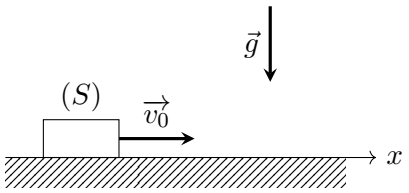
1 Distance d'arrêt

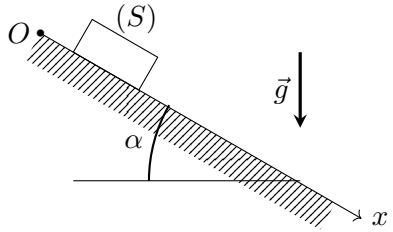
Un petit solide (S) en forme de parallélépipède, de masse m, est posé sur une table horizontale. Le contact entre (S) et la table se fait avec des frottements solides de coefficient dynamique f_d. (S) est en translation rectiligne avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_x}$. Le référentiel terrestre est supposé galiléen.

Déterminer la distance d'arrêt d, c'est à dire la distance parcourue par (S) au moment où il s'arrête.



2 Équilibre ou mouvement sur un plan incliné

Un petit solide (S) en forme de parallélépipède, de masse m, est posé sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontal. Le contact entre (S) et le support se fait avec des frottements solides de coefficient statique f_s et de coefficient dynamque dynamique $f_d < f_s$. On appelle (Ox) l'axe de plus grande pente du plan incliné.



Le référentiel terrestre est supposé galiléen.

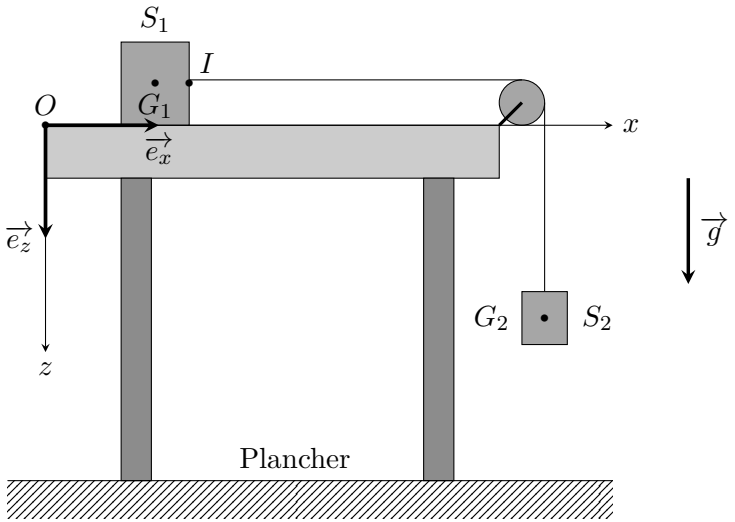
1. Dans un premier temps on étudie l'équilibre de (S) sur le plan incliné. Déterminer $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{T}$ et montrer que l'équilibre n'est possible que si $\alpha < \alpha_0$. Exprimer α_0 en fonction de f_s.
2. On suppose que $\alpha > \alpha_0$ et on étudie le mouvement de translation rectiligne de (S) sur la ligne de plus grande pente, avec une vitesse initiale nulle. Déterminer $\vec{v}(t)$ pour $t > 0$.

3 Entraînement d'un objet par une poulie

Un solide S_1 de masse m_1 est lié par un fil à un solide S_2 de masse m_2. Le fil sans masse, inextensible et de longueur L, passe sur la gorge d'une poulie idéale (sans masse et sans frottements). Le solide S_1 se déplace sur un support fixe S horizontal.

Le référentiel terrestre $(\mathscr{R}_T)$ est supposé galiléen et on le munit du repère $(Oxyz)$ dont la base associée orthonormale directe est $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

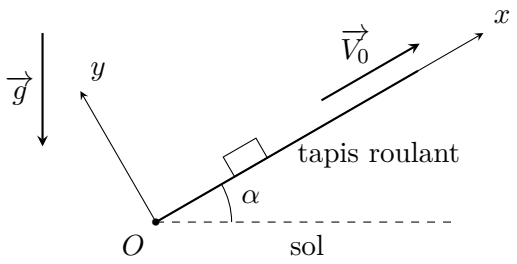
1. On suppose que S_1 et S_2 restent immobiles dans le référentiel terrestre. À quelle condition sur le rapport des masses m_2/m_1 cet équilibre est-il possible ? On fera intervenir f_s.
2. On suppose que m_2 est suffisamment grande pour amorcer les mouvements des deux solides, à partir d'un état initial de vitesse nulle. On note $\overrightarrow{v_1} = v_1(t)\,\overrightarrow{e_x}$ et $\overrightarrow{v_2} = v_2(t)\,\overrightarrow{e_z}$ les vitesses de S_1 et S_2 pour $t > 0$.
   a) Quelle est la relation entre $v_1(t)$ et $v_2(t)$?
   b) Établir l'équation vérifiée par $\dfrac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}$ en fonction de m_1, m_2, g et f_d.
   c) Comment est modifé le résultat de la question précédente lorsqu'on tient compte du moment d'inertie J de la poulie par rapport à son axe de rotation ? On notera a le rayon



