédente? Évaluer la période, puis la fréquence f de ces oscillations ainsi que la valeur maximale de i .

Application numérique : mêmes valeurs que précédemment, et $R_1 = 2,5 \text{ k}\Omega$ et $U_{\text{sat}} = 13 \text{ V}$.

10. Donner, pour ce régime établi, la valeur maximale de la tension $u_{\mathcal{D}}(t)$.