DM n°6
Pour le mardi 24 novembre 2026

1 Craquage du propane

Données :

Si θ désigne la température en degrés Celsius et T la température en Kelvin alors $T = \theta + 273{,}15$. Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}31$ J.K^{-1}.mol^{-1}.

Dans tout l'exercice on se place dans l'approximation d'Ellingham.

On étudie à 25°C la réaction de craquage du propane $C_3H_{8(g)}$ en propène $C_3H_{6(g)}$ qui forme du di-hydrogène $H_{2(g)}$. À cette température, l'enthalpie libre standard de la réaction a pour valeur $\Delta_r G^\circ = 86{,}2$ J.mol^{-1}. La pression est égale à tout instant à la pression de référence : $P = P^\circ = 1$ bar.

1) Écrire l'équation-bilan (1) de la réaction rapportée à une mole de $C_3H_{8(g)}$ et construire un tableau d'avancement sachant que, dans l'état initial, il n'y a que n_0 moles de propane.

On définit le taux de transformation τ du propane par :

$$\tau = \frac{n_0 - n_{\text{équ}}}{n_0}$$

où $n_{\text{équ}}$ est le nombre de moles de propane l'équilibre chimique.

2) En déduire la relation entre τ et la constante d'équilibre K°.

3) Calculer numériquement le taux de transformation τ à 25°C.

4) On souhaite améliorer le rendement de la conversion de propane en propène et porter le taux de transformation à 90%.

La température étant toujours fixée à 25°C, à quelle pression doit-on se placer pour réaliser cela ?

5) On donne l'enthalpie standard $\Delta_r H^\circ = 124$ kJ.mol^{-1} associée à l'équation-bilan (1).

a) Montrer que :

$$\ln K^\circ(T) = -\frac{a}{T} + b$$

où a et b sont deux constantes dont on donnera les valeurs numériques.

b) Si on impose une pression $P = P^\circ = 1$ bar, à quelle température doit-on se placer pour obtenir un taux de transformation $\tau = 0{,}90$?

c) Quelle est la chaleur Q échangée entre le milieu réactionnel et le thermostat ayant cette température ? On prendre $n_0 = 2{,}0$ mol dans cette question.

2 Mouvement d'un palet sur une piste circulaire

Un palet, point matériel de masse m, est lancé au niveau du point A avec une vitesse horizontale $\overrightarrow{v_A}$. AB est horizontal et BC est une piste en demi-cercle de rayon R et de centre O. On suppose que le palet se déplace sans frottement. On veut que celui-ci garde le contact avec le support jusqu'au point C et qu'après sa chute (au-delà de C), il retombe exactement à son point de départ en A. On notera que la vitesse du mobile en C est horizontale (tangente au support).

Dans tout l'exercice, on supposera que $d = 3R$.

1. En utilisant le théorème de l'énergie cinétique, calculer la vitesse v_C du palet au point C en fonction de v_A, g et R.
2. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, déterminer la composante N de la réaction du support pour une position quelconque du palet M en fonction de m, g, R, v (sa vitesse en ce point) et θ (sa position angulaire sur le demi-cercle). Donner

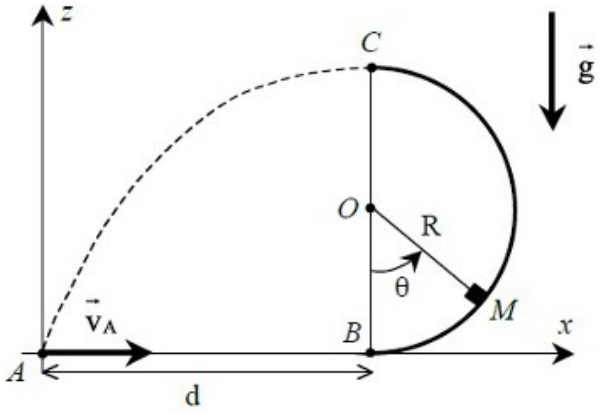

FIGURE 1 –

sa valeur en C. En déduire une condition sur v_A pour que le palet ne décolle pas de la piste.

