

Correction - DS n°1 - Atomistique et électrocinétique
 (Samedi 26 septembre 2026 - Durée 4h)

1 Chimie - ATOMISTIQUE et CRISTALLOGRAPHIE

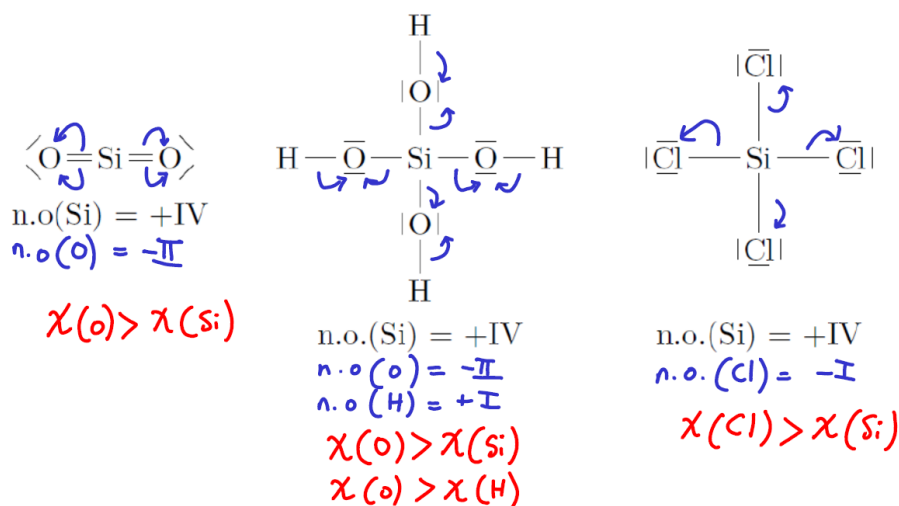
A. Structure du silicium

A.1. $\underbrace{1s^2 2s^2 2p^6}_{e^- \text{ de cœur}} \mid \underbrace{3s^2 3p^2}_{e^- \text{ de valence}} .$

Rappelons que les électrons de cœur sont ceux qui ne sont pas des électrons de valence.

A.2. La valeur maximale du nombre quantique principal est $n = 3$: 3^{ème} période ; Il y a 4 électrons de valence, donc : $10 + 4 = 14^{\text{ème}}$ colonne du tableau périodique. Le carbone C a aussi 4 électrons de valence. C est plus électronégatif car il est situé au dessus de Si (dans la 2^{ème} période). On sait que l'électro-négativité augmente de bas en haut et de la gauche vers la droite du tableau.

A.3. Le silicium est tétravalent, ce qui conduit aux composés suivants :



Aucun élément ne possède de charge formelle. La première formule de Lewis est d'ailleurs obtenue en utilisant deux liaisons doubles, ce qui annule les charges formelles aussi bien sur l'oxygène que sur le silicium : le composé en est d'autant plus stable.

Pour calculer le nombre d'oxydation de Si, rappelons qu'on attribue tous les électrons de liaison à l'élément le plus électronégatif, c'est à dire O ou Cl ici. Dans les trois composés, Si a perdu tous ses électrons de valence (= 4), d'où : n.o.(Si) = +IV.

D'après la répulsion des doublets liants, que les liaisons soient simples ou doubles, la molécule de SiO₂ est linéaire, et les molécules de Si(OH)₄ et SiCl₄ sont tétraédriques autour de l'atome de Silicium.

B. Cristallographie du silicium et du nitrure de silicium

B.1. Site T : $N_T = 8$ et sites O : $N_O = 1 + 12/4 = 4$

B.2. La population de Si sera : $N(\text{Si}) = \underbrace{8/8}_{\text{sommets}} + \underbrace{6/2}_{\text{faces}} + \underbrace{4}_{\text{sites T}} = 8$ atomes par maille cubique.

Un atome de Silicium aura une coordination de 4 (c'est à dire 4 plus proches voisins) qui correspond à celle d'un atome dans un site T.

- B.3. Les atomes sont en contact sur la grande diagonale d'un cube de côté $a/2$ (on le voit à partir d'un site T) :

$$2r(\text{Si}) = \sqrt{3} \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} \implies r(\text{Si}) = \frac{\sqrt{3}a}{8}$$

- B.4.

$$\rho = \frac{\text{masse des atomes}}{\text{volume de la maille}} = \frac{8 M(\text{Si})}{N_A a^3} = \frac{3\sqrt{3} M(\text{Si})}{8^2 N_A r(\text{Si})^3}$$

et donc :

$$r(\text{Si}) = \left(\frac{3\sqrt{3} M(\text{Si})}{8^2 N_A \rho} \right)^{1/3} \approx 118 \text{ pm}$$

- B.5.

$$C = \frac{\text{volume des atomes}}{\text{volume de la maille}} = \frac{8 \times \frac{4}{3} \pi r(\text{Si})^3}{a^3} = \frac{8 \times 4\pi \times 3\sqrt{3}}{3 \times 8^3}$$

et donc

$$C = \frac{\sqrt{3}\pi}{16} = 0,34$$

C'est une valeur bien inférieure à la compacité maximale que l'on peut obtenir avec une structure cfc (0,74).

- B.6. Le silicium est matériau très dur car les atomes de Si sont liés par des liaisons covalentes.

- B.7. On parle de *variétés allotropiques*.

- B.8. Nombre de Si^{4+} par maille cubique : $\underbrace{\frac{8}{8}}_{\text{sites T}} + \underbrace{\frac{1 + 12/4}{2}}_{\text{sites O}} = 3.$

Nombre de N^{3-} par maille : 4 (structure cfc)

La stœchiométrie Si_3N_4 est donc respectée.

