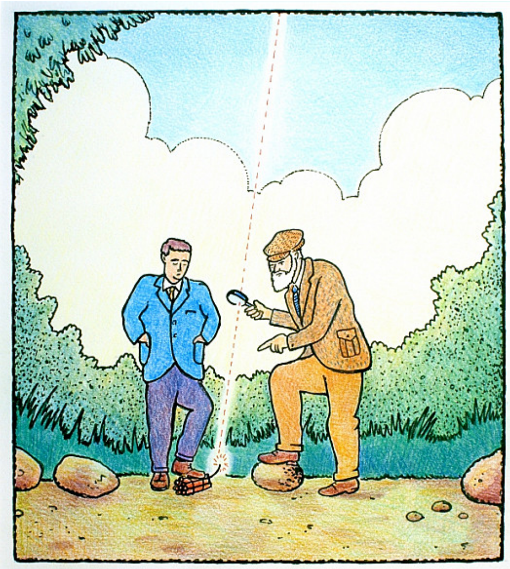
Révisions pour les oraux

Table des matières



1 Conseils généraux

Rappelez-vous qu'un oral est un échange avec un examinateur à l'issue duquel ce dernier va attribuer une note.

Rapport du jury CCINP

L'épreuve orale ne se limite pas à une évaluation du niveau de connaissance du candidat, elle teste aussi sa capacité à analyser un sujet, à apporter des solutions intéressantes aux questions posées, puis à exposer ses résultats avec clarté et aisance. Sur ce dernier point, rappelons que l'oral n'est pas « un écrit au tableau ».

Rapport du jury CCINP

- *Rares sont les candidats qui font un effort pour présenter leur sujet et annoncer la démarche qu'ils vont suivre ou tenter de suivre.*
- *La différence entre une épreuve orale et une épreuve écrite est souvent mal perçue. Ainsi, par exemple, certains candidats présentent leur solution comme s'ils rédigeait une copie, en écrivant tout au tableau. D'autres n'ont pas conscience du point important suivant : en tirant profit d'une indication de l'examinateur, ils peuvent avoir une bonne note, même si, seuls, ils n'avaient rien trouvé pendant la préparation de leur sujet.*
- *Certains candidats sollicitent l'acquiescement de l'examinateur après chaque ligne écrite.*

Plusieurs éléments entrent en ligne de compte dans l'appréciation de l'examinateur.

Non seulement, celui-ci évalue vos compétences mathématiques, mais il va inconsciemment apprécier d'autres qualités, et ce, dès le début de la planche. Voici, par ordre d'entrée en scène, les points essentiels, indépendants des mathématiques, que l'examinateur va pouvoir apprécier :

- votre apparence extérieure (apportez un soin particulier à votre tenue vestimentaire) ;
- **votre expression orale** (veillez notamment à votre vocabulaire) ;
- **votre capacité d'organisation (organisation du tableau, organisation du temps)** ;
- votre capacité à prendre des **initiatives** ;
- votre enthousiasme, notamment votre volonté de présenter un maximum de résultats (n'hésitez pas à passer sur des questions si vous avez des choses à dire sur la fin d'un exercice) ;
- **votre bon sens** (signalez tout résultat aberrant sans attendre que l'examinateur vous le fasse remarquer : par exemple, si vous trouvez une valeur négative pour l'intégrale d'une fonction positive, mentionnez que vous avez nécessairement fait une erreur et n'attendez pas que l'examinateur vous le demande) ;
- votre **capacité de dialogue**, notamment votre capacité à assimiler les indications fournies et à répondre aux questions. Certains candidats semblent d'ailleurs persuadés que chaque question posée par l'examinateur recèle un piège, alors que dans la majorité des cas, il ne s'agit que de faire préciser votre pensée.

Enfin, il n'est pas inutile de rappeler qu'un oral de concours n'est pas une « colle », et qu'en conséquence, demander à l'examinateur le résultat ou la démonstration d'une question que vous n'avez pas su faire est tout à fait déplacé.
Pour conclure, je vous invite à lire les différents rapports de jurys que l'on trouve sur le site des concours. Vous comprendrez alors ce qu'on attend de vous et vous assimilerez ainsi comment faire de votre oral un véritable atout !

Rapport du jury CCINP

Bien maîtriser le temps de préparation écrite *est un enjeu important pour une bonne réussite de l'oral. La chose n'est pas aisée et nécessite sans doute un entraînement spécifique. Il faut notamment veiller lors de la préparation écrite à ne pas rester bloqué au niveau d'une question alors qu'on peut en admettre le résultat et traiter la suite (...) Ajoutons qu'il est sans doute bon de lire le sujet dans son ensemble avant de se lancer. L'idéal serait qu'un candidat ait réfléchi à toutes les questions lors de son temps de préparation écrite. Au niveau de l'exposé oral, il ne faut pas perdre de temps à reproduire lentement des calculs déjà effectués lors du temps de préparation écrite.* ***L'intérêt du candidat est de présenter de manière précise, concise et rapide tout le travail effectué lors de la préparation écrite et de disposer ainsi d'un maximum de temps pour aborder des questions non traitées*** *avec une aide éventuelle de l'examinateur. Rappelons d'autre part que s'agissant d'un oral, il est inutile de recopier au tableau tout ce qui est dit.* ***Il faut aussi insister sur l'importance qu'il y a à faire preuve d'énergie et de volontarisme****. Même si la phase de préparation écrite ne s'est pas bien déroulé, tout est encore possible.*

Rapport du jury CCINP

Remarques sur les exercices de la banque

Les candidats n'ont pas toujours travaillé en profondeur les exercices de la banque : manque de rigueur fréquent dans les questions de cours, imprécisions, oublis de cas particuliers ... Et, si on creuse un peu dans le domaine de l'exercice proposé, on a parfois de mauvaises surprises. Ce constat est regrettable car les exercices de la banque devraient constituer un support essentiel de révision et de réflexion pour le candidat et l'occasion de s'assurer qu'il maîtrise bien les concepts sous-jacents à l'exercice. Les candidats restent faibles, comme les années précédentes, dans les domaines suivants : fonctions à plusieurs variables et dans une moindre mesure, équations différentielles. Des progrès considérables par contre en topologie, sur cette session et la précédente, sur les exercices de la banque. Par contre, les exercices de probabilités ont été, globalement, bien préparés et bien réussis.

Un premier exemple d'exercice commenté du point de vue de l'oral

Enoncé

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Calculer I_1. Simplifier $I_{n+2} + I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis déterminer la limite de $(I_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
3. On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} I_n x^n$.
   (a) Déterminer son rayon de convergence R.
   (b) Déterminer la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} I_n x^n$ sur $]-R, R[$.
   (c) Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n I_n$.

Analyse stratégique de l'énoncé

C'est un exercice très classique qui demande peu d'initiatives, mais qui fait appel à plusieurs « monuments » du programme : théorème des séries alternées, théorème de convergence dominée, théorème d'intégration terme à terme, théorème de limite radiale. L'examinateur teste la connaissance du cours, la capacité à mener vite et correctement des petits calculs (commentez la crédibilité de chaque résultat, signe, ordre de grandeur ...), et aussi la capacité à faire une analogie avec des exercices bien connus (étude des intégrales de Wallis).

1. Du calcul intégral basique pour commencer. Pour la limite de $(I_n)_{n\geqslant 0}$,
   - je pense au cours de deuxième année sur les suites d'intégrales;

- cela ressemble aussi à des exercices de sup (Wallis et quelques autres) et on ne connaissait pas le chapitre sur les suites d'intégrales...
- Si j'ai les deux idées, j'en fait part à l'examinateur.

2. On peut procéder comme pour les intégrales de Wallis (si je n'y pense pas, je ne trouverai pas). On commence par écrire trois termes dans l'ordre :

$$I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$$

puis on ajoute I_n pour obtenir $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 2I_n$. On obtient une majoration en adaptant la démarche.
Avec les intégrales de Wallis on aurait écrit :

$$I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n \qquad \text{puis} \qquad \frac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \frac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1.$$

3. (a) Le b-a-ba sur les rayons de convergence : le rayon est inchangé si on remplace le coefficient par un équivalent.
   (b) On peut envisager deux méthodes : par théorème d'intégration terme à terme, ou en exploitant la relation de récurrence de la première question.
   (c) C'est une question archi-classique : l'étude de la somme d'une série entière en $\pm R$. On pense évidemment au théorème de limite radiale.

<u>Eléments de correction</u>

1. - Soit $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$. Je remarque que $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ est de la forme $-\dfrac{u'(x)}{u(x)}$. Je calcule et je trouve $I_1 = \dfrac{\ln(2)}{2}$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. $I_{n+2} + I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\left(1+\tan^2(x)\right)\mathrm{d}x$. Le neurone de la chasse reconnaît alors dans l'intégrale la forme $u'(x)u^n(x)$, et on a $\boxed{I_{n+2} + I_n = \left[\dfrac{1}{n+1}\tan^{n+1}(x)\right]_0^{\pi/4} = \dfrac{1}{n+1}}$.
   - Proposons deux méthodes pour montrer que $(I_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 :
     - ▷ on fait intervenir le théorème de convergence dominée. On précise toutes les hypothèses (cas $x = \frac{\pi}{4}$ à part pour la limite simple) ; pour la domination, il suffit d'observer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $\left|\tan^n(x)\right| \leqslant 1$, avec $x \mapsto 1$ qui est intégrable sur ce segment.
     - ▷ On fait comme en MPSI : la suite est décroissante et minorée par 0, elle converge donc vers un réel l. En passant à la limite dans la relation de récurrence précédente, on obtient $2l = 0$ puis $l = 0$.

2. On procède en écrivant $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$. En ajoutant I_n, il vient :

$$I_{n+2} + I_n \leqslant I_{n+1} + I_n \leqslant 2I_n.$$

Cela nous donne une minoration : $\dfrac{1}{n+1} \leqslant 2I_n$.
On voudrait aussi majorer tant qu'à faire. On va donc ajouter I_{n+2} cette fois :

$$2I_{n+2} \leqslant I_{n+1} + I_{n+2} \leqslant I_{n+2} + I_n.$$

Cela donne $2I_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

En réindexant, on obtient pour tout $n \geqslant 2$: $\boxed{\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{2(n-1)}}$.

On obtient alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 2nI_n = 1$ puis $I_n \sim \dfrac{1}{2n}$.

3. (a) Immédiatement, $R = \rho\left(\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{2n}\right) = 1$.

   (b) Fixons x dans $]-1,1[$. On sait que

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \begin{cases} 1 \text{ si } x = 0 \\ -\dfrac{\ln(1-x)}{x} \text{ sinon} \end{cases}}$$

   Ainsi, pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - I_{n+2}\right) x^n \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} - \sum_{n=2}^{+\infty} I_n x^{n-2} \qquad \text{(scission à justifier)} \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{+\infty} I_n x^n \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{1}{x^2} (S(x) - I_0 - I_1 x) \\ &= -\frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{1}{x^2} S(x) + \frac{\pi}{4x^2} + \frac{\ln(2)}{2x}. \end{aligned}$$

   En isolant $S(x)$, $\boxed{\text{on obtient au final pour } x \neq 0,\ S(x) = -\dfrac{x}{x^2+1}\ln(1-x) + \dfrac{\pi}{4(x^2+1)} + \dfrac{x\ln(2)}{2(x^2+1)}}$.

   Et puis immédiatement $\boxed{S(0) = I_0 = \dfrac{\pi}{4}}$.

   Un contrôle s'impose (à voix haute!) : $S(0) = \lim\limits_{x\to 0} S(x)$, ce qui confirme la continuité de S en 0.

   (c) • Déjà, $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n I_n$ converge en vertu du théorème des séries alternées : la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ décroit et tend vers 0.

   • D'après le théorème de la limite radiale, la fonction de la variable réelle $x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$ est continue sur son ensemble de définition, et en particulier en -1. Donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n I_n = \lim_{x\to -1^+} S(x) = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{\pi}{8} - \frac{\ln(2)}{4} \boxed{= \frac{\ln(2)}{4} + \frac{\pi}{8}}.$$

Un deuxième exemple d'exercice commenté du point de vue de l'oral

Enoncé

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + {}^tA = \mathrm{I}_n$.

1. Déterminer un polynôme P annulateur de degré 4 de A.

2. Que peut-on en déduire quant à la matrice et à son spectre?

3. Montrer que si 0 n'est pas valeur propre de A, alors $A - \mathrm{I}_n$ est inversible et A est symétrique.

4. Lorsque $n = 3$, montrer que la trace de A est non nulle.

Analyse stratégique de l'énoncé

Un bon exercice d'oral, pas stéréotypé ! Un peu de calcul algébrique (substitutions) et du classique sur les polynômes de matrices. **Mais il faut aussi chercher, réfléchir et se battre : l'occasion de montrer qu'on aime ça.**

1. Il faut mener judicieusement un calcul pour faire disparaître la transposition. On peut commencer par isoler ${}^tA$, puis faire les bons choix de transformations d'écriture. Les neurones de la chasse doivent entrer en action !

2. Il s'agit d'utiliser les théorèmes du cours sur les polynômes de matrices. C'est une question banale. Ne pas savoir y répondre risque de compromettre très fortement la suite de votre oral.

3. C'est le lien entre spectre et inversibilité qui est en jeu. Vu que 0 n'est pas valeur propre de A, A est inversible (réflexe !). Différentes méthodes viennent à l'esprit pour établir que $A - \mathrm{I}_n$ est inversible : usage d'un déterminant, exhibition d'une inverse, noyau trivial, 1 n'est pas valeur propre, $\mathrm{rg}\,(A - \mathrm{I}_n) = n$. Indiquez toutes ces méthodes à l'examinateur, puis faites un choix. Après avoir prouvé que $A - \mathrm{I}_n$ est inversible, il peut être utile d'utiliser son inverse.

4. Manifestement, c'est une question de synthèse ! Déjà, on peut penser au lien entre trace et spectre : comme A est diagonalisable, $\mathrm{tr}\,(A)$ est la somme des valeurs propres comptées avec multiplicité. On se doute que les deux questions précédentes vont être utiles.

Eléments de correction

1. En isolant ${}^tA$, puis en transposant, on obtient via $\left({}^tA\right)^2 = {}^t\left(A^2\right)$:

$$A = \mathrm{I}_n - \left({}^tA\right)^2 = \mathrm{I}_n - \left(\mathrm{I}_n - A^2\right)^2 = 2A^2 - A^4.$$

$\boxed{P = X^4 - 2X^2 + X \text{ annule } A}$.