3. Le point matériel est alors en chute libre à partir de C. Déterminer les équations horaires $(x(t), z(t))$ de sa trajectoire.
4. On veut que le point M retombe en A. Montrer que la valeur de sa vitesse en C est $v_C = \frac{3}{2}\sqrt{gR}$. En déduire l'expression de la vitesse v_A requise.
5. En réalité, la vitesse à donner au palet en A est $v'_A = 1{,}1\ v_A$ où v_A est la vitesse précédemment calculée. Ceci peut s'interpréter par l'existence de frottement solide le long de la piste horizontale entre A et B. La force tangentielle de frottement est opposée au déplacement et a pour norme $T = f\,N$, f étant le coefficient de frottement de Coulomb et N la réaction normale de la piste.

   Appliquer à nouveau le théorème de l'énergie cinétique entre A et C. Déterminer alors le travail de la force de frottement et en déduire la valeur numérique du coefficient f.

3 Mouvement d'une perle sur un cercle

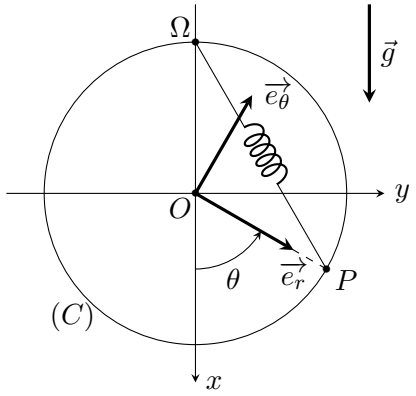

FIGURE 2 –

Soit $(\mathscr{R})$ le référentiel terrestre, supposé galiléen et muni d'un repère d'espace $(Oxyz)$ de base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Le dispositif étudié est constitué d'un cercle (C) fixe dans R, de rayon a et de centre O, contenu dans le plan vertical (Oxy) de verticale descendante Ox et d'une perle P de masse m, astreinte à se déplacer sur (C). On note Ω le point du cercle de coordonnées $(-a, 0, 0)$.

La position de P est repérée par l'angle $\theta = (Ox, \overrightarrow{OP})$, avec $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$. On note $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ la base polaire associée à P.

Les expressions vectorielles demandées seront exprimées dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$.

I. Mouvement avec un ressort

1. Montrer que l'angle $\alpha = (\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega P})$ vaut $\theta/2$.
2. Déterminer l'expression de $\overrightarrow{\Omega P}$ en fonction de a et de l'angle $\alpha = \theta/2$. En déduire la norme $\Omega P = \| \overrightarrow{\Omega P} \|$ en fonction des mêmes grandeurs.

Dans les questions qui suivent, la perle est attachée à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide L_0. L'autre extrémité du ressort est fixée en Ω (Figure 2). On suppose que le mouvement est sans frottement.

3. Déterminer l'expression de la tension $\overrightarrow{F_R}$ exercée par le ressort en fonction de k, a, L_0 et α.
4. À l'aide du principe fondamental de la dynamique, montrer que l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ vérifie :

$$\ddot{\theta} - \frac{k}{m}\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{L_0}{a}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{2g}{a}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

5. Déterminer l'énergie potentielle totale $E_P(\theta)$ de la perle en fonction de l'angle θ. En déduire l'énergie mécanique E_m en fonction de θ et de $\dot{\theta}$.
6. Retrouver l'équation de la question 4. à partir d'un raisonnement sur E_m.
7. On étudie maintenant le cas particulier suivant :

$$L_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,a \quad ; \quad a = \frac{2\,mg}{k}$$

a) Montrer que l'énergie potentielle E_P vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}E_P}{\mathrm{d}\theta} = mga\left[\sqrt{3}\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\theta\right]$$

b) Montrer que l'ensemble des positions d'équilibre est $\left\{0, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}$. Parmi celles-ci, déterminer lesquelles sont stables

c) Pour étudier les petits mouvements autour de la position d'équilibre $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$ on pose $\theta = \theta_1 + \varepsilon$, avec $\varepsilon \ll 1$ et on rappelle que, lorsque x est suffisamment proche de zéro : $\cos x \approx 1$ et $\sin x \approx x$.

Établir les expressions approchées de $\cos(\theta/2)$ et de $\sin(\theta/2)$ sous la forme de fonctions affines de du type $a\,\varepsilon + b$ où a et b sont des constantes à déterminer dans chacun des deux cas.

d) En déduire que l'équation différentielle vérifiée par ε peut se mettre sous la forme approchée, valable à l'ordre 1 en ε :

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{8m}\,\varepsilon = 0$$

Quelle est la nature du mouvement autour de θ_1 ? Quelle en est la période T ?