- B.9. Soit r_T le rayon du plus grand cation que l'on peut insérer dans un site T (= habitabilité du site). Ce cation est alors en contact avec un N^{3-} le long de la grande diagonale d'un cube d'arête $a/2$, d'où :

$$r_T + r(\text{N}^{3-}) = \sqrt{3} \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} \iff a = \frac{4}{\sqrt{3}} (r(\text{N}^{3-}) + r_T)$$

D'autre part, si les anions sont en contact le long de la diagonale d'une face du grand cube :

$$4r(\text{N}^{3-}) = \sqrt{2}a \iff a = \frac{4r(\text{N}^{3-})}{\sqrt{2}}$$

d'où :

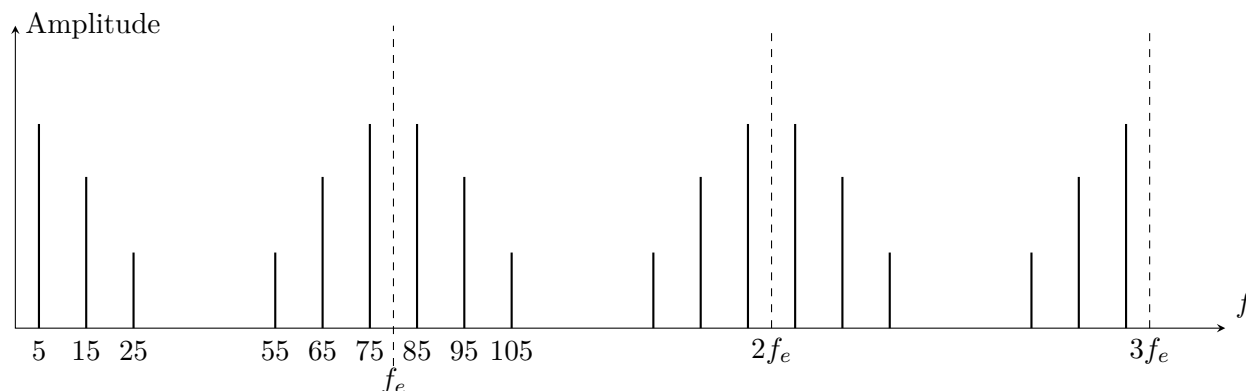
$$r_T = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) r(\text{N}^{3-}) = 31,4 \text{ pm}$$

Ceci est cohérent avec les atomes de Si qui sont dans les sites T (coordination 4) : $r(\text{Si}) = 27 \text{ pm} < r_T$.

- B.10. Il s'agit d'une liaison ionique : liaison forte car la différence d'électro-négativité est importante. Ce solide doit posséder une température de fusion élevée (une recherche sur internet fournit 1900° C).

2 SIGNAL NUMÉRIQUE

1. Il faut que le critère de Shannon soit vérifié. Comme $f_{max} = 25$ Hz, il est nécessaire que $f_e > 2f_{max} = 50$ Hz, ce qui est bien réalisé avec $f_e = 80$ Hz.
2. Le spectre en amplitude est représenté ci-dessous :



3.2 Filtres peu sélectifs

1. À basse fréquence un condensateur se comporte comme un coupe-circuit. A haute fréquence un condensateur se comporte comme un fil.

Montage RC

BF : $v_s = v_e - Ri = v_e$; HF : $v_s = 0$ donc filtre passe bas.

Montage CR

BF : $v_s = Ri = 0$; HF : $v_s = v_e$ donc filtre passe haut.

2. Filtre RC :

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{Z_c}{Z_c + R} = \frac{1}{1 + RY_c} \Rightarrow \boxed{\frac{v_s}{v_e} = \frac{1}{1 + jRC\omega}}$$

Filtre CR :

$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{R}{Z_c + R} \Rightarrow \boxed{\frac{v_s}{v_e} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}}$$

3. Voir figures 1 et 2.

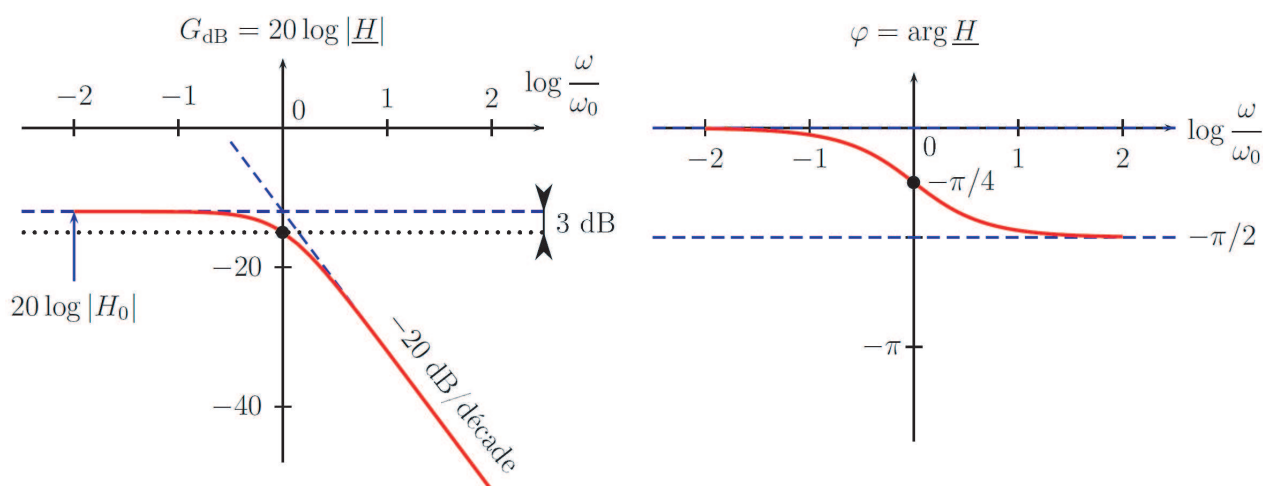


FIGURE 1 – Diagramme de Bode du filtre RC.

4. (a) C'est un filtre dérivateur à basse fréquence et qui ne modifie pas le signal à haute fréquence. Il s'agit d'un passe haut avec une fréquence de coupure de l'ordre de quelques centaines de Hz (on peut voir que le temps de montée est de l'ordre de $\tau = 1 \text{ ms}$, et $f_c = \frac{1}{2\pi\tau}$).
- (b) C'est un filtre intégrateur à haute fréquence et qui ne modifie pas le signal à basse fréquence. Il s'agit d'un passe bas. Là encore, le temps de montée est de l'ordre de $\tau = 1 \text{ ms}$, et la fréquence de coupure est de l'ordre de quelques centaines de Hz .