2. Comme $P = X(X-1)\left(X - \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ est scindé à racines simples, A est diagonalisable par CNS. De plus, $\mathrm{Sp}(A) \subset \left\{0, 1, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

3. Supposons que 0 n'est pas valeur propre de A : cela revient à dire que A est inversible. Considérons X dans le noyau de $A - \mathrm{I}_n$: X est un vecteur colonne tel que $AX = X$. Avec $A^2 + {}^tA = \mathrm{I}_n$, on obtient $A^2X + {}^tAX = X$, puis ${}^tAX = 0$. Puisque ${}^tA$ est aussi inversible (même déterminant que A), on obtient $X = 0$. $A - \mathrm{I}_n$ est donc aussi inversible.

   En multipliant à gauche par les inverses de A et de $A - \mathrm{I}_n$ dans $A(A - \mathrm{I}_n)\left(A^2 + A - \mathrm{I}_n\right)$, il reste $A^2 + A - \mathrm{I}_n = 0$. Avec $A^2 + {}^tA = \mathrm{I}_n$, il vient immédiatement ${}^tA = A$.

4. Supposons $n = 3$. Comme $\chi_A(X)$ est scindé (car A est diagonalisable), la trace de A est la somme de ses valeurs propres comptées avec les multiplicités. Or, les deux seules façons d'obtenir 0 en sommant 3 éléments de $\left\{0, 1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$ sont $0+0+0$ et $1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2} + \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.
La première configuration est impossible, car alors A serait nulle (diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$), ce qui contredirait $A^2 + {}^tA = \mathrm{I}_n$. La deuxième est aussi impossible avec la question précédente.

Conseils pour bien réviser

La préparation aux oraux des concours doit être intense et de qualité. Vous devez vous entraîner sur un très grand nombre d'exercices, et produire pour chacun d'eux un travail de qualité. En particulier :

- **commencez chaque exercice par son « analyse stratégique »**. Il s'agit de parcourir rapidement l'énoncé dans sa globalité pour :
  - ▷ comprendre le but de l'exercice, son résultat final ;
  - ▷ comprendre chaque question, et voir comment démarrer efficacement sur cette question ;
  - ▷ le plan de route, la démarche globale pour atteindre ce but ;
  - ▷ repérer les compétences évaluées dans cet exercice, i.e. ce que l'examinateur va chercher à évaluer.

- **Terminez chaque exercice par un bilan :** faire le point sur les techniques et méthodes qui ont été utilisées lors de sa résolution, et les points de cours utilisés.

La plupart des exercices qui suivent ont été posés en 2024, 2023 ou 2022 aux concours CCINP, IMT, Mines-Ponts, et Centrale, et sont accompagnés d'indications.

2 Fonctions, suites et séries

Les points importants

- La méthodologie des suites récurrentes
- Théorèmes de comparaison des séries à termes positifs.
- Convergence absolue $\Rightarrow$ convergence.
- Les deux points précédents combinés pour comparer une série quelconque à une série à termes positifs.
- Des séries de référence : géométrique, Riemann... et bien sûr Bertrand avec démonstration (le cas $\dfrac{1}{n^\alpha \ln^\beta(n)}$ est rapide si $\alpha \neq 1$, et si $\alpha = 1$ une comparaison série-intégrale).
- Comparaison série-intégrale justement.
- Théorème des séries alternées.
- Théorème de sommation des relations de comparaison.
- Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes ...
- ... et plus généralement les théorèmes sur les familles sommables.
- Formule de Stirling, constante d'Euler.

Les erreurs fréquentes

Rapport du jury CCINP

- *Très mauvaise maîtrise du vocabulaire et des notations : mélange quasi-systématique (voire systématique, même chez les bons candidats) des notions de série, somme d'une série, somme partielle et suite des sommes partielles d'une série.*
- *Dans le calcul de sommes de séries télescopiques (comme par exemple $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$), il est vivement conseillé de passer par les sommes partielles pour éviter de manipuler des sommes de séries divergentes.*
- *Dans le critère spécial des séries alternées, trop de candidats oublient une des trois hypothèses qui assurent la convergence de la série. Par ailleurs, le critère spécial des séries alternées est une condition suffisante de convergence mais non nécessaire.*
- *Manque fréquent de technique pour étudier l'éventuelle convergence de séries, même sur des exemples très simples. L'outil essentiel pour justifier la convergence d'une série à termes positifs reste l'utilisation d'un équivalent. De nombreux candidats n'y pensent même pas ou peinent à trouver un équivalent simple.*
- *Trop de candidats pensent encore que si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ (oubli de la limite) alors, d'après d'Alembert, la série de terme général u_n converge. Contre exemple simple : la série harmonique.*

Rapport du jury CCINP

- *Rappelons au passage que les séries de Bertrand ne sont toujours pas au programme. Mais, les candidats peuvent être amenés à étudier, par eux même, la convergence d'une série de Bertrand donnée, si une question de l'exercice le requiert. Par conséquent, la connaissance des résultats sur les séries de Bertrand, à travers des exercices d'entraînement, peut s'avérer tout de même utile car elle permet au candidat d'orienter son raisonnement : partir sur une preuve de convergence ou sur une preuve de divergence.*

Fonctions numériques, suites

Exercice 2.1 (Saint-Cyr 2024, une suite implicite)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note (E_n) l'équation $x^n + x - 1 = 0$.

1. Montrer que (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$, notée par la suite x_n.
2. Montrer que (x_n) est croissante et majorée. Qu'en déduire ?
3. (Python) Afficher les 100 premières valeurs approchées de (x_n) en procédant par dichotomie.
4. (Python) Représenter graphiquement les valeurs et conjecturer la limite.
5. Démontrer cette conjecture.

Exercice 2.2 (une suite implicite, IMT 2024)

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On note (E_n) l'équation $\mathrm{e}^x = nx$, où $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3, (E_n)$ admet exactement deux solutions, notées par la suite α_n et β_n avec $\alpha_n < \beta_n$.
2. Montrer que $\alpha_n > 0$ pour tout $n \geqslant 3$.
3. Déterminer la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \geqslant 3}$.
4. Déterminer la limite de (α_n).
5. Donner un équivalent simple de α_n en $+\infty$.
6. Donner un développement asymptotique à deux termes de α_n.

Exercice 2.3 (une suite implicite, IMT 2024)

On note I_n l'intervalle $]2n\pi, 2n\pi + \pi/2[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'équation $\sin(x) = \mathrm{e}^{-x}$ admet une unique solution dans I_n, notée par la suite x_n. Qu'en est-il sur $\mathbb{R}^+$?
2. Montrer que $x_n \to +\infty$.
3. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n.

Exercice 2.4 (une suite implicite, IMT 2024)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $g_n : t \mapsto \ln t - \arctan t - n\pi$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $g_n(x_n) = 0$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, e^{n\pi} < x_n$. En déduire la nature de la série $\sum \frac{1}{x_n}$.

Exercice 2.5 (une suite récurrente, IMT 2023)

On définit la suite (u_n) par $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que (u_n) converge vers 0 .
2. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\left(u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha\right)$ converge vers une limite non nulle.
3. Enoncer le théorème de sommation des relations de comparaison dans le cas divergent positif.
4. Déterminer un équivalent de (u_n). Quelle est la nature de $\sum u_n$?

Exercice 2.6 (un produit, IMT 2023)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$. Donner un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?

Exercice 2.7 (une suite implicite, IMT 2023)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $\cos x = nx$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, cette équation a une et une seule solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.
2. Déterminer la monotonie et la limite de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer un développement limité à l'ordre trois en $1/n$ de x_n.
4. La série $\sum \ln(\cos x_n)$ converge-t-elle ?
5. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\prod_{i=1}^{n} x_i \sim \frac{c}{n!}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 2.8 (une suite récurrente, IMT 2023)

On définit, pour x réel, $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

1. Discuter la continuité de f.
2. Tracer le graphe de f.
3. On définit la suite (x_n) par $x_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$. Étudier la monotonie et la convergence de (x_n).

Exercice 2.9 (une suite récurrente, CCINP 2022)

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et $\forall x > 0, 0 \leqslant f(x) < 1$.

On définit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n f(u_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et qu'elle converge vers 0.

2. On suppose dans la suite que f est dérivable en 0 avec $f'(0) \neq 0$.

   Déterminer un équivalent de $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$, puis un équivalent de u_n. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$?

Exercice 2.10 (une suite récurrente, IMT 2022)

1. Montrer que la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{\operatorname{ch} u_n}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
2. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n} (u_n - \ell)$.

Exercice 2.11 (IMT 2022)

Soient $c \in \mathbb{R}$ et $\Omega(c)$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{1}{2}(x_{n+1} + x_{n-1}) = c x_n$$

1. L'ensemble $\Omega(c)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Le cas échéant, quelle est sa dimension ?

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur c pour que toutes les suites de $\Omega(c)$ soient bornées.

Exercice 2.12 (une suite implicite, CCINP 2021)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $u_n \in]0,1]$ tel que $\displaystyle\int_{u_n}^{1} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t = n$. On pourra considérer la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_x^1 \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n) et sa limite.

3. On pose $v_n = n + \ln(u_n)$. Montrer que (v_n) converge et exprimer sa limite à l'aide d'une intégrale.

4. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$?

Exercice 2.13 (Mines-Ponts 2023)

Soit α un réel non nul. On pose, pour $x \in [-1,1]$, $g_\alpha(x) = \cos(\alpha \arcsin x)$. À quelle condition sur α la fonction g_α est-elle polynomiale ?

Exercice 2.14 (Mines-Ponts 2023)

Soit (u_n) une suite réelle définie par $u_0 \geqslant 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \dfrac{1}{n+1}$.

1. Si (u_n) converge, quelle est sa limite ?

2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant 1$. Montrer que (u_n) converge. Quelle est sa limite ?

3. Étudier la convergence de (u_n) dans le cas général.

Exercice 2.15 (une suite implicite, Mines-Ponts 2023)

Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $[0,1]$.
2. Étudier la monotonie de la suite (x_n). Montrer sa convergence.
3. Déterminer la limite de la suite (x_n) et un équivalent simple de x_n.
4. Déterminer un développement asymptotique à deux termes de x_n.

Séries numériques

Exercice 2.16 (Navale 2024)

Soit (u_n) une suite réelle ou complexe. On suppose que $\sum u_n$ est convergente. Montrer que $\sum \frac{u_n}{n}$ est une série convergente.

Exercice 2.17 (IMT 2024)

Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$. Nature de $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$? de $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$?

Exercice 2.18 (CCINP 2023)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \sqrt{k}$.

1. Montrer que : $u_{2n} = \sum\limits_{\ell=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{2\ell} + \sqrt{2\ell - 1}}$.
2. En déduire que $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2n}}{2}$.
3. Déterminer un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n + u_{n+1}$. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} (v_{n+1} - v_n)$ est convergente de somme strictement négative.
5. Trouver la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{u_n}$.

Exercice 2.19 (IMT 2023)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ et admet une unique valeur propre réelle a. Montrer que $a > 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum\limits_{\lambda\in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^n$ est un entier.
3. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin\left(\pi a^n\right)$ converge.

Exercice 2.20 (comparaison série-intégrale, CCINP 2023)

On pose pour tout entier $n \geqslant 2$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} (\ln(k))^2$.

1. Montrer que $\sum u_n$ diverge.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$:
$$\int_1^n (\ln(t))^2 \, \mathrm{d}t \leqslant u_n \leqslant \int_2^{n+1} (\ln(t))^2 \, \mathrm{d}t$$
3. Pour $x \geqslant 1$, calculer $\int_1^x (\ln(t))^2 \, \mathrm{d}t$ et en trouver un équivalent en $+\infty$ en fonction de $x \mapsto x(\ln(x))^2$.
4. Déterminer un équivalent de $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ et en déduire la nature de $\sum \frac{1}{u_n}$.

Exercice 2.21 (IMT 2023)

Déterminer la limite $\lim_{\alpha \to 0^+} \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$.

Exercice 2.22 (IMT 2024)

Nature de la série $\sum_{n \geqslant 0} \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{b^n + 2^{\sqrt{n}}}$ où a, b sont deux réels fixés avec $b \geqslant 0$.

Exercice 2.23 (IMT 2022)

Nature de la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ où $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4} + \sin(n)}$.

Exercice 2.24 (IMT 2023)

Étudier la convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^{2\alpha} + (-1)^n}}$.

Exercice 2.25 (IMT 2023)

Nature de la série $\sum \cos\left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1}\right)$?

Exercice 2.26 (IMT 2023)

Nature de la série $\sum \cos\left(n^2 \pi \ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right)$?

Exercice 2.27 (IMT 2023)

Montrer que $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$, en déduire que
$$\frac{8}{3} \leqslant \pi \leqslant \frac{52}{15}.$$

Exercice 2.28 (Mines-Ponts 2021)

Donner un développement asymptotique à deux termes de la somme partielle $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\ln(k)}{k}$.

Exercice 2.29 (Mines-Ponts 2022, 2023)

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}\right)$. Étudier la limite éventuelle de (u_n).

Exercice 2.30 (Mines-Ponts 2022, 2023)

1. Montrer que tout sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$ pour un $a \in \mathbb{R}_+$, soit dense dans $\mathbb{R}$. Dans la suite de l'exercice, on fixe un réel θ tel que $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.
2. Montrer que $\theta\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Déterminer les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos(\sqrt{n}\theta))n \in \mathbb{N}$.

Indications

2.3 3. Poser $u_n = x_n - 2n\pi$ puis montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et enfin $u_n \sim e^{-2n\pi}$. Attention à ne pas composer des équivalents...

2.4 1.

2.6 Montrer que $u_n > 0$ puis considérer $v_n = \ln(n)$. Montrer qu'il existe une constante C telle que $v_n = -\frac{\ln(n)}{2} + C + o(1)$.

2.8 1. Si $a \in \mathbb{Z}$, déterminer les limites à droite et à gauche de f en a.

2. Remarquer que $f(x+1) = f(x)+1$ pour tout réel x.
3. Si $n \in \mathbb{Z}$, $[n, n+1[$ est stable par f.

2.9 2. Utiliser un développement limité de f à l'ordre 1 en 0.