de la poulie. (on garde l'hypothèse d'absence de fottements sur l'axe de rotation. Le fil est toujours inextensible et de masse négligeable).

4 Carton sur un tapis roulant

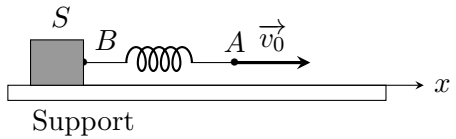
Pour monter des objets du rez-de-chaussée au premier étage d'un immeuble, on installe un tapis roulant qui se déplace à une vitesse V_0 constante par rapport au sol horizontal et qui fait un angle α avec celui-ci. Le référentiel terrestre est supposé galiléen et on le munit du repère d'espace (Oxy).



1. À l'instant $t = 0$, un carton de masse m est déposé en O sur le tapis roulant, sans vitesse initiale par rapport au sol. Y-a-t-il glissement ?
2. On note f_s et f_d les coefficients de frottement statique et dynamique entre le tapis roulant et le carton. Étudier la première phase du mouvement du carton. À quelle condition portant sur f_d et α le carton peut-il monter ? On supposera cette condition réalisée par la suite.
3. Montrer que cette première phase du mouvement se poursuit jusqu'à un instant t_1 dont on donnera l'expression en fonction de V_0, g, f_d et α.
4. Étudier ce qui se passe pour $t > t_1$. Compte tenu du fait que $f_d < f_s$, le carton peut-il monter jusqu'au premier étage dans tous les cas ? Va-t-il retomber vers le rez-de-chaussée ?

5 Masse tirée par un ressort

Un solide S de masse m est initialement immobile sur un support horizontal, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Ce solide est attaché en B à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'autre extrémité A du ressort est déplacée à vitesse constante $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_x}$ $(v_0 > 0)$ par un mécanisme non décrit ici.



Le solide est soumis à une force de frottement solide de coefficient statique f_s et de coefficient dynamique $f_d < f_s$ générée par son contact avec le support. Le seul mouvement possible est un mouvement de translation le long de l'axe Ox.

Les conditions initiales sont : $x_A(0) = \ell_0$ et $x_B(0) = 0$.

1) Déterminer l'instant $t_0 > 0$ au bout duquel le solide se met en mouvement.

2) Établir l'équation différentielle vérifiée par x_B pour $t > t_0$. On posera $\omega = \sqrt{k/m}$. Montrer que la solution de cette équation différentielle est :

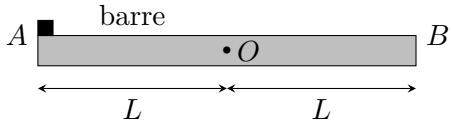
$$x_B(t) = \alpha(t - t_0) + \beta + A\cos[\omega(t - t_0)] + B\sin[\omega(t - t_0)]$$

et donner l'expression des constantes α et β en fonction de v_0, f_s, f_d, g et ω.

3) Compte-tenu des conditions initiales, déterminer les constantes A et B en fonction des mêmes paramètres que α et β. Montrer que la phase de glissement va nécessairement s'arrêter à un instant $t_1 > t_0$.

6 Glissement d'une gomme sur une barre en mouvement *

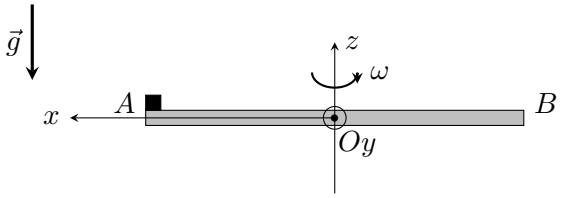
Soit une barre homogène AB, de section carrée, de masse $M = 2{,}0$ kg, de longueur $2L = 1{,}0$ m, de moment d'inertie $J = ML^2/3$ par rapport à tout axe Δ passant par son centre O et orthogonal à la barre. Dans tout le problème, on négligera la longueur de l'arête du carré de la section de la barre devant L.