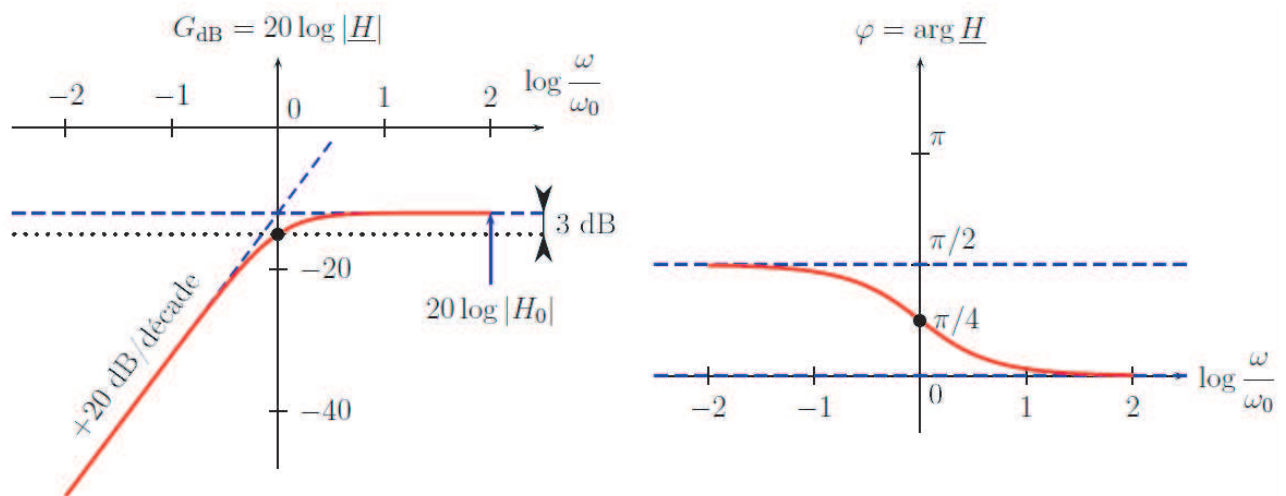
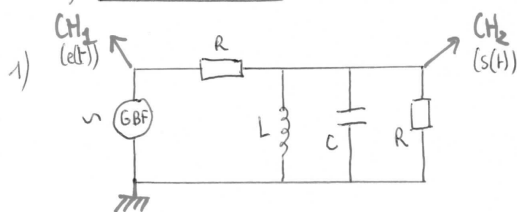


FIGURE 2 – Diagramme de Bode du filtre CR.

3.3 Filtre sélectif

1.3) Filtre sélectif



CH₁ et CH₂ sont les bornes d'entrée de l'oscilloscope.

- 2) Afin d'étudier le comportement en fréquence du circuit, on peut :
- soit faire varier "à la main" la fréquence délivrée par le GBF, et mesurer l'amplitude et la phase de la tension de sortie.
 - soit utiliser le mode modulation du GBF (le GBF délivre alors un signal sinusoïdal dont la fréquence varie lentement et linéairement avec le temps). On observe alors, en mode XY, la tension de sortie en fonction de la fréquence (la sortie "SWEEP OUT" du GBF fournit un signal linéaire avec la fréquence).
- 3) D'après le théorème de Fourier, tout signal périodique se décompose en une combinaison linéaire de signaux sinusoïdaux. Le filtre étant linéaire, il agit indépendamment sur chaque fréquence. Le signal de sortie est alors la somme des réponses pour chaque fréquence.
- 4) On applique un pont diviseur de tension $\left(\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}\right)$
- $$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{Z_{eq}}{R + Z_{eq}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z_{eq}}} = \frac{1}{1 + 1 + \frac{R}{jL\omega} + jRC\omega}$$

$$\underline{H} = \frac{1/2}{1 + j\frac{RL\omega}{2} - j\frac{R}{2L\omega}} ; \text{ on reconnaît un passe-bande}$$

et on peut identifier avec la forme canonique:

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = 1/2 \\ \frac{RL}{2} = \frac{Q}{\omega_0} \\ \frac{R}{2L} = Q\omega_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 = 1/2 \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q = \frac{RL\omega_0}{2} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$$

5) Les pulsations de coupure sont définies par:

$$G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}, \text{ soit } \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

En posant $x = \frac{\omega_c}{\omega_0}$, on obtient $1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 2$.

$$\text{soit } Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \Rightarrow x - \frac{1}{x} = \pm \frac{1}{Q} \Rightarrow x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

Dans les 2 cas $\pm$, on a $\Delta = \frac{1}{Q^2} + 4 > 0 \Rightarrow 2$ racines réelles.

Dans le cas $\oplus$ ($x^2 + \frac{x}{Q} - 1 = 0$): $x = \frac{-1}{2Q} \oplus \frac{1}{2} \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}$ solution qui conduit à $x > 0$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{\omega_{c1}}{\omega_0} = \frac{-1}{2Q} + \frac{1}{2} \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \Rightarrow \omega_{c1} = \frac{-\omega_0}{2Q} + \frac{\omega_0}{2} \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}$$

Dans le cas $\ominus$ ($x^2 - \frac{x}{Q} - 1 = 0$): $x = \frac{1}{2Q} \ominus \frac{1}{2} \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}$ solution qui conduit à $x > 0$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{\omega_{c2}}{\omega_0} = \frac{1}{2Q} - \frac{1}{2} \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}} \Rightarrow \omega_{c2} = \frac{\omega_0}{2Q} - \frac{\omega_0}{2} \sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}$$