2.10 Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}(x)}$ est k-lipschitzienne avec $k<1$.

2.11 Reconnaître une suite récurrente linéaire d'ordre 2. Penser à introduire une base de $\Omega(c)$.

2.12 2. Après avoir obtenu la décroissance de (u_n), raisonner par l'absurde en supposant sa limite $l > 0$.

3. Intégration par parties.
4. utiliser 3. pour obtenir un équivalent de u_n.

2.13 Par parité de cos, on se ramène au cas $\alpha > 0$. Montrer par récurrence que les entiers pairs conviennent. Pour la réciproque, calculer la dérivée de g_α.

2.14 2. Montrer que (u_n) est croissante.

3. On suppose qu'il existe n_0 tel que $u_{n_0} > 1$. Montrer alors que $u_n > 1$ à partir du rang n_0. Deux cas sont possibles.
   - (u_n) est croissante à partir du rang n_0. Aboutir à une contradiction.
   - Il existe un indice $p \geqslant n_0$ tel que $u_{p+1} < u_p$. Montrer que (u_n) est décroissante à partir du rang p et conclure.

2.16 Faire une transformation d'Abel, en posant $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, et en commençant par écrire $\frac{u_n}{n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{n}$.

2.17 A partir du rang 1, $u_n \geqslant 0$, et donc à partir du rang 2, $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$. En déduire la limite de u_n lorsque $n \to +\infty$, puis un équivalent, puis un DL à trois termes (en comptant le petit o).

2.18 2. Par sommation des relations de comparaison, $u_n \sim \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2l}}$. Conclure par comparaison série-intégrale.

3. Commencer par montrer que $u_{2n+1} = u_{2n} - \sqrt{2n+1} \sim -\frac{2n+1}{2}$.

4. $v_{n+1} - v_n = (-1)^n \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}}$. Conclure avec le théorème des séries alternées.

5. Commencer par déterminer la nature de $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right)$.

2.19 1. Etudier la fonction polynomiale associée au polynôme caractéristique de A.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A^n est à coefficients entiers ; considérer sa trace.

3. Que vaut le produit des valeurs propres de A ? En déduire que les deux autres valeurs propre de A sont de module < 1 et conclure avec 2.

2.21 Encadrer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ par la méthode des rectangles (comparaison série-intégrale).

2.28 Commencer par déterminer un équivalent α_n de S_n à l'aide de la méthode des rectangles. Attention aux variations de $x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$ ...
Ensuite, poser $u_n = S_n - \alpha_n$, puis déterminer un équivalent de la « dérivée discrète » $u_n - u_{n-1}$.

2.29 Ramener l'étude de u_n à celle de $v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ en remarquant que f est lipschitzienne sur $[0, 1]$.

3 Suites et séries de fonctions

Les points importants

- Différents modes de convergence.
- CVN ⇒ CU ⇒ CS.
- Théorème de la double limite. Théorèmes de transmission de la continuité, de la classe $\mathscr{C}^1$, de la classe $\mathscr{C}^k$.
- Convergence uniforme et intégration sur un segment.
- Rayon de convergence d'une série entière, diverses caractérisations, méthodes de calculs.
- Développement en série entière des fonctions usuelles. Formule de Taylor et méthode de l'équation différentielle.
- Une fonction à bien connaître : la fonction ζ de Riemann. Régularité, limite en $+\infty$, équivalent en 1.

Erreurs fréquentes

Rapport du jury CCINP

Séries de fonctions

- *De grosses lacunes sur la convergence uniforme. Beaucoup de candidats pensent à considérer le reste mais ne le majorent pas indépendamment de x... Certains arrivent à rectifier lorsqu'on leur demande de reformuler la définition de la convergence uniforme et qu'ils la connaissent.*
- *Pour la convergence normale sur A, les candidats sont rapidement en difficulté s'il ne suffit pas de majorer $\left|f_n(x)\right|$ indépendamment de x sur A. Ils ne pensent pas systématiquement, dans ce cas-là, à chercher $\sup\limits_{x\in A}\left|f_n(x)\right|$ en étudiant les variations d'une fonction par exemple. Inversement, d'autres candidats se lancent dans une étude infructueuse des variations de $\left|f_n(x)\right|$ (expression compliquée de $\left|f_n(x)\right|$ par exemple) alors qu'une simple majoration convient.*
- *Ne pas oublier que, lorsqu'on parle de convergence uniforme ou normale, il est indispensable de préciser sur quel domaine sinon cela n'a aucun sens.*
- *Confusion parfois entre la convergence absolue et la convergence normale quand on se place ailleurs que $\mathbb{R}$ sur ou $\mathbb{C}$.*
- *Ne pas oublier que la convergence absolue entraîne bien la convergence simple mais en dimension finie.*

Rapport du jury CCINP

Séries de fonctions

- *En ce qui concerne l'interversion limite et intégrale, encore trop de candidats pensent pouvoir utiliser un argument de convergence uniforme lorsqu'ils ne sont pas sur un segment.*
- *Plus généralement, en ce qui concerne les théorèmes d'interversion, les candidats s'emmêlent les pinceaux très rapidement en mélangeant ceux pour les suites de fonctions, ceux pour les séries de fonctions, ceux valables sur un segment et ceux valables sur un intervalle quelconque. Nous leur conseillons de synthétiser ces théorèmes dans un simple tableau et de les réviser régulièrement. Et quand ils savent quel théorème utiliser, il est rare d'obtenir toutes les hypothèses pour l'appliquer ...*

Rapport du jury CCINP

Séries entières

- *La recherche du rayon de convergence ne se limite pas à l'utilisation de la règle de d'Alembert.*

  La règle de d'Alembert pour les séries entières reste inutilisable pour les séries lacunaires ou par exemple les séries du type $\sum \cos(n) z^n$. *Il est donc fondamental de connaître d'autres techniques présentées en cours ou en séances d'exercices pour déterminer le rayon de convergence : utiliser la règle de d'Alembert pour les séries numériques, déterminer les valeurs de z pour lesquelles la suite* $(a_n z^n)$ *est bornée, majorer ou minorer* $|a_n|$ *, repérer une valeur de z intéressante pour laquelle* $\sum a_n z^n$ *converge ou diverge,...*
- *Une erreur courante : pour la série entière* $\sum a_n z^n$, *de nombreux candidats écrivent que si* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|a_{n+1} z^{n+1}|}{|a_n z^n|} = l|z|$, *alors* $\sum a_n z^n$ *converge si et seulement si* $l|z| < 1$.
  L'erreur provient du fait que la règle de d'Alembert assure la convergence absolue pour $l|z| < 1$ *et la divergence pour* $l|z| > 1$, *mais le cas* $l|z| = 1$ *est douteux (cas pour lequel on ne peut pas conclure). Donc l'équivalence proposée par les candidats est fausse.*

  Par contre, dans une telle situation, on peut conclure quant à la valeur du rayon. Reste à le présenter correctement à l'oral, comme à l'écrit d'ailleurs.
- *Une série entière converge normalement donc uniformément sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert de convergence mais pas forcément sur le disque ouvert de convergence comme le pensent encore beaucoup de candidats.*
- *Mauvaise connaissance des développements en série entière usuels. De ce fait, les candidats sont souvent en difficulté sur des exercices où il est demandé de calculer des sommes de séries entières ou numériques.*

Suites et séries de fonctions

Exercice 3.1 (CCINP 2024)

On pose : $\zeta(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^t}$.

1. Donner le domaine de définition et le sens de variation de ζ.
2. Étudier la continuité de ζ sur son domaine de définition.
3. Quelle est la limite de ζ en $+\infty$?
4. Montrer que $\zeta(t) \underset{t\to1^+}{\sim} \frac{1}{t-1}$. On pourra s'aider de $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{x^t}$.
5. Montrer que ζ est convexe.

Exercice 3.2 (CCINP 2024)

Soit $r \in]-1,1[$. On définit $f_n : x \mapsto r^n \cos nx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer la fonction S définie par
$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$
3. En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos x} = -1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$
4. Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$. Calculer $\int_0^{2\pi} \cos kx \cos nx \,\mathrm{d}x$.
5. En déduire, pour k dans $\mathbb{N}$, l'expression de
$$I_k = \int_0^{2\pi} \frac{\cos kx}{1+r^2-2r\cos x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 3.3 (IMT 2024)

Soit $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xn}}{n}$.

1. Préciser l'ensemble de définition réel D de S.
2. Calculer $S(x)$ pour tout $x \in D$.
3. Quelles sont les limites de S aux bornes de D ?
4. L'intégrale $\int_0^{+\infty} S(x)\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Exercice 3.4 (IMT 2024)

On considère la fonction $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{1+n^2}$.

1. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Calculer $g''(x)$ et en déduire une équation différentielle vérifiée par g.

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Exercice 3.5 (IMT 2024)

Montrer que $S : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right)$ est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur$[0,1]$.

Exercice 3.6 (IMT 2024)

Montrer que $f : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln\left(1+\frac{x}{k}\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3.7 (IMT 2024)

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \exp(-x\sqrt{n})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

3. Déterminer un équivalent simple en 0 de f.

Exercice 3.8 (Navale 2024)

Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n : x \mapsto \dfrac{x}{\left(1+n^2x\right)^2}$. Étudier la convergence simple puis uniforme de $\sum u_n$ et $\sum u_n'$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 3.9 (IMT 2024)

Soit $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nxe^{-nx^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. Étudier les modes de convergence de cette série de fonctions.

3. Donner une expression simplifiée de $f(x)$.

Exercice 3.10 (CCINP 2024)

On pose $f : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2x}{x^2+n^2}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et est impaire.

2. La série de fonctions converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$? Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4. Étudier la convergence uniforme sur $[1,+\infty[$.

Exercice 3.11 (CCINP 2024)

On considère la fonction F définie pour x réel par $F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\ln(1+\mathrm{e}^{-nx})$ sous réserve de convergence.

1. Déterminer le domaine de définition de F (noté D dans la suite).
2. La fonction F est-elle continue ?
3. Étudier la monotonie de F.
4. Déterminer $F(D)$. On pourra démontrer d'abord que $F(D)$ est un intervalle.

Exercice 3.12 (CCINP 2024)

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$ on pose $u_n(x)=n^x\mathrm{e}^{-nx}$.

1. (a) Étudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions $\sum u_n$.
   (b) Étudier la continuité sur $]0,+\infty[$ de sa somme S définie par $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x)$.
   (c) Étudier la limite de S en $+\infty$.
2. (a) Montrer que S est décroissante et convexe.
   (b) Montrer que $S(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\mathrm{e}^{-x}$.

Exercice 3.13 (CCINP 2024)

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$ pour $x\in\mathbb{R}$.

   On note D le domaine de convergence et $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$ pour $x\in D$.
2. Montrer que S est continue sur $[-1,1[$.
3. Montrer que la série $\sum\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right)x^n$ converge normalement sur $[-1,1]$.
4. En déduire la limite de $(1-x)S(x)$ quand $x\to1^-$.

Exercice 3.14 (IMT 2023)

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $f_n(x)=\frac{(-1)^n}{n^{2\alpha}+x^2}$, avec α dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha>1/2$.
2. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $S:x\longmapsto\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)$. Montrer que
$$\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\arctan\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$
4. Montrer que $\int_0^{+\infty}S(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$.
5. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 3.15 (CCINP 2023)

Pour tout $(n,x)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on pose $f_n(x)=\dfrac{1-x^{2n+2}}{1+x}$.

1. Etudier la convergence simple de (f_n).
2. Etudier la convergence uniforme de (f_n) sur son intervalle de convergence simple.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t$.
4. Montrer que $\forall(n,x)\in\mathbb{N}\times\,]-1,1[\,,\, f_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}x^{2k}-\sum_{k=0}^{n}x^{2k+1}$.
5. Montrer que $\displaystyle\sum\frac{(-1)^k}{k+1}$ converge et calculer sa somme à l'aide des questions précédentes.

Exercice 3.16 (CCINP 2023)

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}$, on pose $v_n(x)=n^x\mathrm{e}^{-nx}$. Soit $S:x\longmapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}v_n(x)$.

1. Donner l'ensemble de définition de S.
2. Montrer que S est continue sur son ensemble de définition.
3. Donner la limite de S en $+\infty$ à l'aide du théorème de la double limite.
4. $\displaystyle\sum_{n\geqslant1}v_n$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?
5. S est-elle dérivable sur $]0,+\infty[$?

Exercice 3.17 (CCINP 2023)

On pose, pour tous $n\in\mathbb{N}^*$ et $t\in[0,1]$, $g_n(t)=e^t\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n$.

1. Montrer que : $\forall(t,n)\in[0,1]\times\mathbb{N}^*,\left|g_n'(t)\right|\leqslant\dfrac{e^t}{n}$.
2. Montrer que : $\forall(t,n)\in[0,1]\times\mathbb{N}^*,\left|e^{-t}-\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n\right|\leqslant\dfrac{t}{n}$.
3. Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ de la suite de fonctions $(G_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par
$$G_n:x\in[0,1]\mapsto\int_0^x g_n(t)\mathrm{d}t.$$

Exercice 3.18 (CCINP 2023)

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n:x\in[0,\pi/2]\mapsto n\cos^n(x)\sin(x)$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n).
2. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0,\pi/2]$?

   Indication : considérer $\displaystyle\int_0^{\pi/2}f_n(t)\mathrm{d}t$.
3. Soit $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[\alpha,\pi/2]$?
4. Soit $g\in\mathscr{C}^0([0,\pi/2],\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2}f_n(t)g(t)\mathrm{d}t=g(0)$.

   Indication : utiliser $\left|\displaystyle\int_0^{\pi/2}\left[f_n(t)g(t)-f_n(t)g(0)+f_n(t)g(0)\right]\mathrm{d}t-g(0)\right|$.

Exercice 3.19 (CCINP 2023)

Soit $(a_n)_n \geqslant 0$ une suite décroissante de réels positifs qui converge vers 0 . Pour tout $t \in [0,1]$, on pose $u_n(t) = a_n(1-t)t^n$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,1]$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que cette série converge normalement.
3. Montrer que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur $[0,1]$.

Exercice 3.20 (CCINP 2023)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n\left(1+n^2x^2\right)}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. Étudier la continuité de la somme $f = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n$.
3. Donner un équivalent de f en 0^+.