On pose sur cette barre, à son extrémité A, une petite gomme (en forme de parallélépipède) de masse $m = 10$ g, que l'on supposera ponctuelle. Le contact entre la gomme et la barre est caractérisé par un coefficient de frottement statique $f_s = 0{,}2$. On désire étudier les conditions dans lesquelles la masse m reste posée sur la barre pour divers mouvements de cette barre.

On prendra $g = 9{,}81$ m.s^{-2} avec $\overrightarrow{g}$ uniforme et vertical descendant. Le référentiel terrestre $(\mathscr{R}_T)$ sera considéré comme étant galiléen.

I. L'axe de rotation de la barre est vertical

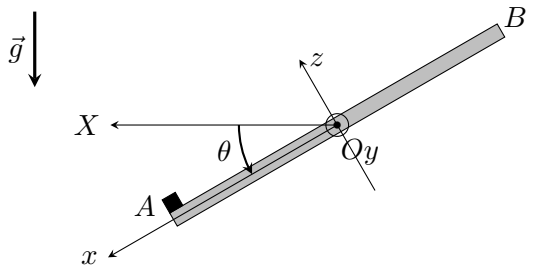


La barre est munie d'un repère d'espace $(Oxyz)$ auquel on associe la base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

1) Un moteur impose à la barre un mouvement de rotation uniforme autour de (Oz) à la vitesse angulaire ω. Montrer qu'il existe une valeur limite ω_m telle que si $\omega < \omega_m$, la gomme reste posée sans glisser sur la barre.

II. L'axe de rotation de la barre est horizontal

La barre est maintenant en rotation autour de l'axe horizontal Oy fixe dans le référentiel terrestre (la liaison pivot sera supposée parfaite), la rotation étant repérée par l'angle θ entre OX et OA, OX étant un axe fixe dans $(\mathscr{R}_T)$.



2) On lâche la barre depuis $\theta = 0$ sans vitesse initiale.

a) Appliquer le théorème du moment cinétique à l'ensemble gomme et barre.

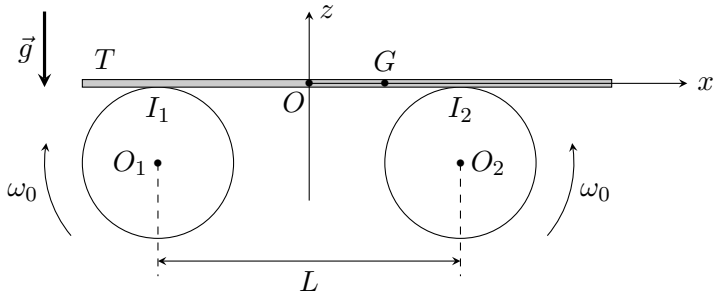
b) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la gomme (dans le référentiel que vous choisirez). En déduire la valeur θ_m de θ pour laquelle la gomme commence à glisser sur la barre.

7 Expérience de Timochenko

Deux cylindres identiques $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de rayon a tournent avec une vitesse angulaire constante ω_0 autour de leur axe dans le référentiel terrestre $\mathscr{R}_T$ supposé galiléen, les sens de rotation étant opposés. Les axes des deux cylindres sont fixes dans $\mathscr{R}_T$, parallèles, dans un même plan horizontal et leur distance est L.

$\mathscr{R}_T$ est muni du repère $(Oxyz)$

Une tige T de masse m et de section négligeable est placée sur les cylindres.



Celle-ci est suffisamment longue pour que le contact existe toujours ; il y a glissement aux points de contact I_1 et I_2, avec un coefficient de frottement dynamique f pour le contact entre la tige et chacun des cylindres. On repère la position du centre de masse G de la planche par l'abscisse x.

1) En appliquant le TCI et le TMC à T, déterminer les composantes normales N_1 et N_2 des réactions de chaque cylindre sur la tige, en fonction de m, g, L.

Pour ce faire, On admettra le premier théorème de Koenig dans le cas particulier d'un solide en translation, qui permet d'affirmer que le moment cinétique du solide par rapport à un point fixe O s'identifie avec celui de son centre d'inertie G affecté de toute la masse du solide.

2) Montrer que si $-a\omega_0 < \dot{x} < a\omega_0$ alors la composante tangentielle T_1 (resp. T_2) de la réaction de $\mathcal{C}_1$ (resp. $\mathcal{C}_2$) sur T est positive (resp. négative).

3) Établir l'équation différentielle du mouvement de T, toujours dans le cas où $-a\omega_0 < \dot{x} < a\omega_0$. En déduire $x(t)$ avec les conditions initiales $x(0) = x_0 > 0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

4) Par un calcul direct, déterminer la puissance dissipée par les frottements.