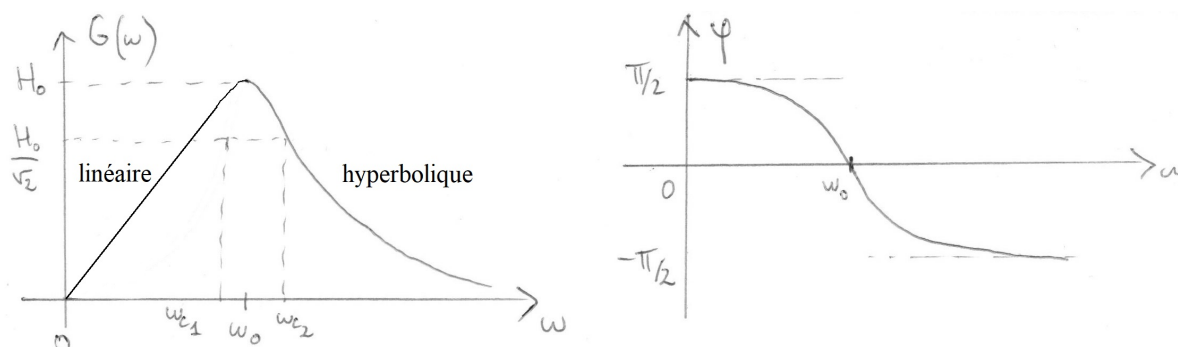
Finalement, on peut en déduire l'expression de la bande passante:

$$\Delta\omega = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{\omega_0}{Q}$$

$$6) \quad G = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

$$\varphi = -\arctan\left[Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]$$

	G	φ
$x \rightarrow 0$	0	$\pi/2$
$x \rightarrow 1$	H_0	0
$x \rightarrow \infty$	0	$-\pi/2$



3.4 Analyseur de Fourier élémentaire

1. Ce sont les harmoniques du signal.
2. Le filtre est très sélectif ($Q = 20$) et ne sélectionne que la composante oscillant à la pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0$, sans ajouter de déphasage ($\varphi = 0$) et en multipliant l'entrée par $1/2$ car $H_0 = \frac{1}{2}$, soit $s(t) = \frac{E}{\pi} \cos(2\pi f_0 t)$.
C'est un signal purement sinusoïdal.
3. En reprenant les expressions précédentes de Q et ω_0 , on obtient :

$$C = \frac{Q}{\pi f} = 2.1 \mu F \quad \text{et} \quad L = \frac{R}{4\pi Q f} = 1.3 mH$$

Pour choisir la résistance, il faut qu'elle soit suffisamment grande devant la résistance de sortie du GBF, et suffisamment petite devant celle de l'oscilloscope, afin que le calcul de la fonction de transfert soit valable. On a donc :

$$50 \Omega \ll R \ll 1 M\Omega$$

4. Il suffit de modifier la fréquence de résonance f_0 du filtre passe bande en jouant sur les valeurs des composants. On notera que les filtres utilisés dans les véritables analyseurs de spectre sont fabriqués différemment, de sorte que le facteur de qualité reste constant lorsque la fréquence sélectionnée est modifiée.

4 OSCILLATEURS MÉCANIQUES - Mines Ponts MP 2016

Les commentaires du jury du concours sont écrits en *italique*.

Le problème est sans difficulté notoire, très proche du cours. De nombreux candidats ont obtenu des notes honorables. Regrettons qu'un nombre substantiel de copies soient très mal présentées et/ou très mal écrites. Une telle attitude manifestement désinvolte est sanctionnée par le jury. Rappelons également aux candidats qu'il faut expliquer ce qu'ils font et que souvent un petit schéma est bien plus éclairant qu'une explication laborieuse.

Félicitons les candidats qui ont traité correctement l'ensemble des questions, démontrant ainsi leur maîtrise du cours et leur capacité de recul par rapport à celui-ci.

I. – Oscillateur simple

- Q1** – On applique la relation fondamentale de la dynamique (appelée encore théorème du centre d'inertie) à la masse m , dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. Bilan des forces :

- Le poids : $m \vec{g} = -mg \hat{u}_x$.

- La force de rappel élastique : $\vec{F}_r = -k(\ell - \ell_0)\hat{u}_x$, avec $\ell = x$ d'après l'énoncé.
- La force de frottement fluide : $\vec{F}_f = -\alpha\dot{x}\hat{u}_x$.

On projette sur $\hat{u}_x$ pour trouver :

$$m\ddot{x} = -mg - k(x - \ell_0) - \alpha\dot{x} \quad (1)$$

La technique classique consiste à trouver la position d'équilibre $\tilde{x}$, puis à poser $X(t) = x(t) - \tilde{x}$. On a donc à l'équilibre ($\ddot{x} = 0$ et $\dot{x} = 0$) :

$$-mg - k(\tilde{x} - \ell_0) = 0 \quad (2) \quad \text{d'où} \quad \tilde{x} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$$

($\tilde{x}$ est inférieur à ℓ_0 comme il se doit). On fait ensuite (1) - (2), en notant que $\dot{X} = \dot{x}$ et $\ddot{X} = \ddot{x}$ pour obtenir :

$$m\ddot{X} = -kX - \alpha\dot{X} \quad \text{d'où} \quad \ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{k}{m}X = 0$$

On peut alors identifier :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad 2\xi\omega_0 = \frac{\alpha}{m} \implies \xi = \frac{\alpha}{2m\omega_0} = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}}$$

ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur amorti et ξ est le coefficient d'amortissement (sans dimension).

Question généralement bien traitée. On peut s'étonner néanmoins d'erreurs d'homogénéité sur la longueur à l'équilibre.

Q2 – • Cas où $\xi = 0$:

L'équation différentielle se réduit à : $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ et c'est un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 . La solution générale est :

$$X(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

avec les conditions initiales : $X(0) = X_0 = A$ et $\dot{X}(0) = V_0 = \omega_0 B$. On auro donc :

$$X(t) = X_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

Il s'agit d'une solution oscillante non amortie idéale (elle ne se rencontre pas en réalité).

- Cas où $0 < \xi < 1$:

On écrit l'équation caractéristique : $r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$. Son discriminant vaut :

$$\Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1) < 0$$

Il s'agit donc d'un régime pseudo-périodique. Les deux racines complexes conjuguées sont :

$$r_- = -\xi\omega_0 - i\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \quad \text{et} \quad r_+ = -\xi\omega_0 + i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

(attention à bien mettre $1 - \xi^2$ sous la racine et pas $\xi^2 - 1 < 0$). Pour simplifier les notations, on peut introduire la pseudo-pulsation : $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$. La solution générale s'écrit alors :

$$X(t) = e^{-\xi\omega_0 t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

et

$$\dot{X}(t) = -\xi\omega_0 X(t) + e^{-\xi\omega_0 t} (-\omega A \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t))$$

On détermine les constantes A et B par les conditions initiales :

$$X(0) = A = X_0 \quad \text{et} \quad \dot{X}(0) = V_0 = -\xi\omega_0 A + \omega B$$

On obtient alors :

$$X(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left(X_0 \cos(\omega t) + \frac{V_0 + \xi\omega_0 X_0}{\omega} \sin(\omega t) \right)$$

Il s'agit d'une solution oscillante amortie au cours du temps. Cela est plus réaliste.