Exercice 3.21 (CCINP 2023)

Soit $S : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Montrer que S est définie sur $]0,+\infty[$. Calculer $S(1)$ et montrer que $xS(x) = \dfrac{1}{e} + S(x+1)$.
2. Montrer que $S(x) \sim \dfrac{1}{x}$ quand $x \to 0$.
3. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 3.22 (IMT 2023)

On définit une suite de fonctions $f_n : I = [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}$.

1. Étudier la convergence simple de $\sum f_n$.
2. La série converge-t-elle normalement sur I ? uniformément sur I ?
3. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

Exercice 3.23 (IMT 2023)

1. Montrer la relation : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. On pose $u_n(x) = \arctan(\sqrt{n+x}) - \arctan(\sqrt{n})$ et $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
   (a) Étudier la convergence simple, puis la convergence normale de S.
   (b) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 3.24 (IMT 2023)

Soit $f : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto \dfrac{\sin\left(x^3\right)}{x\sqrt{x}}$.

1. Montrer que f admet un prolongement $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R}^{+*} \mapsto f\left(\dfrac{n}{x}\right) f(xn)$. Montrer que $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 3.25 (IMT 2023)

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u_0 = \mathrm{id}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin \circ u_n + u_n$.

1. Étudier la convergence simple de (u_n).

2. La convergence est-elle uniforme ?

Exercice 3.26 (IMT 2023)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On définit une suite de fonctions $\left(f_n\right)$ sur $[0,1]$ par $f_n(x) = f\left(x + \dfrac{x(1-x)}{n}\right)$ pour $n \geqslant 1$ et $f_0(x) = 0$.

1. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de $\left(f_n\right)$.

2. Montrer que les résultats restent valides pour une fonction f seulement lipschitzienne.

Exercice 3.27 (IMT 2023)

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^+$et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Montrer que : $\forall x \in [0,1], 1 - \mathrm{e}^{-x} \geqslant \left(1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) x$.

3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ? Quelle est sa limite en $+\infty$?

4. Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 3.28 (IMT 2023)

Soit $\alpha \in]-1;1[$; pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n(x) = \dfrac{\alpha^n}{n} \cos nx$. Soit $W : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} w_n(x)$

1. Montrer que W est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; exprimer W' à l'aide des fonctions usuelles.

2. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 - 2\alpha \cos(x) + \alpha^2\right) \mathrm{d}x$.

Exercice 3.29 (CCINP 2023)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{2x}{x^2 + n^2}$.

1. Justifier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$. On note S la fonction somme :

$$\forall x \in \mathbb{R}, S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x).$$

2. Justifier la continuité de S sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} S(x) = \pi$.

Exercice 3.30 (CCINP 2023)

Soit $t \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(t) = \dfrac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1}$.

1. Donner le domaine de convergence D de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$
2. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$.
3. Etudier les convergences normale et uniforme de $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ sur $[0,1]$.
4. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ avec $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(t^2-1)^{n+1}}{n+1}\,\mathrm{d}t$? Calculer sa somme.

Exercice 3.31 (CCINP 2019)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{(n+x)^{\frac{3}{2}} + (n+x)^{\frac{1}{2}}}$. On note f la somme de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$.

1. Montrer que f est bien définie sur $]-1,+\infty[$.
2. Montrer que f est C^1 sur $]-1,+\infty[$.
3. Trouver un équivalent de f en -1 et montrer que f est intégrable sur $]-1,0]$.
4. Trouver la limite de f en $+\infty$.
5. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x^b}$.

Exercice 3.32 (Centrale 2023)

Soit $f \in C^1\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^{+*}\right)$ croissante telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{a}{x}$ où $a > 0$.

1. Citer le théorème d'intégration des relations de comparaison, puis trouver un équivalent de $\ln(f(x))$ quand $x \to +\infty$.
2. Donner le domaine de définition de $u : x \mapsto \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f(n)e^{-nx}$. Déterminer les limites de u aux bornes de son domaine de définition.
3. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) \sim \dfrac{C}{x} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ lorsque $x \to 0^+$.

Exercice 3.33 (Mines-Ponts 2021)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $u_n : x \mapsto x\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$.

1. Montrer la convergence simple de $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ sur $\mathbb{R}^+$.
2. On pose $f : x \mapsto -\ln(x) + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, puis qu'elle vérifie les trois points suivants :

$$\forall x > 0, f(x+1) - f(x) = \ln(x),\ f \text{ est convexe},\ f(1) = 0.$$

3. Montrer que f est l'unique fonction vérifiant ces trois points.

   Indication : pour $x \in \,]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, remarquer que $\ln(n) \leqslant \dfrac{f(n+1+x)-f(n+1)}{x} \leqslant \ln(n+1)$.

4. Montrer que $f = \ln(\Gamma)$.

Exercice 3.34 (Mines-Ponts 2021, Centrale 2017)

Soient la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 2} f_n$ avec $f_n(x) = \dfrac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$ et S sa somme.

1. Etudier la convergence simple de cette série de fonctions.

2. Etudier la convergence normale sur $[0,+\infty[$.

3. On considère pour tout $n \geqslant 2$ le reste $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_k$ de cette série. Montrer que pour tout $x > 0$:

$$R_n(x) \leqslant \frac{x}{(e^x-1)\ln(n+1)}.$$

   En déduire la convergence uniforme de cette série de fonctions sur sur $\mathbb{R}_+$.

4. Montrer que S est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$.

5. Montrer que S n'est pas dérivable en 0.

6. Déterminer un équivalent de $S(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Séries entières

Exercice 3.35 (CCINP 2024)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![0,n]\!]$, on note $N(n,p)$ le nombre de permutations de n éléments possédant exactement p points fixes. En particulier, on posera $D(n) = N(n,0)$. On pose également :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{D(n)}{n!} x^n$$

1. Par dénombrement, montrer que

$$\forall p \in [\![0,n]\!] \quad N(n,p) = \binom{n}{p} D(n-p)$$

   Montrer également que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{p=0}^{n} N(n,p) = n!$.

2. Justifier que f est bien définie sur $]-1,1[$. Prouver également que, pour tout $x \in \,]-1,1[$, $f(x)\mathrm{e}^x = \dfrac{1}{1-x}$.

3. En déduire une expression de $N(n,p)$.

4. Trouver un équivalent de $\dfrac{N(n,p)}{n!}$ lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter.

Exercice 3.36 (CCINP 2024, 2023)

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\ln(n)x^n$.

On note $S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln(n)x^n$.

2. Montrer que : $\forall x\in\,]-1,1[\,, S(x)=\dfrac{1}{1+x}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)x^{n+1}$.
3. En déduire que $\lim_{x\to 1^-}S(x)=\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.
4. En utilisant la formule de Wallis $\dfrac{2}{\pi}=\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\dfrac{1}{4k^2}\right)$, déterminer $\lim_{x\to 1^-}S(x)$.

Exercice 3.37 (CCINP 2024)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=3$ et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_ku_{n-k}$.

1. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, 0\leqslant u_n\leqslant n!4^{n+1}$.
2. Soit $f: x\mapsto \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{u_n}{n!}x^n$. Montrer que le rayon de convergence R est strictement positif, et que, sur $]-R,R[$, $f'(x)=f(x)^2$.
3. En déduire une expression de f au voisinage de 0 à l'aide de fonctions usuelles.
4. Donner une expression de u_n.

Exercice 3.38 (CCINP 2024)

Soit (a_n) une suite réelle convergente de limite $a\in\mathbb{R}^*$.

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{a_n}{n}x^n$.
2. Rappeler le développement en série entière de $x\mapsto\ln(1-x)$ et son rayon de convergence.
3. Rappeler la définition de la convergence de (a_n) vers a.
4. On note f la somme de la série entière susmentionnée. Montrer que, pour tout $\varepsilon>0$, on peut trouver un majorant de $\left|\dfrac{f(x)}{\ln(1-x)}+a\right|$ de limite ε quand x tend vers 1^-. En déduire la convergence et la limite de $\dfrac{f(x)}{\ln(1-x)}$ ainsi qu'un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers 1^-.

Exercice 3.39 (IMT 2024)

Soit $f: z\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}a_nz^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$.

1. Soient $n\in\mathbb{N}$ et $r\in\mathbb{R}^+$. Montrer que $a_nr^n=\dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f\left(re^{it}\right)e^{-int}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que si f est bornée alors f est constante.

Exercice 3.40 (CCINP 2024)

On donne $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

1. Déterminer le rayon de convergence et la limite en 1 de $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.
2. Déterminer le rayon de convergence de $g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Exprimer g à l'aide de ln. Donner les limites en en 1 et 0 de $x \mapsto \ln(x)g(x)$.
3. Soient a et b deux réels, $0 < a < b < 1$. Montrer que $\int_a^b \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ est bien définie.
4. Montrer que $\int_a^b \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b \ln(x)x^{2n}\,\mathrm{d}x$.
5. Calculer $\int_a^b \ln(x)x^{2n}\,\mathrm{d}x$.
6. En déduire la valeur de $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3.41 (Saint-Cyr 2024)

On définit la suite (a_n) par la donnée de $a_0 > 0$ et de la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \ln(1+a_n)$.

1. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n x^n$?
2. La série $\sum a_n(-R)^n$ converge-t-elle ?
3. (a) Trouver un équivalent de $u_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$. En déduire un équivalent de a_n.
   (b) Quelle est la nature de la série $\sum a_n$?

Exercice 3.42 (Navale 2024)

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, S_n = a_0 + \cdots + a_n$. On suppose que $\sum a_n$ converge. Soient $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} t^n$ et $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{S_n}{n!} t^n$.

1. Déterminer le rayon de convergence de f et g.
2. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+, f'(t) = g'(t) - g(t)$ et $\int_0^t f(u)e^{-u}\,\mathrm{d}u = (g(t) - f(t))e^{-t}$.
3. En déduire : $\int_0^{+\infty} f(u)e^{-u}\,\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Exercice 3.43 (CCINP 2024)

Déterminer les développements en séries entières en 0 de $f : x \mapsto \ln\left(1-2x+x^2\right)$ et de $g : x \mapsto \arctan\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

Exercice 3.44 (IMT 2024)

Rayon de convergence et somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Exercice 3.45 (IMT 2023)

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)(2-x)}.$$

1. f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ? Si oui, expliciter ce développement et donner son domaine d'existence.
2. Donner le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0 .

Exercice 3.46 (CCINP 2023)

On pose $I_0 = I_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ on pose

$$I_n = I_{n-1} + (n-1) I_{n-2}$$

On note $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière définissant f vérifie $R \geqslant 1$.
2. Montrer que f est solution d'une certaine équation différentielle du premier ordre.
3. En déduire l'expression de f, la valeur de R et une expression de I_n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.47 (CCINP 2023)

On considère la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de la manière suivante :

$$\forall n \geqslant 2, \quad d_n = \begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{1}{\sqrt{n+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{n+1}} & \frac{n-1}{n} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \ddots & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{n-2}{n-1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \text{ et } \begin{cases} d_0 = 1 \\ d_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. Calculer d_2 et d_3.

   Montrer que $\forall n \geqslant 2, (n+1) d_n = n d_{n-1} + d_{n-2}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, d_n \leqslant 1$.

   Que peut-on dire du rayon de convergence de $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^{n+1}$?
3. Déterminer une équation différentielle vérifiée par S. Déterminer alors une autre expression de S sans le symbole somme.
4. En déduire une expression de d_n.

Exercice 3.48 (IMT 2023)

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n^{(-1)^n} x^n$ et calculer sa somme.

Exercice 3.49 (CCINP 2023)

On pose, pour $n \in \mathbb{N}, I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence de $\sum I_n x^n$?
2. Montrer, pour $n \in \mathbb{N}$, que $I_{n+2} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.
3. Donner un équivalent simple de I_n.
4. Déterminer le rayon de convergence R de $\sum I_n x^n$. Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} I_n x^n$ pour $x \in]-R, R[$.

Exercice 3.50 (CCINP 2023)

1. Étudier la convergence simple de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$. On note D l'ensemble de convergence et $S(x)$ la somme sur D. L'application S est-elle continue sur D ?
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) x^n$ converge normalement sur $[-1, 1]$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} (1-x)S(x)$.

Exercice 3.51 (CCINP 2023)

Soit $f : z \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon $+\infty$.

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $a_n r^n = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f\left(re^{it}\right) e^{-int}\, \mathrm{d}t$.
2. Montrer que si f est bornée alors f est constante.

Exercice 3.52 (Centrale 2023)

Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de carré sommable et $f : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est développable en série entière autour de 0.
3. Montrer que si f est identiquement nulle sur $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$ alors la suite (a_n) est nulle.

Exercice 3.53 (Centrale 2023)

1. Rappeler la définition d'une fonction f développable en série entière en 0 et préciser une expression de $f^{(k)}(0)$ en fonction des coefficients pour $k \in \mathbb{N}$.
2. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 pour laquelle il existe $\alpha > 0, M > 0$ et $a > 0$ tels que
$$\forall x \in]-\alpha, \alpha\left[, \forall k \in \mathbb{N}, \left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant M a^k k!\right. .$$
Montrer que f est développable en série entière en 0 .
3. Soit f une fonction développable en série entière en 0 . Montrer l'existence de $\alpha > 0$, $M > 0$ et $a > 0$ tels que

$$\forall x \in]-\alpha, \alpha\left[, \forall k \in \mathbb{N}, \left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant M a^k k! .\right.$$

Exercice 3.54 (Centrale 2022)

Soient $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^+$. On suppose que :

$$a_n \sim b_n, \qquad \sum_{n\geqslant 0} b_n x^n \text{ a un rayon de convergence égal à 1} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 0} b_n \text{ diverge}$$

On pose $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

1. Montrer que g admet $+\infty$ comme limite en 1^-.
2. Montrer que $f(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} g(x)$.

   Indication : pour $\epsilon > 0$ fixé, on pourra introduire un rang n_0 à partir duquel $|a_n - b_n| \leqslant \epsilon b_n$.
3. Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent de $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} n^p x^n$ au voisinage de 1^-.

Exercice 3.55 (Mines-Ponts 2019)

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite vérifiant $a_0 > 0$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$.

1. Déterminer les variations, la limite puis un équivalent simple $(b_n)_{n\geqslant 0}$ de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$.

