

## IDÉES DE PHYSIQUE

## La courbe anticousse

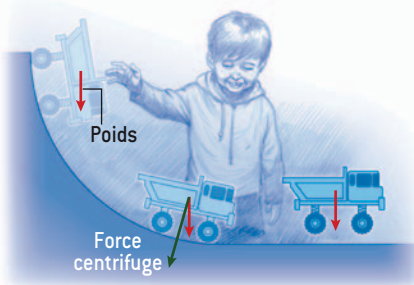
*La spirale de Cornu, ou clothoïde, est utilisée en travaux publics dans l'amorce des virages : cette courbe évite aux véhicules des secousses intempestives.*

Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIK

Comment construire une route ou une voie de chemin de fer qui serpente ? Les amateurs de modélisme réalisent leurs circuits avec des rails rectilignes et en arcs de cercle. Ils ignorent que, lors de la transition entre un rail droit et un rail circulaire, un passager serait fort incommodé par une secousse brutale ! Il existe pourtant une solution : construire les virages en forme de clothoïde, aussi nommée spirale de Cornu. Ce tracé, où la courbure en chaque point est proportionnelle à la distance parcourue jusqu'à ce point, est notamment au service des bretelles d'autoroute et des loopings des montagnes russes.

## Éviter les discontinuités de l'accélération

La force subie par un véhicule est proportionnelle à son accélération, c'est-à-dire à la variation de sa vitesse par unité de temps. Cette variation peut porter sur la valeur de sa vitesse, par exemple lors du démarrage ou d'un freinage, mais aussi résulter d'un changement de direction. Afin d'éviter que la force résultante ne soit trop élevée et ne fasse dériver le véhicule, cette variation doit être progressive. C'est pourquoi, en dehors des croisements, les routes et les voies de chemin de fer sont constituées de segments droits reliés par des segments courbes. En choisissant des



**1. EN PASSANT D'UN TRAJET** circulaire à un trajet rectiligne, le véhicule subit une discontinuité de la force centrifuge, qui s'annule brutalement. Les suspensions, qui se sont comprimées lors de la descente sous l'effet de cette force et du poids, se détendent alors en partie (car il reste le poids), d'où un rebond du véhicule.

courbes en arc de cercle, donc d'un rayon de courbure constant, la force centrifuge subie par le véhicule est constante si ce dernier a une vitesse constante en module. Ainsi, le véhicule ne dérape pas s'il entame la courbe à la vitesse appropriée.

L'arc de cercle serait-il donc la courbe idéale ? Ce raisonnement ignore une propriété répandue : l'élasticité. Un objet élastique se déforme proportionnellement à la force qui lui est appliquée. Si cette force s'annule d'un coup, toute l'énergie élastique stockée est instantanément libérée. Pour en comprendre les conséquences sur un véhicule, considérons un modèle simple de montagnes russes : un arc de cercle vertical se prolongeant en son point le plus bas par une ligne horizontale (voir la figure 1).

Lâchons une roue le long de l'arc et imaginons qu'elle roule dessus sans frottement. Elle accélère à mesure qu'elle descend. Dans son référentiel, la roue subit, outre son poids, deux forces radiales : la force centrifuge appliquée à son centre d'inertie et la réaction centripète du rail appliquée sur son bord. Sa vitesse est maximale au bas de l'arc de cercle, et il en est de même de la force centrifuge et de la réaction du rail.

Sous l'effet de ces deux forces, la roue se comprime et va entamer son mouvement sur le segment droit dans un état de déformation maximale. Or à cet endroit, la trajectoire devient subitement rectiligne : la force centrifuge disparaît, la roue se détend et

## LES AUTEURS



Jean-Michel COURTY et Édouard KIERLIK sont professeurs de physique à l'Université Pierre et Marie Curie, à Paris. Leur blog : <http://blog.idphys.fr>

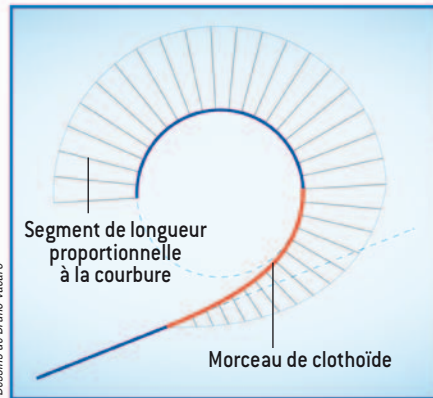
l'énergie élastique stockée se libère. Le calcul montre que cette libération peut provoquer un rebond : alors que la jonction entre les rails est continue et sans arête, la roue est susceptible de décoller ! Ce rebond n'existerait pas si l'on modélisait la roue par un point (une tentative de théoricien...). Quels que soient la nature et le lieu de la déformation (moyeu, amortisseur, etc.), le rebond est dû à la discontinuité de l'accélération et montre qu'il convient de s'intéresser aux variations temporelles de celle-ci.

## Une douce spirale

Chacun a pu ressentir une telle secousse, par exemple lorsque le conducteur d'un véhicule freine et ne relâche pas la pédale juste avant l'arrêt. Au cours de la phase de décélération, les passagers du véhicule subissent une force d'inertie orientée vers l'avant. La vitesse décroît progressivement, jusqu'à s'annuler à l'arrêt du véhicule. À cet instant, la décélération et la force d'inertie cessent brusquement et nous avons l'impression d'être projetés sur le dossier du siège. Pour éviter ce désagrément, il ne suffit pas de réduire l'accélération : dans ce cas précis, il faut qu'elle s'annule au même instant que la vitesse. C'est pourquoi le conducteur ajuste la pression qu'il exerce sur la pédale de frein juste avant l'arrêt.