Si l'on rajoute l'action du vent, c'est la force d'amortissement fluide totale qui se trouve modifiée et qui devient $\vec{F}_f = -(\alpha - \beta) \dot{x} \hat{u}_x$: α est donc remplacé par $\alpha - \beta$. L'action globale est donc de diminuer le facteur d'amortissement ξ .

- Ce paramètre ξ peut alors devenir négatif ce qui engendre une instabilité : solution avec exponentielle divergente au lieu de sinusoidale amortie. Cela pose évidemment un grand problème pratique : le vent peut conduire à des oscillations amplifiées et à la destruction de la structure.
- Sans en arriver à ces extrémités, les oscillations sont moins rapidement amorties et peuvent conduire à un grand inconfort rendant le pont peu praticable.

Très proche du cours néanmoins source de nombreuses erreurs. Remarquons que les candidats qui cherchent une solution en exponentielles complexes parviennent rarement à une expression explicite. Peu de candidats comprennent quelle est la conclusion "physique" de cette question, à savoir la possibilité d'un régime instable et divergent lorsque le vent est assez fort.

Q3 – La charge exercée par le piéton est donc $\vec{F}(t) = -F(t) \hat{u}_x$. En reprenant le PFD appliqué à la question **Q1**, l'équation du mouvement est transformée en :

$$\ddot{X} + \frac{\alpha}{m} \dot{X} + \frac{k}{m} X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m} \cos(\omega t) \quad \text{donc} \quad \ddot{X} + 2\xi\omega_0 \dot{X} + \omega_0^2 X = -\frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m} \cos(\omega t)$$

avec $\omega = 2\pi f$. En introduisant $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ et en notant que $\dot{X} = \dot{Y}$ et que $\ddot{X} = \ddot{Y}$, on obtient :

$$\ddot{Y} + 2\xi\omega_0 \dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m} \cos(\omega t) \quad (*)$$

Pour trouver le régime sinusoidal forcé, on utilise la représentation complexe et l'équation (*) devient :

$$(-\omega^2 + 2i\xi\omega_0\omega + \omega_0^2) Y_m e^{i\omega t} = -\frac{F_1}{m} e^{i\omega t}$$

d'où, en posant $\underline{E} = \frac{F_1}{m} e^{i\omega t}$ on obtient :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{-1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\omega_0\omega} = \frac{-1/\omega_0^2}{1 + 2i\xi\Omega - \Omega^2}$$

Remarque :

Ω est la pulsation réduite (sans dimension).

De très nombreux candidats ne prennent pas le temps de réécrire une équation dynamique et se trompent de second membre.

Q4 – C'est une question de cours. On a affaire à un filtre passe-bas du second ordre. Celui-ci peut présenter une résonance lorsque le dénominateur de $|\underline{H}(\omega)|$, c'est à dire $\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2}$ est minimum, ce qui se produit aussi lorsque la fonction :

$$f : \Omega \mapsto (1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2 = 1 + (4\xi^2 - 2)\Omega^2 + \Omega^4$$

est minimale. On a :

$$f'(\Omega) = 4\Omega^3 + 4(2\xi^2 - 1)\Omega$$

d'où $f'(\Omega) = 0$ a pour solutions $\Omega = 0$ ou bien $\Omega^2 = 1 - 2\xi^2$. La résonance a lieu pour la seconde racine, ce qui n'est possible que si :

$$1 - 2\xi^2 > 0 \quad \text{et donc} \quad \xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

La pulsation réduite de résonance est alors $\Omega_r = \sqrt{1 - 2\xi^2}$, ce qui conduit à :

$$\omega_r = \omega_0 \times \Omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

On en déduit, en notant que $1 - \Omega_r^2 = 2\xi^2$:

$$|\underline{H}(\omega_r)| = \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2(1 - 2\xi^2)}} \approx \frac{1/\omega_0^2}{\sqrt{4\xi^4 + 4\xi^2}} \approx \frac{1}{2\omega_0^2\xi}$$

puisque $\xi \ll 1$ et donc $\xi^4 \ll \xi^2$.

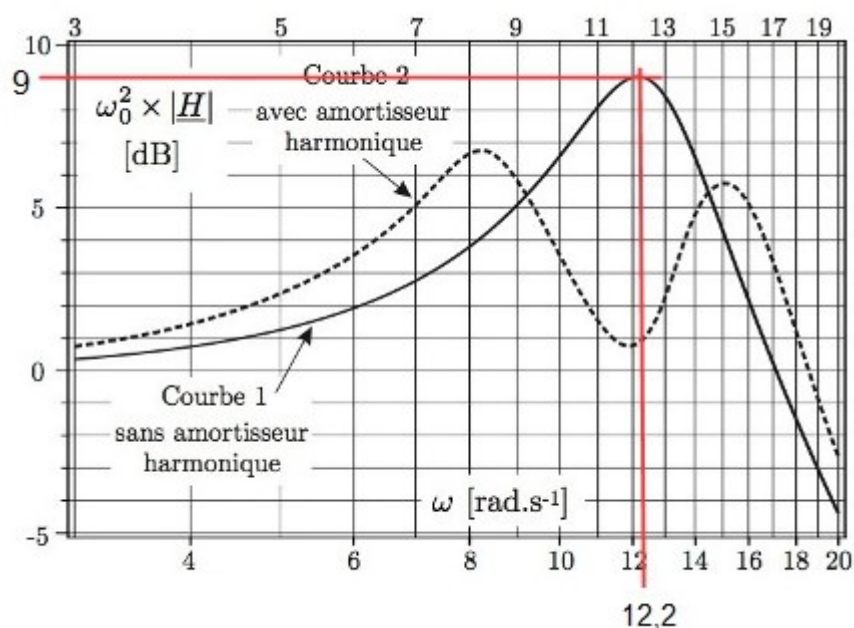
Afin d'éviter toute erreur il était sage de recalculer les valeurs demandées.