   Indication : on pourra chercher un équivalent de $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$.
2. Quel est le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$? Etudier la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ lorsque $x = R$ ou $x = -R$.
3. Déterminer un équivalent de $f(x)$ au voisinage de 1^-.

   Indication : pour $\epsilon > 0$ fixé, on pourra introduire un rang n_0 à partir duquel $|a_n - b_n| \leqslant \epsilon$.

Exercice 3.56 (Nombres de Bell, Mines-Ponts 2021)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le cardinal de l'ensemble des partitions de $[\![1, n]\!]$. On pose $u_0 = 1$.

1. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$.
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant n!$.
3. Montrer que le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u_n}{n!} x^n$ est > 0. Donner une expression de sa somme f. Exprimer u_n sous forme de somme.

Indications

3.13 3. Etablir la convergence uniforme sur $[-1, 0]$ par le théorème des séries alternées, puis la convergence normale sur tout segment $[0, a]$ où $a \in]0, 1[$.

3.32 3. Commencer par trouver un équivalent de $U(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-tx}\,\mathrm{d}t$, puis revenir au cas discret par une comparaison série intégrale. Pour le cas continu, un changement de variable puis TCD.

3.36 3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)x^{n+1}$ par théorème de double limite. La convergence uniforme sur $[0,1[$ s'obtient par théorème des séries alternées.

4. Regrouper les termes 2 par 2 dans la somme de 3.

3.37 1. Récurrence forte.

2. $R \geqslant \dfrac{1}{4}$. Produit de Cauchy.

3. Pour x au voisinage de 0, $f(x) \neq 0$ et donc $\dfrac{f'(x)}{f(x)^2} = 1$. On en déduit $f(x) = \dfrac{3}{1-3x}$.

4. Par unicité du DSE, $u_n = 3^{n+1}n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3.39 1. Permutation de symboles.

2. Montrer que $a_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. On pourra faire tendre r vers $+\infty$ dans le résultat de 1.

3.42 3. On utilise le résultat classique, à savoir démontrer (pas facile...) : si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $e^{-t}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u_n}{n!}t^n \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

Pour montrer ce fait, fixer $\epsilon > 0$, et commencer par remarquer qu'à partir d'un certain rang n_0, $|u_n| \leqslant \epsilon$.

3.43 Pour f, on factorise le polynôme $1-2X+X^2$ et on réagit. On repère que g' est rationnelle et donc plus facile à développer en série entière.

3.52 1. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$.

2. Fubini

3. Par unicité du DSE, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n^{k+1}} = 0$. Faire tendre k vers $+\infty$ pour obtenir $a_1 = 0$. Adapter pour les autres coefficients.

3.56 1. Quand il s'agit de construire une partition de $[\![1, n+1]\!]$, on peut commencer à choisir la partie de $[\![1, n+1]\!]$ qui va contenir $n+1$.

2. Par récurrence forte.

3. Simplifier $f(x).\exp(x)$ par produit de Cauchy. On obtient $f(x) = \dfrac{1}{e}\exp\left(e^x\right)$. On conclut via Fubini.

4 Intégrales

Les points importants

- Intégrales sur un segment : sommes de Riemann, techniques de calcul, théorème fondamental.
- Formule de Taylor avec reste intégral.
- Intégrales convergentes, absolument convergentes : théorèmes de comparaison et fonctions de référence.
- Intégrabilité sur un intervalle quelconque.
- Théorème de changement de variable sur un intervalle quelconque.
- Théorème d'intégration par parties.
- Intégration des relations de comparaison.
- Théorème de convergence dominée.
- Théorème d'intégration terme à terme.
- Intégrales à paramètres : théorèmes de continuité, de dérivation (avec domination uniforme globale ou domination uniforme locale).
- Savoir prouver qu'une fonction définie par une intégrale à paramètre est de classe C^k, de classe C^∞.
- Une fonction à bien connaître : la fonction Γ d'Euler (définition, propriétés, équivalent en 0, limite en $+\infty$, caractère C^∞, convexité).

Les erreurs fréquentes

Rapport du jury CCINP

Intégration sur un intervalle quelconque

- *Oubli quasi-systématique d'évoquer la continuité par morceaux sur l'intervalle concerné.*
- *Manque inquiétant de technique pour justifier l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle : en majorité, les candidats ne pensent même pas, si la fonction est positive, à utiliser un équivalent et lorsqu'ils en trouvent un, ils peinent souvent à comparer l'équivalent à une fonction de Riemann qui convient, surtout si la fonction n'est pas intégrable. Ces difficultés sont à mettre sur le compte d'un manque d'entraînement.*

Intégrale à paramètre

Globalement, les candidats connaissent mieux les hypothèses des théorèmes de continuité et de dérivabilité que sur les sessions précédentes mais ils ne pensent pas assez souvent, quand c'est nécessaire, à se placer localement pour l'hypothèse de domination. Et certains continuent, pour l'hypothèse de domination, à majorer, trop souvent, par une fonction qui dépend encore des deux variables de la fonction initiale. Pourtant, si on leur demande alors l'énoncé du théorème, ils évoquent bien une domination par une fonction qui ne dépend plus que de la variable d'intégration.

Exercice 4.1 (IMT 2024)

Montrer que la fonction $f : x \mapsto \int_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$ et intégrable sur $[0,+\infty[$. Calculer son intégrale.

Exercice 4.2 (IMT 2024)

On pose $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{th}(3x)-\mathrm{th}(2x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de I.
2. Pour $t \in [2,3]$, on pose $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{th}(3x)-\mathrm{th}(tx)}{x}\,\mathrm{d}x$.
   (a) Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$.
   (b) En déduire la valeur de I.

Exercice 4.3 (CCINP 2024)

On définit la fonction F de la variable réelle par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{\sqrt{t}(1+t)}\,\mathrm{d}t$, sous réserve d'existence.

1. Montrer que F est définie sur $[0,+\infty[$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$. Donner une expression intégrale de $F'(x)$.
2. Calculer $F(0)$.
3. On pose $\gamma = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.
   Montrer que F est solution de l'équation différentielle $y' - y = -\dfrac{\gamma}{\sqrt{x}}$.
4. Montrer que $F(x) = \pi\mathrm{e}^x - \gamma\mathrm{e}^x \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.
5. Trouver la valeur de γ.

Exercice 4.4 (CCINP 2024)

1. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la série $\sum \mathrm{e}^{-nx}$ converge-t-elle ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x \mapsto \mathrm{e}^{-nx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
3. Justifier l'existence et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(x)\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.
4. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Exercice 4.5 (IMT 2024)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n |\ln(1-t)|^\alpha \mathrm{d}t$.

1. Pour quelles valeurs du réel α l'intégrale I_n converge-t-elle ?
2. Déterminer la limite de (I_n).
3. La série $\sum I_n$ converge-t-elle ?

Exercice 4.6 (IMT 2024)

On cherche à déterminer un équivalent de $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}\,\mathrm{d}x$.

On pose $I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I = J$.
2. Calculer $I + J$.
3. En déduire I.
4. Effectuer le changement de variable $t = n^{4/3}x$ dans l'expression de I_n.
5. Déterminer la limite de $\left(n^{5/3} I_n\right)$. En déduire un équivalent de I_n.

Exercice 4.7 (CCINP 2024, 2023)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+x^3\right)^n}$.

1. Justifier la définition de I_n.
2. Montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^n I_n$. Montrer que $\sum u_n$ converge et déterminer la somme de cette série.

Exercice 4.8 (IMT 2024)

Soit $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan(x)^n\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+2}$.
3. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Ind. On fera apparaître un télescopage.
4. Retrouver directement ce résultat.

Exercice 4.9 (CCINP 2024, 2023)

On pose, pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $a_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier l'existence de $a_{n,p}$ et calculer cette expression.
2. On considère $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\sum\limits_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{a_{n,p}}$. Justifier son existence et calculer sa valeur.
3. La famille $\left(\frac{1}{a_{n,p}}\right)_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

Exercice 4.10 (IMT 2024)

En se ramenant à une équation différentielle, calculer $\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2}\,dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.11 (IMT 2024)

1. Quel est le domaine de définition de la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$?
2. Montrer que g est de classe C^1 sur $]-1, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
3. En déduire une expression simplifiée de $g(x)$.

Exercice 4.12 (IMT 2024)

1. Déterminer le domaine de définition D_F de $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\operatorname{sh} t}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée.
3. En déduire $F(x)$ pour tout $x \in D_F$.

Exercice 4.13 (CCINP 2024, 2023)

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1 - \exp\left(-xt^2\right)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Domaine de définition de f ?
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition.
3. Donner une expression simplifiée de $f(x)$. On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 4.14 (IMT 2024)

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi t^2 - 2i\pi x t\right)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par f puis simplifier l'expression de $f(x)$.

Exercice 4.15 (CCINP 2024, 2023)

Soient a et b, 2 réels strictement positifs.

1. Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{t^{3/2} + t^{1/2}}\mathrm{dt}$.

   Indication : Poser $u = \sqrt{t}$.
2. Justifier l'existence de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2} + k^{1/2}}$.
3. Montrer l'inégalité suivante : $2\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right) \leqslant R_n \leqslant 2\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
4. En déduire un équivalent simple de R_n au voisinage de $+\infty$.

Exercice 4.16 (Navale 2024)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soient $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues. On suppose $f > 0$.

1. On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_a^b (f(t) + xg(t))\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Déterminer $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

2. On suppose que : $\forall x \in \mathbb{R}, \int_a^b |f(t)+xg(t)|\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$. Déterminer $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$. La conclusion reste-t-elle vraie avec seulement $f \geqslant 0$?

Exercice 4.17 (IMT 2023)
Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{4x} \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^4\right)^2}$.

1. Étudier les variations de f et tracer son graphe.
2. Donner un équivalent de f en 0.

Exercice 4.18 (IMT 2023)
Soit $f : x \in \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[\mapsto \int_x^{3x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^3}}$. Étudier f et donner son graphe.

Exercice 4.19 (IMT 2023)
Montrer que $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{1+4k}$.

Exercice 4.20 (IMT 2023)
On pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{1+n^4t^3}\,\mathrm{d}t$ pour $n \geqslant 1$.

1. Montrer que I_n est bien définie.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. Nature de la série $\sum I_n$?

Exercice 4.21 (CCINP 2023)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\left(1+x^3\right)^n}$.

1. Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \geqslant 1$.
2. Montrer que $I_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) I_n$.
3. On pose $u_n = n^{1/3} I_n$. Étudier la convergence de la suite (u_n).

   Ind. Poser $v_n = \ln(u_n)$.
4. Étudier la convergence de la série $\sum I_n$.

Exercice 4.22 (CCINP 2023)
Soit, pour n un entier naturel non nul, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(1+t^4\right)^n}\,dt$.

1. Monter que I_n est défini, puis que la suite $(I_n)_{n>0}$ converge vers une limite à déterminer.
2. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}. En déduire une seconde façon de déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n>0}$.

Exercice 4.23 (CCINP 2023)

1. Calculer $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{3k}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,1]$, puis démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^{3n}}{1+t^3}dt = 0$$

2. En déduire que : $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+3k} = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.
3. Calculer $\int_0^1 \frac{2t-1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{1+3k}$.

Exercice 4.24 (CCINP 2023)

1. Soit $M>0$ et $u : [1,+\infty[\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ tel que $\forall x \in [1,+\infty[, |u(x)| \leqslant M$.

   Montrer que $\int_1^{\infty}\frac{u'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Montrer que $\int_1^{\infty}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{\infty}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t$ convergent.
3. Montrer que $\int_1^{\infty}\sin\left(t^3\right)\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 4.25 (CCINP 2023)

Pour tout réel x, on note $h(x) := \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(t^2+\frac{x^2}{t^2}\right)}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que pour tous réels strict positifs a et b, $t \mapsto \frac{a}{t^2}\mathrm{e}^{-t^2-\frac{b}{t^2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
3. Montrer que $h' = -2h$ et en déduire une expression de h.

Exercice 4.26 (CCINP 2023, 2021)

Soit $I = \int_0^{+\infty}\frac{t\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que I est convergente.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $J(x) = \int_0^{x}\frac{t\,|\sin t|}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\frac{(u+k\pi)\sin u}{1+(u+k\pi)^2}\,\mathrm{d}u$
3. L'intégrale I est-elle absolument convergente ?

Exercice 4.27 (IMT 2023)

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(x)^n\,\mathrm{d}x$. Étudier la convergence de $\sum u_n$. Calculer sa somme.

Exercice 4.28 (IMT 2023)

Calculer, pour $x \in \mathbb{R}, \phi(x) = \int_0^{+\infty}\mathbf{e}^{-t^2}\cos(tx)\mathrm{d}t$ par deux méthodes :

1. à l'aide d'un développement en série entière de la fonction cosinus ;

2. à l'aide d'une équation différentielle d'ordre 1.

Exercice 4.29 (IMT 2023)
Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^t - e^{-2t}}{t} \cos(xt) \mathrm{d}t$.

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$.
3. Exprimer F à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 4.30 (CCINP 2023)

1. Soient $a, b > 0$. Donner les primitives sur $\mathbb{R}$ de $u \mapsto \frac{1}{au^2 + b}$.
2. Exprimer $\cos(t)$ en fonction de $u = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$ lorsque $\cos\left(\frac{t}{2}\right) \neq 0$.
3. Soit $f : x \in]1, +\infty[\mapsto \int_0^{\pi} \ln(\cos(t) + x) \mathrm{d}t$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$, puis exprimer f' sans intégrale.
4. En déduire une expression de f.

Exercice 4.31 (IMT 2023)
On considère $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} \, \mathrm{d}t$.
1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur R.
3. Exprimer f''.
4. En déduire des expressions de f' et f avec des fonctions usuelles.

Exercice 4.32 (IMT 2023)
Soit $F : x \mapsto \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)^x \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est de classe C^∞ sur $]-1, +\infty[$.
2. Montrer que $F(n+2) = \frac{n+1}{n+2} F(n)$. Calculer $(n+1)F(n)F(n+1)$.
3. Donner un équivalent de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 4.33 (IMT 2023)
Soit $F : t \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt)}{x\left(1 + x^2\right)} \mathrm{d}x$. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$, puis de classe $\mathscr{C}^1$. En déduire F.