Intéressons-nous maintenant au cas d'un véhicule roulant à vitesse constante (en module). Comment assurer une accélération qui soit continue tout au long du parcours ? En tout point, l'accélération est proportionnelle à la courbure de la trajectoire, c'est-à-dire à l'inverse du rayon de courbure (et dirigée vers le centre de courbure).

Avec une courbure constante, on garantit évidemment la continuité de l'accélération, mais les trajectoires sont alors soit des droites, soit des cercles. La solution la plus simple pour varier les trajectoires est de faire appel à des courbes dont la courbure (et, partant, l'accélération) augmente linéairement avec la distance parcourue. Une telle courbe, qui s'enroule peu à peu sur elle-même, n'est autre que la clothoïde, connue également sous les noms de spirale de Cornu, spirale d'Euler ou encore spirale de Fresnel.



Dessins de Bruno Vacaro



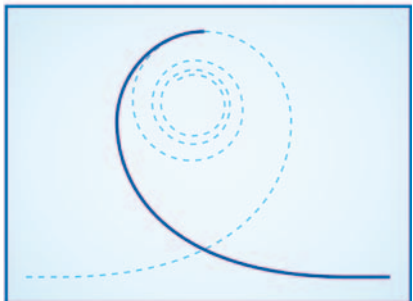
**2. EN CHAQUE POINT D'UNE CLOTHOÏDE**, ou spirale de Cornu, la courbure (l'inverse du rayon de courbure) est proportionnelle à la distance parcourue jusqu'à ce point. Elle permet de raccorder (partie rouge) un trajet rectiligne à un trajet circulaire (en bleu) de telle sorte que la courbure varie continûment. On y fait appel pour concevoir les bretelles d'autoroutes.

Les bretelles qui relient une route à une autre ont souvent la forme de clothoïde, notamment dans les échangeurs d'autoroute. Elle est en effet particulièrement adaptée pour joindre un segment droit à un segment en arc de cercle, puisque sa courbure peut varier continûment de zéro, à son début, jusqu'à la valeur du rayon de l'arc de cercle (voir la figure 2).

La combinaison clothoïde-arc de cercle-clothoïde permet même de relier deux segments droits. Par ailleurs, pour qu'un véhicule de vitesse constante suive une route en clothoïde, le conducteur doit tourner son volant à vitesse angulaire constante, une manœuvre plus aisée que d'autres. Enfin, la force centrifuge subie par les passagers augmente de façon continue et leur confort est donc maximal.

## Des loopings plus confortables

On retrouve la clothoïde dans les chemins de fer et notamment pour les trains rapides. Dans les virages où la vitesse est élevée, la voie présente un dévers, c'est-à-dire une inclinaison choisie de façon que la résultante du poids et de la force centrifuge soit perpendiculaire au plan de la voie. Les rails ne subissent alors pas de forces latérales de la part du train. Un calcul simple montre que le dévers



**3. LES LOOPINGS** des montagnes russes sont aujourd'hui souvent formés de deux morceaux symétriques de clothoïde (en trait plein sur le schéma : l'un des deux morceaux ; en pointillés : la clothoïde symétrique, plus complète). Cette forme de trajectoire permet non seulement d'éviter des secousses, mais aussi de diminuer l'accélération ressentie par les passagers dans la partie basse du looping, là où leur vitesse est la plus grande.

Retrouvez les articles de J.-M. Courty et E. Kierlik sur [www.pourlascience.fr](http://www.pourlascience.fr)



## ■ BIBLIOGRAPHIE

R. Müller, *Roller coasters without differential equations – a Newtonian approach to constrained motion*, *European Journal of Physics*, vol. 31(4), pp. 835-848, 2010.

A.-M. Pendrill, *Rollercoaster loop shapes*, *Physics Education*, vol. 40(6), p. 517, 2005.

W. F. D. Theron, *Bouncing due to the “infinite jerk” at the end of a circular track*, *American Journal of Physics*, vol. 63(10), p. 950, 1995.

doit être proportionnel à l'accélération, donc à la courbure. Pour que le dévers évolue de façon continue à partir d'une voie horizontale, il faut donc que l'accélération en fasse de même, d'où l'intérêt des clothoïdes.

Une autre application des clothoïdes porte sur les montagnes russes (*voir la figure 3*). Les loopings modernes ne sont plus forcément circulaires. En dehors du problème déjà évoqué de la secousse lors de la transition du cercle à la droite, un autre désagrément provient des accélérations subies par le passager. Si l'on souhaite qu'au point le plus haut, la force centrifuge compense le poids (avec la tête en bas, les épaules n'appuieront pas sur le harnais), on s'aperçoit que tout en bas, dans le cas d'un looping circulaire, elle lui serait cinq

fois supérieure: l'accélération ressentie par le passager serait alors égale à 6g, six fois l'accélération de la pesanteur, valeur difficilement acceptable pour un public familial !

Cette forte accélération a pour origine le fait que la vitesse du wagon, donc la force centrifuge [à courbure constante], diminue à mesure que le véhicule s'élève: la condition à respecter au sommet impose une vitesse d'entrée dans le looping trop élevée. En choisissant un looping au moins partiellement en spirale de Cornu, on entame la montée avec des courbures faibles à vitesse élevée et on l'achève avec des courbures plus fortes, mais une vitesse inférieure. L'accélération ressentie peut ainsi être ramenée à des valeurs plus supportables (autour de 3g-4g), notamment pour les enfants. ■

france culture

# LA MARCHÉ DES SCIENCES

Découvertes, inventions, aventures savantes au fil de l'Histoire

Aurélie Luneau  
14h-15h / chaque jeudi

franceculture.fr

LA MARCHÉ DES SCIENCES