Q5 – Il faut juste faire attention à l'unité des ordonnées qui est le dB. On peut lire sur le graphique l'ordonnée du pic de résonance et on en déduit :

$$\omega_0^2 \times |\underline{H}| = \frac{1}{2\xi} \implies \omega_0^2 \times |\underline{H}|(\text{dB}) = 20 \log_{10} \left(\frac{1}{2\xi} \right) = -20 \log_{10}(2\xi) = 9$$

d'où :

$$\xi = \frac{10^{-9/20}}{2} \stackrel{AN}{=} 0,18$$



On lit sur le graphique la pulsation de résonance : $\omega_r \simeq 12,2 \text{ rad.s}^{-1}$. Or, lorsque $\xi \ll 1$ on a $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2} \simeq \omega_0$, d'où :

$$\omega_0 \simeq 12,2 \text{ rad.s}^{-1}$$

Trop de candidat se contentent d'assimiler la pulsation propre à celle de résonance sans autre explication.

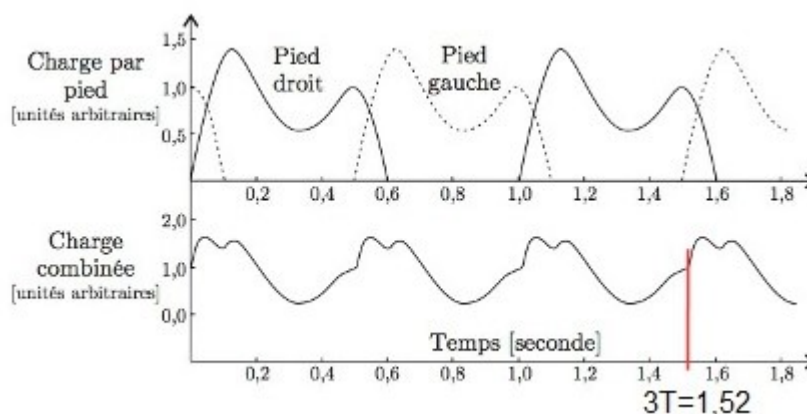
- Q6** – On a vu dans la question **Q4** que le déplacement de la structure devenait important au niveau de la fréquence de résonance. Il faut éviter ce phénomène d'autant plus que cela peut aller jusqu'à la destruction et au minimum un inconfort rendant le pont inutilisable.

Question traitée correctement, bien que le lien entre résonance et dommages potentiels sur la structure du pont ne soit pas bien compris.

On peut envisager un accéléromètre fixé au niveau de la hanche pour éviter les rotations et utiliser ensuite $F = ma$.

Toute réponse cohérente sur le plan physique était valorisée.

- Q8** – On mesure sur le graphique de la figure 2 une période T de l'excitation (charge du piéton) telle que $3T$ est légèrement supérieure à 1,5 s. On en déduit : $T \simeq 0,51 \text{ s}$, d'où une fréquence $F = 1/T \simeq 2 \text{ Hz}$.



Cependant, ce signal n'est pas sinusoïdale et il ne contient donc pas une seule fréquence. Comme il est décomposable en série de Fourier, on peut prévoir que $F = 2$ Hz est la fréquence du fondamental, mais qu'il peut y avoir les fréquences de toutes les harmoniques $f_n = nF$, $n \in \mathbb{N}^*$ qui sont des multiples de F . On peut donc éventuellement s'attendre à observer des fréquences (en Hz) de 2, 4, 6, 8, etc... (mais certaines harmoniques peuvent ne pas être présentes).

Le capteur enregistre ce signal et l'échantillonne. Or, selon le cours sur l'échantillonnage, le spectre du signal échantillonné est beaucoup plus riche que celui du signal non échantillonné. En effet, si F_e est la fréquence d'échantillonnage et que f_n est une des fréquences du signal non échantillonné, alors le signal échantillonné contient les fréquences :

$$f_n, |F_e \pm f_n|, |2F_e \pm f_n|, \text{ etc ...}$$

Si F_e est trop petite, on risque d'observer un repliement du spectre. En théorie, selon le critère de SHANNON, pour ne pas observer de repliement, il faut que $f_{\max} < F_e/2$, où $f_{\max}$ est la fréquence maximale du spectre non échantillonné. Ici, il n'y a pas vraiment de $f_{\max}$ car le signal d'origine contient sûrement des harmoniques dont les fréquences $nF \rightarrow +\infty$, mais avec des amplitudes qui tendent vers 0 et deviennent donc négligeables.

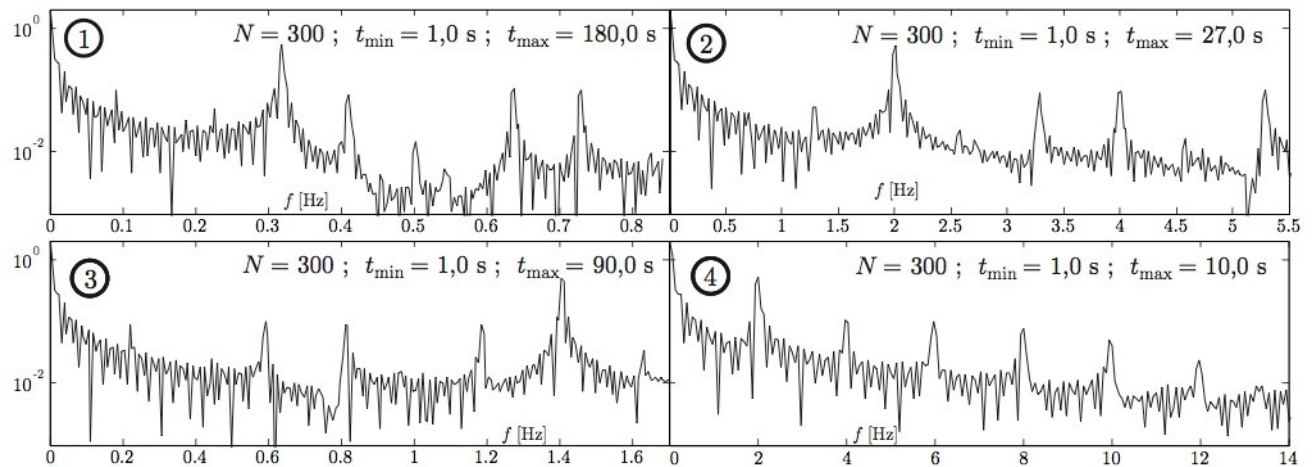
En tout état de cause, pour avoir un spectre correct du signal échantillonné, on doit au minimum imposer que $F_e/2 > 10$ Hz et si possible bien au-dessus de ce seuil.