Exercice 4.34 (CCINP 2023)
Soit $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(xt) - \arctan(t)}{t} \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$, puis que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. En déduire l'expression de f' puis de f.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(at)-\arctan(bt)}{t}\,\mathrm{d}t$ pour $(a,b)\in\left(\mathbf{R}^{+*}\right)^2$.

Exercice 4.35 (CCINP 2023)

Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, on pose $I_{p,q}=\displaystyle\int_0^1 x^p\ln(x)^q\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer la convergence des intégrales $I_{p,q}$ et les calculer.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 e^{x\ln(x)}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^n}$.

Exercice 4.36 (CCINP 2023)

Pour tout entier $n\geqslant 2$, soit $f_n : x\in\left]0,+\infty\right[\mapsto \dfrac{2\,\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{e}^{nx}-1}$ et sous réserve d'existence, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I_n existe.
2. Montrer que $I_n=2\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{sh}(x)\mathrm{e}^{-knx}\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{4k^2-1}$.

Exercice 4.37 (CCINP 2023)

Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}\,\mathrm{d}t$ et en donner la valeur.

Exercice 4.38 (IMT 2023)

On recherche les fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant (1) :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t=1+x.$$

1. Trouver toutes les solutions de (1) développables en série entière au voisinage de 0 .
2. Montrer que, si f vérifie (1), alors elle est de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifie $(E) : y''+y=0$.
3. Résoudre (E).
4. À l'aide du théorème de Cauchy, trouver toutes les solutions de (1).

Exercice 4.39 (Centrale 2023)

1. Montrer le théorème d'intégration des séries uniformément convergentes sur un segment.
2. Pour $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b,\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ de classe C^1 et $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ continue, on pose $\displaystyle\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$.
Même définition lorsque f est à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note, pour $r>0,\gamma_r : t\in[0,2\pi]\mapsto re^{it}$. Soit $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini.
Soient $a\in\mathbb{C}$ et $r>|a|$. Montrer que $f(a)=\dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_r}\frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z$.

3. En déduire, pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et pour r assez grand (à préciser), l'égalité $\exp(M) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{\gamma_r} e^z\,(zI_n - M)^{-1}\,\mathrm{d}z$.

Exercice 4.40 (Centrale 2023, le théorème de Bohr-Mollerup)

1. Pour quel réel x l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ? On notera $\Gamma(x)$ sa valeur.
2. Montrer que :
   (a) pour tout réel $x > 0$, $\Gamma(x) > 0$
   (b) pour tout réel $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$,
   (c) $\Gamma(1) = 1$,
   (d) $\ln\circ\Gamma$ est convexe
3. Montrer que si $f : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R}$ vérifie les quatre points précédents, alors $f = \Gamma$.
   Indication : pour $x \in\,]0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, remarquer que $\ln(n) \leqslant \dfrac{\ln\big(f(n+1+x)\big) - \ln\big(f(n+1)\big)}{x} \leqslant \ln(n+1)$.

Exercice 4.41 (Mines-Ponts 2022)

Soit $f \in \mathscr{C}\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}\right)$ dérivable en 0. On suppose que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

1. Soit $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2$.
   (a) Existence de $I(a,b) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x$.
   (b) Soit $\epsilon > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_\epsilon^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{b\epsilon}^{a\epsilon} \frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$. En déduire la valeur de $I(a,b)$.
2. Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ et de $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(2x) - \arctan(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.42 (Mines-Ponts 2022)

1. Montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3\sin(t)}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.
2. Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{t^3\sin(t)}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.
3. Donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_{n\pi}^{+\infty} \frac{t^3\sin(t)}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4.43 (Mines-Ponts 2022)

On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{1}{t\left(e^{\sqrt{t}} - 1\right)}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

1. Justifier cette définition. Montrer que f est C^∞ sur $]0, +\infty[$ et déterminer ses limites en 0 et $+\infty$.
2. Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+.
3. Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

4. Montrer que f est intégrable sur $]0,+\infty[$, puis calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 4.44 (Mines-Ponts 2019)

Montrer qu'il existe un unique réel x tel que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{e^t\,(1+t^x)}\,\mathrm{d}t = 0$.

Exercice 4.45 (Centrale 2018)

On considère une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue de carré intégrable et :

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right. .$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.
2. Que dire de $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}g(x)$?

   Indication : considérer $\displaystyle\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2$ pour $x > a > 0$.
3. Montrer que g est de carré intégrable.

Indications

4.5 1. Lorsque t est au voisinage de 1, $|\ln(1-t)|^\alpha = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$. Lorsque t est au voisinage de 0, $|\ln(1-t)|^\alpha \sim t^\alpha$.

2. TCD en dominant avec $n = 0$.

3. TTIT cas positif, puis changement de variable pour obtenir une réponse négative.

4.6 1. Changement de variable classique.

2. Factoriser $t^3 + 1$.

5. TCD en utilisant $|\sin(u)| \leqslant |u|$.

4.7 2. TCD en dominant avec $n = 1$.

3. Convergence possible avec le TSA. TCD sur la suite des sommes partielles.

4.8 1. TCD

2. $\tan' = 1 + \tan^2$

3. $\dfrac{1}{2n+1} = I_{2n} + I_{2n+2}$.

4. Théorème de la limite radiale avec le DSE de arctan.

4.9 1. Commencer par obtenir une relation de récurrence. On obtient $a_{n,p} = \dfrac{(-1)^p p!}{(n+1)^{p+1}}$.

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{a_{n,p}}=\frac{e}{(e-1)^2}$.
3. La sous-famille $\left(\dfrac{1}{a_{n,0}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est manifestement pas sommable.

4.16 2. Pour x suffisamment proche de 0, on a : $\forall t\in[a,b]\,,\, f(t)+xg(t)\geqslant 0$.

4.26 1. Avez-vous bien lu l'énoncé dans sa totalité ? La seule idée à retenir avec les intégrales semi-convergentes est de faire une intégration par parties pour se ramener à une fonction intégrable.

2. Montrer que la série $\displaystyle\sum\int_0^{\pi}\frac{(u+k\pi)\sin u}{1+(u+k\pi)^2}\,\mathrm{d}u$ diverge en minorant son terme général.

5 Normes et topologie

Les points importants

- Normes. Équivalence (ou non) des normes. Exemples classiques de normes sur $\mathbb{R}[X]$, sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.
- Caractérisations des ouverts, fermés. Image réciproque d'un ouvert/fermé par une application continue.
- Exemples classiques d'ouverts, de fermés.
- Continuité d'une application linéaire. Norme subordonnée.
- Compacts. Image d'un compact par une application continue. Applications aux fonctions numériques.
- Espaces vectoriels normés de dimension finie : continuité automatique des applications linéaires, équivalence des normes.

Les erreurs fréquentes

Rapport du jury CCINP

La topologie est un point faible même si on note des progrès depuis trois sessions. Même si la topologie reste une discipline abstraite et les examinateurs en sont conscients, on note un réel effort de la part des candidats. Et, comme les exercices proposés sont souvent des démonstrations de cours ou des applications quasi-immédiates du cours, les efforts fournis par les candidats sont globalement payants. Cela dit, certains candidats restent tout de même confrontés, malgré leur bonne volonté, à des soucis de rigueur : mauvaise manipulation des quantificateurs, mélanges fréquents entre implication et équivalence...

Exercice 5.1 (IMT 2024)

On munit l'espace $E=\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme sup $\|\cdot\|_\infty$.

Pour f dans E, on définit la fonction $u(f)$ sur $[0,1]$ par $u(f)(x)=\displaystyle\int_0^1 \inf(t,x)f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que u est un endomorphisme continu de E.
2. Déterminer $|||u|||$.

Exercice 5.2 (IMT 2024, 2023)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E^{\mathbb{N}}$ une suite telle que, pour tout vecteur $x\in E$, la suite $(\|x-u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une valeur d'adhérence.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 5.3 (Navale 2024)

Soit $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on note $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f|$. Une suite (f_n) d'éléments de E est dite de Cauchy si : $\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall p,q \geqslant n, N_1(f_p - f_q) \leqslant \varepsilon$.

1. Vérifier que N_1 est bien une norme sur E.
2. Prouver que toute suite convergente au sens de N_1 est de Cauchy.
3. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$. Montrer que (f_n) est de Cauchy. Converge-t-elle au sens de N_1 ?

Exercice 5.4 (IMT 2024)

Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ associé à A dans une base $(e_1,\dots,e_n)$. Soit $t > 0$. On note $\mathscr{B}$ la base $\left(\dfrac{e_1}{t},\dots,\dfrac{e_n}{t^n}\right)$.

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
2. Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathrm{Sim}(N)$ la classe de similitude de N. Montrer que la matrice N est nilpotente si et seulement si la matrice nulle est dans l'adhérence de $\mathrm{Sim}(N)$.

Exercice 5.5 (IMT 2024)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. À quelle condition sur $a \in \mathbb{R}$ la suite $(a^n A^n)$ converge-t-elle vers une limite non nulle ?

Exercice 5.6 (CCINP 2023)

On note $E = \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in E$ d'écriture développée $P = \displaystyle\sum_{k\geqslant 0} a_k$ pose $\|P\| = \sup_k |a_k|$.

1. Montrer que $\|\ \|$ est une norme de E.
2. Soit $b \in \mathbb{C}$, on souhaite étudier la continuité de l'application $f : P \in E \mapsto P(b) \in \mathbb{C}$.
3. Montrer que, si $|b| < 1$, alors f est continue.
4. Étudier la continuité de f si $|b| = 1$ en utilisant la suite de polynôme $(P_n)_{n\geqslant 0}$, où, pour $n \in \mathbb{N}$:
$$P_n = \sum_{k=0}^{n} \bar{b}^k X^k$$
5. Montrer que, si $|b| > 1$, alors f n'est pas continue.

Exercice 5.7 (IMT 2023)

Soient E un espace euclidien et $\mathscr{K}$ l'ensemble des projecteurs orthogonaux de E. Soit p un projecteur.

1. Montrer que : $p \in \mathscr{K} \Leftrightarrow \forall x \in E, \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.
2. Montrer que $\mathscr{K}$ est un compact.

Exercice 5.8 (IMT 2023)

On note E l'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telles que $f(0)=0$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \left\|f+f'\right\|_\infty$ et $N'(f) = \|f\|_\infty + \left\|f'\right\|_\infty$.

1. Montrer que N et N' sont des normes sur E.
2. Montrer que N et N' sont équivalentes.

   Indication : Exprimer f en fonction de $g = f + f'$ en considérant l'équation différentielle $y' + y = g$.

Exercice 5.9 (IMT 2023)

Soit E le plan euclidien.

1. L'ensemble $\mathscr{H} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y^2 - x^2 = 1\right\}$ est-il un fermé de E ?
2. Donner la définition d'une partie connexe par arcs.
3. Montrer que le cercle de centre 0 et de rayon 1 est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
4. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que l'image par f d'une partie connexe par arcs, fermée et bornée est un segment.

Exercice 5.10 (CCINP 2022)

Soient $(E, \|\|)$ un espace normé, F un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. On suppose qu'il existe $r > 0$ et $x_0 \in E$ tels que $B_0(x_0, r) \subset F$. Montrer que, pour tout $y \in E$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$ tels que $\alpha x_0 + \beta y \in B_o(x_0, r)$. En déduire que $F = E$.
3. On suppose ici que $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathscr{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathscr{N}$ est fermé et d'intérieur vide. Montrer que Vect $\mathscr{N}$ est d'intérieur vide. *Ind. Trouver une contradiction en considérant I_n.*

Exercice 5.11 (IMT 2022)

Pour $f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, on pose $N(f) = \sup\left\{\left|\int_0^1 f(t)t^n \,\mathrm{d}t\right| ; n \in \mathbb{N}\right\}$. Montrer que N est une norme sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Comparer N et $\|\|_\infty$.

Exercice 5.12 (IMT 2022)

On pose pour tout l'exercice $E = \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

1. Donner les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur E.
2. Justifier oralement, en ne donnant que les arguments importants, que $\|\cdot\|_1$ est une norme.
3. Montrer que si $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge au sens de $\|\cdot\|_\infty$, alors elle converge au sens de $\|\cdot\|_1$.
4. Les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 5.13 (Mines-Ponts 2021)

Existe-t-il une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) = N(A)N(B)$?

Exercice 5.14 (CCINP 2019)

Soit $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes et $E = \mathbb{C}[X]$. On définit sur E une application N_λ par :

$$N_\lambda(P) = \sum_{k=0}^{m} |\lambda_k a_k| \text{ pour tout } P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k.$$

1. Déterminer une CNS sur la suite λ pour que N_λ soit une norme sur E.
2. Soit $\left(\beta_n\right)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes telle que N_β soit une norme. Déterminer une CNS sur λ et β pour que N_λ et N_β soient équivalentes.
3. Existe-t-il une norme N_λ telle que la fonction $g : P \mapsto P'$ soit continue ?

Exercice 5.15 (Mines-Ponts 2023)

Soient $L^1(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des suites sommables et $N : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|$.

1. Montrer que N est une norme.
2. Soit A l'ensemble des suites de $L^1(\mathbb{R})$ nulle à partir d'un certain rang. Donner l'adhérence et l'intérieur de A.

Exercice 5.16 (Mines-Ponts 2023)

On munit $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\| \ \|_\infty$.

Si $f \in E$, on pose $u(f) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k f\left(\frac{1}{k}\right) \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que u est bien définie sur E.
2. Montrer que u est continue sur E et déterminer sa norme subordonnée.

Exercice 5.17 (Mines-Ponts 2023)

1. Soient f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et N une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalence entre :
   (i) $|f(x)| \to +\infty$ lorsque $N(x) \to +\infty$;
   (ii) l'image réciproque de tout compact par f est un compact.
2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que l'image réciproque de tout compact par f est un compact. Montrer que l'image directe de tout fermé par f est un fermé.
3. La réciproque du résultat précédent est-elle vraie ?

Exercice 5.18 (Mines-Ponts 2023)

Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p\right)$. Montrer que f est surjective si et seulement si l'image de tout ouvert par f est un ouvert.

Exercice 5.19 (Centrale 2023)

Soient (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés.

Soit $d \in \mathbb{N}$. Pour $P(X) = p_0 + p_1 X + \cdots + p_d X^d \in \mathbb{R}_d[X]$ on pose $\|P\| = \max(|p_0|, \ldots, |p_d|)$.

1. Vérifier que l'application $\| \ \|$ est une norme sur $\mathbb{R}_d[X]$.
2. (a) Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, convergeant vers $\ell \in E$.

   Montrer que l'ensemble $Y = \{y_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

   (b) Soit $f : E \to E'$ continue telle que, pour tout compact K de E', $f^{-1}(K)$ est un compact de E. Montrer que, si F est un fermé de E, alors $f(F)$ est un fermé de E'.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$ est une racine de P telle que $|x| > 1$, alors $|x| \leqslant \|P\| + 1$. En déduire que l'ensemble des polynômes unitaires et scindés de $\mathbb{R}_d[X]$ est fermé dans $\mathbb{R}_d[X]$.

Exercice 5.20 (Centrale 2023)

Soit $(E, \| \ \|)$ un espace vectoriel normé. Pour $A \subset E$ non vide et $x \in E$, on note $d(x, A) = \inf\{\|x - a\|, a \in A\}$.

1. On suppose A fermé. Soit $x \in E$. Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si $x \in A$.
2. Soient $F \subsetneq E$ un sous-espace vectoriel fermé de E et $\delta \in]0, 1[$. Montrer qu'il existe $x \in E$ unitaire vérifiant $d(x, F) \geqslant \delta$.
3. On suppose E de dimension infinie et on admet que les sous-espaces vectoriels de dimension finie sont fermés. Montrer que la sphère unité n'est pas un compact de E.

Indications

5.1 1. Penser à montrer que $u(f)$ est continue en utilisant le théorème de continuité des intégrales à paramètre. Pour la continuité de u, trouver une constante de Lipschitz.

2. Montrer que $\frac{1}{2}$ est la plus petite constante de Lipschitz de u.

5.2 1. Vu le théorème de Bolzano-Weierstrass, il suffit de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

2. Vu que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes dans un compact, il suffit de montrer qu'elle a une unique valeur d'adhérence.

5.3 3. • Si $q > p$, alors $N_1(f_q - f_p) = \sum_{k=p+1}^{q} \frac{1}{k(k+1)} \leqslant \sum_{k=p+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

- Raisonner par l'absurde en supposant que (f_n) converge vers une fonction $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ pour N_1 : $N_1(f_n - f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

  Appliquer le théorème de convergence dominée sur $[0, 1[$ pour obtenir $\int_0^1 |-\ln(1-t) - f(t)| \, \mathrm{d}t = 0$. Utiliser le théorème des intégrales nulles, puis obtenir une contradiction avec la continuité de f en 1.

5.4 1. Par un remplissage direct ou en utilisant des matrices de passage. Etre efficace !

2. Introduire l'endomorphisme f canoniquement associé à N.

- Si f est nilpotente, introduire une base qui trigonalise f et utiliser la question précédente.
- Si la matrice nulle est dans l'adhérence de $\mathrm{Sim}(N)$, utiliser la continuité de $\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ M & \mapsto & \chi_M(X) \end{array}\right.$.

5.5 Après diagonalisation de $A \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$, tout est plus clair.

5.11 Penser au théorème de Weierstrass pour la séparation.

5.13 Dans le cas $n \geqslant 2$, penser aux matrices nilpotentes.

5.14
1. Montrer que N_λ est une norme si, et seulement si, $\forall n \in \mathbb{N}, \lambda_n \neq 0$.
2. Montrer que N_λ et N_β sont équivalentes si, et seulement si, il existe des réels $a > 0$ et $b > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, a \leqslant \left|\dfrac{\lambda_n}{\beta_n}\right| \leqslant b$.
3. Oui une telle norme existe ... on peut choisir convenablement λ pour que N_λ convienne.

5.15 Remarquer que A est dense dans $L^1(\mathbb{R})$.

5.19 2.(a) Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'éléments de Y et soit A l'ensemble de ses termes. Dans les deux cas A fini et A infini, on peut construire une suite extraite de $(x_n)_{n\geqslant 0}$ qui converge vers un élément de Y.

6 Calcul différentiel, équations différentielles

Les points importants

- Savoir trouver la différentielle d'une application.
- Lien avec les dérivées partielles. Gradient, dérivées directionnelles.
- Caractérisation d'un point extrémal sur un ouvert.
- Savoir si un point critique est, ou non, un point extrémal.
- Le théorème de Cauchy linéaire.
- La méthode de variation de la, ou des, constante(s).

Les erreurs fréquentes

Rapport du jury CCINP

Fonctions de plusieurs variables

Cette partie du programme est très mal maîtrisée par les candidats. On constate que quasiment aucun candidat n'est capable, par exemple, de prouver qu'une fonction à deux variables admet une dérivée partielle par rapport à une de ses deux variables en un point particulier. C'est regrettable car le contenu de ce chapitre du programme est restreint et les exercices proposés dans la banque sur cette partie restent basiques. Ils demandent juste une bonne connaissance des définitions et théorèmes du cours qui sont peu nombreux.

Rapport du jury CCINP

Equations différentielles

- *Problèmes de raccords des solutions survolés et non compris parfois.*
- *Manque de technicité dans la recherche de primitives. De ce fait, les candidats sont souvent pénalisés dans leur résolution.*

  Rappelons par exemple que pour intégrer une fraction rationnelle, il est souhaitable de penser à la décomposer en éléments simples.
- *Méconnaissance fréquente de la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle.*

Calcul différentiel

Exercice 6.1 (CCINP 2024)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f définie par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(x,y) = \frac{2x^2 + xy^2 + 6x^2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^a}$$

1. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $(0,0)$?

Dans la suite, on suppose avoir prolongé f par continuité en $(0,0)$.

2. La fonction f possède-t-elle des dérivées partielles en $(0,0)$?
3. Étudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

Exercice 6.2 (IMT 2024)

Étudier les extrema sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction $(x,y) \mapsto x^4 + y^4 + 4xy + 1$.

Exercice 6.3 (CCINP 2023)

$E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est muni d'une norme sous-multiplicative $\| \ \|$.

1. Soit $H \in E$ tel que $\|H\| < 1$; montrer que $I_n - H$ est inversible, d'inverse $\sum_{n=0}^{+\infty} H^n$.
2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans E.
3. Soit

$$f : \left| \begin{array}{ccc} GL_n(\mathbb{R}) & \to & GL_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^{-1} \end{array} \right. .$$

   (a) Montrer que f est différentiable en I_n et que $\mathrm{d}f(I_n)(H) = -H$

   (b) Montrer que f est différentiable en tout point de E (on remarquera que $(M+H)^{-1} = \left(M\left(I_n + M^{-1}H\right)\right)^{-1}$)

Exercice 6.4 (CCINP 2023)

On note, pour tous réels x et y : $f(x,y) = y^2 \sin(x/y)$ si $y \neq 0$ et $f(x,0) = 0$.

1. On pose $X_0 = (x_0, 0)$ où $x_0 \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que f est continue en X_0.

   (b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. On considère $X_1 = \left(x_1, y_1\right) \in \mathbb{R}^2$ avec $y_1 \neq 0$.

   (a) Calculer les dérivées partielles de f en X_1.

   (b) f est-elle différentiable en X_1 ? Si oui, donner la différentielle de f en X_1, puis en $(0,1)$.

3. Calculer les dérivées partielles de f en X_0. Si on suppose que f est différentiable en X_0, que vaut sa différentielle ?
4. f est elle-différentiable sur $\mathbb{R}^2$? De classe C^1 ?

Exercice 6.5 (CCINP 2023)

1. Déterminer les extrema de $f : (u, v) \in [0, 1]^2 \mapsto uv(1 - u - v)$.

2. Soit (A, B, C) un triangle d'aire égale à 1 . Soit M un point dans le triangle. Maximiser le produit des distances de M aux côtés du triangle.

Exercice 6.6 (CCINP 2023)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto A^T A$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que, pour $H \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{d}f_{I_n}(H) = H^T + H$.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}\left(\mathrm{d}f_{I_n}\right)$.

3. En déduire que l'espace tangent à $\mathscr{O}_n(\mathbb{R})$ en I_n est $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6.7 (CCINP 2022)

On considère $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y > 0\right\}$. Soit $\phi : \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \Omega \\ (x, y) & \mapsto & \left(xy, \dfrac{x}{y}\right) \end{array} \right.$.

1. Montrer que ϕ est bijective et déterminer ϕ^{-1}.

2. On pose $(u, v) = \phi((x, y))$ et $f(x, y) = F(u, v)$.
   Exprimer $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$ en fonctions des dérivés partielles de F.

3. Déterminer les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions de :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - 2f(x, y) + 2 = 0.$$

4. Déterminer les fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} - y^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = 0$$

Exercice 6.8 (IMT 2022)

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue, positive et telle que $\left|f(x)\right| \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} 0$. Montrer que f admet un maximum global sur $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer les extremums locaux et globaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \left(x^2 + 2y^2\right)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

Exercice 6.9 (CCINP 2019)

Déterminer les fonctions f de classe C^1 sur $\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0\right\}$ vérifiant l'équation aux dérivées partielles :

$$(E) : \qquad x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -x^2 - y^2.$$

On pourra passer en coordonnées polaires $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$.

Exercice 6.10 (Mines-Ponts 2021)

Montrer que les fonctions f de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, 2xy\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+(1+y^2)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$$

sont les applications de la forme $f:(x,y)\mapsto g\left(\frac{x}{1+y^2}\right)$ où $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une application de classe C^1.

Exercice 6.11 (CCINP 2021)

On considère l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $\langle .,.\rangle$. Soit u un endomorphisme symétrique de E dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.

1. Montrer que pour tout vecteur x non nul de E :
$$\langle u(x),x\rangle>0.$$
2. Soient b un vecteur de E et $f:E\to\mathbb{R}$ l'application définie par :
$$\forall x\in E, f(x)=\langle u(x),x\rangle-\langle b,x\rangle.$$
   (a) Soit $x\in E$. Montrer que f est différentiable en x et que :
   $$\forall h\in E, \mathrm{d}f(x).h=\langle 2u(x)-b,h\rangle.$$
   (b) Déterminer le vecteur gradient de f en x.

   (c) Montrer que f admet un unique point critique.

   (d) Montrer que f admet un minimum global.

Exercice 6.12 (Centrale 2023)

1. Soient E un espace euclidien, U un ouvert de E, et $f:U\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Rappeler la définition de la différentielle $\mathrm{d}f(a)$ de f en $a\in U$ et du gradient $\nabla f(a)$, ainsi que l'expression de $\nabla f(a)$ en base orthonormale.
2. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

   Montrer que $\nabla(\det)(A)=\mathrm{Com}(A)$.
3. Quel est le coefficient de X dans χ_A ?
4. Déterminer l'espace tangent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ en I_n.

Exercice 6.13 (Mines-Ponts 2023)

1. Soient $a\in\mathbb{R}^n$ et $\varphi:x\mapsto\langle a,x\rangle$. Déterminer le gradient de φ.
2. Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ continue telle que $f(x)\xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{}+\infty$. Montrer que f admet un minimum.
3. Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose que $\dfrac{f(x)}{\|x\|}\xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{}+\infty$. Montrer que $x\mapsto\nabla f(x)$ est surjective.

Exercice 6.14 (Centrale 2023)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique $(A,B) \mapsto \mathrm{tr}\left(A^T B\right)$ et de la norme euclidienne associée N.

1. Montrer que $N(AB) \leqslant N(A)N(B)$ pour tout $(A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$.
2. Montrer qu'il existe un réel $\alpha \geqslant 0$ tel que :
$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), |\mathrm{tr}(A)| \leqslant \alpha N(A).$$
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $f : M \mapsto \left(\mathrm{tr}(M), \mathrm{tr}\left(M^2\right), \dots, \mathrm{tr}\left(M^n\right)\right)$ est différentiable et déterminer sa différentielle en tout point.
4. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{rg}\left(\mathrm{d}f(M)\right)$ est égal au degré du polynôme minimal de M.
5. En déduire que l'ensemble $\left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \chi_M = \pi_M\right\}$ est un ouvert de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 6.15 (Mines-Ponts)

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ différentiable telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}f_x$ soit injective, et vérifiant $\left\|f(x)\right\| \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} +\infty$, où $\|\|$ est la norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Le but de cet exercice est de montrer que f est surjective. On considère pour cela $a \in \mathbb{R}^n$ et $g : x \mapsto \left\|f(x) - a\right\|^2$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, déterminer $\mathrm{d}g_x$.
2. Montrer que g atteint sa borne inférieure.
3. Conclure.

Equations différentielles

Exercice 6.16 (CCINP 2024)

On considère l'équation différentielle :
$$(E) : \; x(x+2)y' + (x+1)y - 1 = 0$$

1. Calculer la dérivée de $x \longmapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ sur $]1, +\infty[$.
2. Résoudre (E) sur $]0, +\infty[$.
3. Chercher les séries entières dont la somme est solution de (E) sur l'intervalle ouvert de convergence ?
4. Résoudre (E) sur $[0, +\infty[$.

Exercice 6.17 (CCINP 2024)

On considère le système différentiel $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & z + \cos(t) \\ y' & = & y + 3\mathrm{e}^{2t} \\ z' & = & x + \sin(t) \end{array}\right.$.

1. Résoudre le système différentiel précédent.
2. Déterminer les solutions pour lesquelles x et z sont bornées et $x(0) = z(0)$.

Exercice 6.18 (CCINP 2024)

On considère l'équation différentielle : $(E) : y' - 2xy = 1$.

1. Montrer qu'il existe une unique solution développable en série entière vérifiant $y(0) = 0$.

2. Résoudre sous forme intégrale le problème de Cauchy $\left(y' - 2xy = 1, y(0) = 0\right)$.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\binom{n}{k} = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$.

Exercice 6.19 (CCINP 2024)

Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et bornée. Montrer que l'équation différentielle $x' - ax = h$ a une unique solution bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6.20 (CCINP 2024)

Soient $(E) : x^{(3)} + 2x'' - x' - 2x = 0$ et G l'ensemble des solutions de (E).

1. Montrer que $G \subset \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Soit $\Delta : f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mapsto f'$.

2. Déterminer un polynôme P tel que $G = \operatorname{Ker} P(\Delta)$.

3. Montrer que $G = \operatorname{Ker}\left(\Delta^2 - \mathrm{id}\right) \oplus \operatorname{Ker}(\Delta + 2\mathrm{id})$.