On peut calculer F_e correspondant à chacun des 4 enregistrements grâce à N (nombre de points échantillonnés) et à la durée $t_{\max} - t_{\min}$ de l'acquisition. En effet, la période d'échantillonnage T_e est donnée par :

$$(t_{\max} - t_{\min}) = (N - 1) T_e \quad \text{d'où} \quad F_e = \frac{1}{T_e} = \frac{N - 1}{t_{\max} - t_{\min}}$$

On obtient les résultats :

Enregistrement	1	2	3	4
F_e (Hz)	1,7	11,5	3,3	33



En conclusion :

- Les spectres 1 et 3 sont inexploitable car F_e est bien trop petite : le critère de Shannon n'est pas du tout respecté.
- Le spectre 2 correspond à $F_e/2 = 5,75$ Hz permet de repérer les fréquences $f_1 = 2$ Hz et $f_2 = 4$ Hz du signal non échantillonné, mais on observe aussi les fréquences 3,3 Hz et 5,3 Hz qui sont des artefacts (fréquences du signal échantillonné non présentes dans le signal d'origine).
- Le meilleur spectre est le 4 car F_e est suffisamment grande ce qui évite le repliement. On peut donc y observer les fréquences caractéristiques du signal non échantillonné suivantes (fondamental et harmoniques) :

$$f_1 = 2 \text{ Hz}, f_2 = 4 \text{ Hz}, f_3 = 6 \text{ Hz}, f_4 = 8 \text{ Hz}, f_5 = 10 \text{ Hz}, f_6 = 12 \text{ Hz}, \text{ etc ...}$$

Il était attendu une analyse en termes de théorème de Shannon et également en termes d'harmoniques. Le fait que le signal de la figure 2 soit périodique non sinusoïdal semble avoir échappé à la plupart.

Q9 – La fréquence de résonance du pont $f_r = \omega_r/2\pi \approx 1,94$ Hz correspond quasiment à la fréquence de la marche ! (Quels sont les ingénieurs qui l'ont conçu ???).

Le système d'amortisseur n'a pas amorti grand chose (-2 dB), mais a par contre dédoublé les fréquences de résonance et créé une anti-résonance pour la fréquence de la marche. La véritable explication vient du couplage des deux oscillateurs, hors programme.

5 OSCILLATEUR À RÉSISTANCE NÉGATIVE

I. Étude d'un dipôle simulant une résistance négative

1. D'après le schéma de la Figure 1 on peut écrire :

$$i = \frac{u_{\mathcal{D}} - u_S}{R_1} \quad \text{et} \quad v_+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_S$$

grâce au théorème pont diviseur de tension. Comme l'A.O. est idéal et en régime linéaire : $v_+ = v_- = u_{\mathcal{D}}$, ce qui permet d'exprimer :

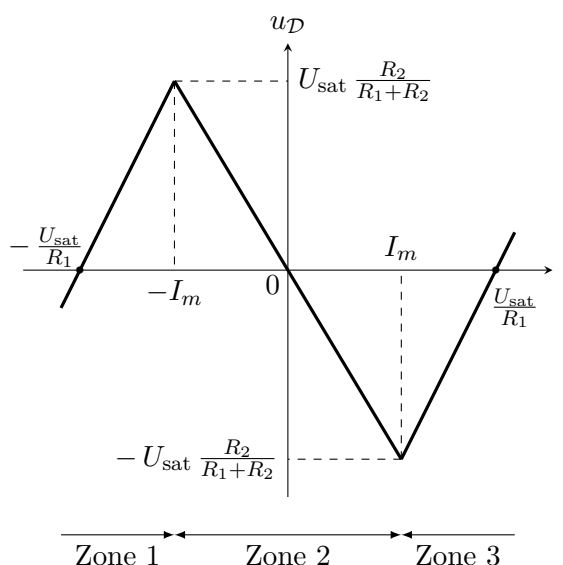
$$u_S = \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) u_{\mathcal{D}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{u_{\mathcal{D}} = -R_2 i}$$

On a $u_S = -U_{\text{sat}}$ si $i = I_m$ et donc $u_{\mathcal{D}} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_{\text{sat}}$, ce qui conduit à $\boxed{I_m = \frac{U_{\text{sat}}}{R_1 + R_2}}$.

2. On a toujours $i = \frac{u_{\mathcal{D}} - u_S}{R_1}$ mais maintenant $u_S = -U_{\text{sat}}$, d'où le résultat :

$$u_{\mathcal{D}} = R_1 i - U_{\text{sat}}$$

3. $u_{\mathcal{D}} = R_1 i + U_{\text{sat}}$
 4. On obtient le schéma ci-dessous :



II. Montage oscillateur

Conditions de démarrage des oscillations

1. Dans la zone pour laquelle $\mathcal{D}$ fonctionne en tant que "résistance négative", on peut écrire $U_{\mathcal{D}} = -R_2 i$. La loi des mailles s'écrit :

$$u_{\mathcal{D}} = u_c - L \frac{di}{dt} - Ri$$

avec $i = -C \frac{du_c}{dt}$. Dérivons donc la relation ci-dessus par rapport au temps, avec $u_{\mathcal{D}} = -R_2 i$:

$$-R_2 \frac{di}{dt} = -\frac{i}{C} - L \frac{d^2 i}{dt^2} - R \frac{di}{dt}$$

On en déduit

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R - R_2}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

Ainsi $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. D'autre part, par identification :

$$2 \frac{\xi}{\sqrt{LC}} = \frac{R - R_2}{L} \quad \text{soit} \quad \xi = \frac{R - R_2}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

2. La bobine est parcourue par i donc $i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0$ (continuité de i).

Par ailleurs, initialement $u_{\mathcal{P}}(t = 0) = -R_2 i(t = 0) = 0$. On en déduit qu'initialement :

$$u_c(t = 0) = L \frac{di}{dt}(t = 0) = U_0 \quad \text{soit} \quad \frac{di}{dt}(t = 0) = \frac{U_0}{L}$$

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ s'écrit $r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$. Son discriminant réduit est $\Delta' = (\xi^2 - 1)\omega_0^2 < 0$ (régime pseudo-périodique). Les racines de l'équation caractéristique sont donc complexes conjuguées $r_{\pm} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1 - \xi^2}$. On en déduit la forme de la solution $i(t)$

$$i(t) = e^{-\xi\omega_0 t} \left(A \cos \left(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2} \right) + B \sin \left(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2} \right) \right)$$

où A et B sont des constantes d'intégration, à déterminer avec les conditions initiales. À $t = 0$, $i(t = 0) = A = 0$. Il reste à déterminer B en dérivant i par rapport au temps :

$$\frac{di}{dt} = e^{-\xi\omega_0 t} \left(-\xi\omega_0 B \sin \left(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2} \right) + B\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \cos \left(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2} \right) \right)$$

La condition

$$\frac{di}{dt}(t = 0) = \frac{U_0}{L} = B\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$$

impose

$$B = \frac{U_0}{L\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

On obtient alors

$$i(t) = \frac{U_0}{L\omega_0} \frac{e^{-\xi\omega_0 t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left(\omega_0 t \sqrt{1 - \xi^2} \right)$$

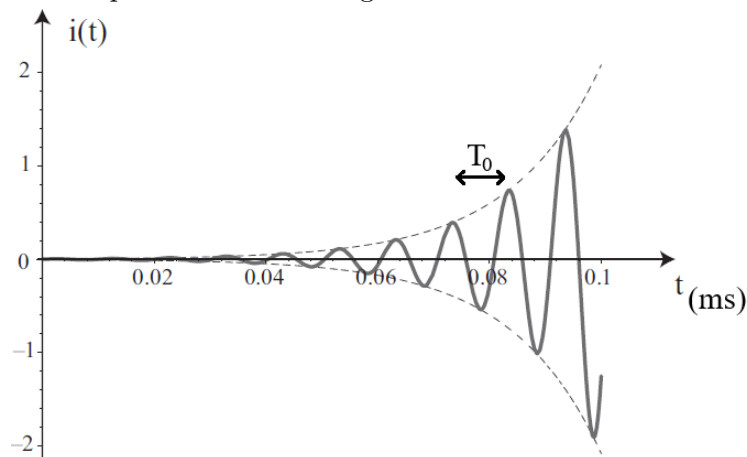
3. Si $U_0 = 0$, i reste identiquement nulle et rien ne se passe : le régime est stable et conforme aux conditions initiales. En revanche, dès que $U_0 \neq 0$, $i(t)$ évolue et décroît si $\xi > 0$ ou croît si $\xi < 0$. Dans ce cas, $i(t)$ est pseudo-périodique, les oscillations étant contenues dans une enveloppe exponentielle.
4. Les oscillations de i ont une amplitude exponentiellement croissante si $\xi < 0$ c'est-à-dire si $R_2 > R$.

5. $AN : \xi = \frac{100 - 0,35 \cdot 10^3}{2} \sqrt{\frac{1,28 \cdot 10^{-9}}{2 \cdot 10^{-3}}} = -0,1$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 10^{-3} \times 1,28 \cdot 10^{-9}}} = 6,25 \cdot 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$.

D'où $T_0 = 10 \mu\text{s}$.

Amplitude des oscillations

6. La figure ci-dessous représente le démarrage des oscillations.



L'évolution représentée sur la figure ci-dessus n'est valable qu'à condition que $|i(t)| < I_m$.

7. Hors du régime linéaire précédent, la tension u_S sature nécessairement et l'équation $u_D = -R_2 i$ est à remplacer par :

$$u_D = R_1 i \pm U_{\text{sat}}$$

La loi des mailles fournit :

$$u_D = u_c - L \frac{di}{dt} - R i$$

En remplaçant u_D par sa valeur et en dérivant la relation précédente par rapport au temps, on trouve :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R_1 + R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

8. Tant que $|i(t)| < I_m$, le dipôle fonctionne en "résistance négative" $u_D = -R_2 i$ (zone (2)).
 Pour $i(t) > I_m$, $u_D = R i - U_{\text{sat}}$ (zone (3)) (saturation négative).
 Pour $i(t) < -I_m$, $u_D = R i + U_{\text{sat}}$ (zone (1)) (saturation positive).

9. Les oscillations de $i(t)$ sont **quasi-sinusoidales**. La période des oscillations s'obtient plus précisément entre deux zéros, soit aux dates $t_1 = 0,37 T_0$ et $t_2 = 1,38 T_0$. On en déduit $T = 1,01 T_0 = 10,1 \mu\text{s}$. Il existe un écart relatif (de 1%) entre T et T_0 , cohérent avec la relation $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$. La fréquence vaut $f = 1/T = 99,0 \text{ kHz}$

On trouve par ailleurs

$$i_{\text{max}} = 1,24 I_m$$

Avec les valeurs numériques fournies :

$$I_m = \frac{U_{\text{sat}}}{R_1 + R_2} = \frac{13}{2,5 \cdot 10^3 + 0,35 \cdot 10^3} = 4,6 \text{ mA}$$

d'où

$$i_{\text{max}} = 5,7 \text{ mA}$$

10. D'après la caractéristique de $\mathcal{D}$, la tension u_D est maximale pour $i = -I_m$ soit

$$u_{D,\text{max}} = U_{\text{sat}} - R_1 I_m = 1,6 \text{ V}$$