4. Résoudre (E).

Exercice 6.21 (CCINP 2024)

Soient $E = \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, P (resp. I) le sous-espace des fonctions paires (resp. impaires) de E.

1. Montrer que $E = P \oplus I$.

2. Résoudre l'équation différentielle $y'' - y = \operatorname{ch} x$.

3. Trouver les fonctions $f \in E$ telles que $f''(x) - f(-x) = \operatorname{ch} x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.22 (IMT 2024)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Sans calcul, montrer que A est diagonalisable.

2. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

3. Résoudre le système différentiel $X' = AX$.

Exercice 6.23 (IMT 2023)

1. Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) + f'(x) = e^{-x}$. Montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

2. Plus généralement, montrer que si $f(x)+f'(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 6.24 (IMT 2023)

On recherche les fonctions continues $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ vérifiant (1) :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)+\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = 1+x.$$

1. Trouver toutes les solutions de (1) développables en série entière au voisinage de 0 .
2. Montrer que, si f vérifie (1), alors elle est de classe $\mathscr{C}^2$ et vérifie $(E): y''+y=0$.
3. Résoudre (E).
4. À l'aide du théorème de Cauchy, trouver toutes les solutions de (1).

Exercice 6.25 (IMT 2023)

Soit (1) l'équation différentielle $xy'+y=\mathrm{e}^x$.

1. Trouver les solutions de (1) développables en série entière au voisinage de 0 .
2. Les solutions de (1) sur $]0,+\infty[$ sont-elles toutes développables en série entière au voisinage de 0 ?
3. Résoudre (1) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Discuter suivant I.
4. On ajoute à l'équation (1) la condition $y(x_0)=y_0$ (avec $x_0, y_0\in\mathbb{R}$) pour obtenir un problème numéroté (2). Que dit le théorème de Cauchy à propos du problème (2) si on travaille sur $]0,+\infty[$? Résoudre (2).
5. Représenter graphiquement la ou les solutions développables en série entière.

Exercice 6.26 (CCINP 2023)

On recherche les fonctions $x, y, z, u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant le système $\begin{cases} x'=x+2y-2z \\ y'=x-y+u \\ z'=x-z+u \\ u'=2y-2z+u \end{cases}$.

On note $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de f.
2. Justifier avec un minimum de calcul que f n'est pas diagonalisable.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f vaut $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Résoudre le système différentiel.

Exercice 6.27 (CCINP 2023)

On définit la suite réelle (I_n) par : $I_0 = I_1 = 1$ et $\quad \forall n \geqslant 2 \quad I_n = I_{n-1} + (n-1)I_{n-2}$.

Soit $f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{I_n}{n!} x^n$.

1. Montrer que le rayon de convergence R vérifie $R \geqslant 1$.
2. Donner une équation differentielle vérifiée par f.
3. Donner l'expression de f, le rayon de convergence, exprimer I_n.

Exercice 6.28 (CCINP 2023)

Soit $(E) : \left(1-x^2\right) y' - xy = f(x)$.

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E) sur $]-1,1[$.
2. Soit $h : x \mapsto \sqrt{1-x^2} - \arccos x$.

   Démontrer que h est dérivable et calculer h'.
3. Résoudre (E) sur $]-1,1[$ pour $f(x) = 1-x$.
4. Montrer que s'il existe une solution de (E) sur $[-1,1]$, alors $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\mathrm{d}t = 0$.
5. Soit $f(x) = ax + b$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

   Montrer qu'il existe une solution de (E) sur $[-1,1]$ si, et seulement si, $b = 0$.

Exercice 6.29 (IMT 2023)

Soit A une matrice symétrique définie positive de taille n. On se donne une solution non nulle $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de l'équation différentielle $X'(t) = AX(t)$. N désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$.

1. Donner la forme générale des solutions.
2. Montrer que pour tout $r > 0$, il existe un unique $t \in \mathbb{R}$ tel que $N(X(t)) = r$.

Exercice 6.30 (CCINP 2022)

On considère l'équation différentielle $(E) : 4xy" + 2y' - y = 0 \quad (E)$.

1. Trouver l'unique solution développable en série entière à l'origine respectant la condition $y(0) = 1$. On exprimera cette solution à l'aide des fonctions usuelles.
2. Résoudre l'équation (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ à l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x}$.
3. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6.31 (IMT 2022)

On considère l'équation : $y'' + 2y' + 4y = xe^x \quad (E)$.

1. Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

2. Trouver une solution particulière de (E) puis donner l'ensemble de toutes les solutions de (E).

Exercice 6.32 (CCINP 2021)

Soit l'équation différentielle $(E) : (x^2 - 4x)y' + (2 - x)y = 4$.

1. Trouver une solution de (E) sous la forme polynomiale.

2. Résoudre sur (E) sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[,]0, 4, [$ et $]4, +\infty[$.

3. Trouver les solutions de (E) sur $]-\infty, 4[,]0, +\infty[$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 6.33 (Centrale 2023)

Soient $E = \mathscr{C}^\infty([0,\pi],\mathbb{R})$ et $F = \{f \in E, f(0) = f(\pi) = 0\}$. Soient $\phi, q \in E$, la fonction q étant positive. On note α une primitive de ϕ. On pose $D(y) = y'' + \phi y' - qy$ et $I(y) = -e^\alpha D(y)$ pour tout $y \in E$, et $\langle y, z\rangle = \int_0^\pi y(x)L(z)(x)\mathrm{d}x$ pour tous $y, z \in F$.

1. Rappeler le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles scalaires d'ordre 2.

2. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur F.

3. Soit $h \in E$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f_0 \in F$ telle que $D\left(f_0\right) = h$.

Exercice 6.34 (Mines-Ponts 2023)

On considère l'équation différentielle : $y'' - y = |\cos(x)|$.

Existe-t-il des solutions positives ? Bornées ? Positives et bornées ?

Exercice 6.35 (Mines-Ponts 2023)

Soient a et b deux fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ et S l'ensemble des solutions de $y' = ay + b$. Montrer l'équivalence entre :

(i) tous les éléments de S sont bornées (ii) a et b sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6.36 (Mines-Ponts 2023)

Trouver les fonctions y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = y(\pi - x)$.

Exercice 6.37 (Mines-Ponts 2023)

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note (S) le système différentiel :

$$\forall p \in [\![1,n]\!], x_p^{(m)} = \sum_{q=1}^{n} a_{p,q} x_q(t).$$

Montrer que A est nilpotente si, et seulement si, toutes les solutions de (S) sont polynomiales.

Indications

6.1 1. Si f admet une limite finie l en $(0,0)$, alors nécessairement $l = \lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$. En passant en coordonnées polaires, montrer que f admet 0 comme limite en $(0,0)$ si, et seulement si, $a < 1$.

2. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ existe si, et seulement si, $\dfrac{1}{2} < a < 1$.

3. Si f est différentiable en $(0,0)$, alors nécessairement $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent, et $\mathrm{d}f(0,0)$ est la forme linéaire $(\alpha,\beta) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\beta$.

6.10 Pour le sens difficile, considérer le changement de variables $\alpha = \dfrac{x}{1+y^2}$ et $\beta = y$.

6.18 1. Réponse : $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n} n!}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

2. Réponse : $x \mapsto e^{x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

3. Produit de Cauchy et unicité du développement en série entière.

6.19 La forme générale des solutions est $t \mapsto e^{at}\left(\lambda + \displaystyle\int_0^t e^{-au} h(u)\,\mathrm{d}u\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

En appliquant soigneusement un théorème d'intégration des relations de comparaison, $\displaystyle\int_0^t e^{-au} h(u)\,\mathrm{d}u \underset{t\to+\infty}{=} O\left(e^{-at}\right)$.

6.21 2. Utiliser le principe de superposition. Le cours de MPSI indique qu'il existe une solution de $y'' - y = e^x$ sous la forme $x \mapsto Cxe^x$ où C est une constante.

3. Procéder par analyse-synthèse. Si $f = \underset{\in P}{p} + \underset{\in I}{i}$, alors $x \mapsto f''(x) - f(-x)$ est la fonction $\underbrace{p'' - p}_{\in P} + \underbrace{i'' + i}_{\in I}$.

6.32 1. S'il existe une solution polynomiale, on montre qu'elle est nécessairement de degré 1 en considérant son coefficient dominant. Au final, $x \mapsto -x + 2$ convient.

2. $x \mapsto -x + 2 + C\sqrt{|x(x-4)|}$.

7 Probabilités

Les points importants

- Propriétés d'une probabilité : σ-additivité, sous-additivité, continuité (dé)croissante.
- Lois classiques, espérance, variance, fonction génératrice.
- Inégalités : Markov, Bienaymé-Tchebychev.
- Loi faible des grands nombres.
- Si X et Y sont indépendantes, $G_{X+Y} = G_X.G_Y$.
- Somme de lois de Poisson indépendantes.

Les erreurs fréquentes

Rapport du jury CCINP

Les exercices de probabilités permettent à l'examinateur d'évaluer les capacités de réflexion et d'expression du candidat. Globalement, les candidats ont préparé les exercices de probabilités de la banque. Cela dit, on constate, très souvent, que les explications orales qui accompagnent les résultats proposés pour les exercices de probabilités, comme la détermination d'une loi par exemple, ne sont pas toujours très claires. A tel point qu'il est souvent difficile de comprendre où le raisonnement du candidat est défaillant et de ce fait, il est difficile de l'aider à rectifier... Pourtant, Boileau disait « ce qui se conçoit bien s'énonce clairement et les mots pour le dire arrivent aisément ».

Enfin, de nombreux exercices de probabilités font appel au chapitre sur les séries et les soucis de vocabulaire et de techniques rencontrés dans ce registre se retrouvent dans les exercices de probabilités.

Rapport du jury CCINP

Quelques erreurs courantes relevées :

- *quand on demande la loi d'une variable aléatoire X, le premier point à préciser est l'ensemble des valeurs prises par cette loi, noté $X(\Omega)$. Très peu de candidats pensent à le préciser.*
- *Trop de candidats pensent que la loi de la somme des variables X et Y est donnée par $P(X+Y=n) = P((X=k)\cap(Y=n-k))$ ce qui n'a évidemment aucun sens.*
- *Il est vivement conseillé, quand on demande de trouver l'espérance ou la variance d'une variable aléatoire X, de regarder d'abord si X ne suit pas une loi connue dont on connaîtrait l'existence et la valeur de l'espérance et de la variance. Gain de temps assuré !! A condition bien sûr de connaître par cœur les espérances et les variances des lois au programme.*

Exercice 7.1 (IMT 2024)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Donner l'espérance de la variable $\dfrac{1}{X+1}$.
2. Donner la probabilité que X soit pair.

Exercice 7.2 (IMT 2024)

Soient X et Y, deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes deux une loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. On pose $M = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$.

1. Soit la variable aléatoire $Z = \mathrm{tr}(M)$. Donner la loi de Z.
2. Déterminer la probabilité p que la matrice M soit diagonalisable.

Exercice 7.3 (IMT 2024)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètres respectifs p et q. On note $Z = \dfrac{X}{Y}$.

1. Montrer que $Z \leqslant X$. Montrer que Z admet une espérance et une variance. Calculer $\mathbf{E}(Z)$
2. Donner la loi de Z.

Exercice 7.4 (IMT 2024)

Dans une urne comportant n boules numérotées de 1 à n, on tire trois boules simultanément et on note X le plus petit numéro tiré. Déterminer $X(\Omega)$ puis les probabilités $\mathbf{P}(X=1), \mathbf{P}(X=2), \mathbf{P}(X=n)$.

Exercice 7.5 (Navale 2024)

Les clients A_1, A_2 et A_3 arrivent à deux guichets au temps 0 . Le client A_3 doit donc attendre. On note X_i la durée de passage de A_i au guichet. On note aussi Y l'instant auquel A_1 ou A_2 libère son guichet et Z l'instant auquel A_3 part du guichet. Les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 sont indépendantes et suivent chacune la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Exprimer Y en fonction de X_1 et X_2. Déterminer la loi de Y.
2. Déterminer la loi de Z.
3. Calculer $\mathbf{E}(Z)$.

Exercice 7.6 (CCINP 2024)

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles admettant une variance. On introduit la matrice $S = \left(\mathrm{cov}\left(X_i, X_j\right)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ et l'application définie sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par : $\forall U = (u_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, f(U) = \dfrac{1}{\|U\|^2} \mathbf{V}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i\right)$.

1. Montrer que S est diagonalisable.

2. Prouver que pour tout $U \in \mathbb{R}^n, U^T SU = \mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i X_i\right)$.

3. On ordonne les valeurs propres de S dans l'ordre décroissant : $\lambda_n \leqslant \cdots \leqslant \lambda_1$. Soit $U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

   (a) Montrer que $U^T SU \leqslant \lambda_1 \|U\|^2$.

   (b) En déduire que $f(U) \leqslant \lambda_1$. Prouver que cette inégalité est une égalité si et seulement si U est un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ_1.

4. (a) Soit $a \in]0,1[$. On choisit ici $S = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$. Donner les valeurs propres de S.

   (b) En déduire $\max\limits_{U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} f(U)$ et donner les vecteurs U pour lesquels ce maximum est atteint.

Exercice 7.7 (CCINP 2024)

On répète une expérience qui consiste à lancer un ballon dans un panier. À chaque tentative il y a une probabilité $p \in]0,1[$ de réussir le lancer.

On note T le rang du premier succès ($+\infty$ si on ne réussit jamais).

1. Quelle est la loi de T ?

2. Quelle est la probabilité de ne jamais réussir ?

3. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et S_N la variable aléatoire comptant le nombre de lancers réussis au cours des N premiers lancers. Quelle est la loi de S_N ?

4. Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour une variable aléatoire discrète de variance finie.
   En déduire que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_N}{N} - p\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{4N\varepsilon^2}$.

Exercice 7.8 (IMT 2024)

On se donne trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 indépendantes, suivant la loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi de $Z = \min(X_1, X_2, X_3)$.

Exercice 7.9 (IMT 2024)

Soit $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+n+1}{n!} t^n$.

1. Donner le rayon de convergence R de cette série entière .

2. Calculer $S(t)$ sur $]-R, R[$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que, $\forall t \in [-1,1], G_X(t) = \lambda S(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Que vaut λ ?

4. Calculer $\mathbf{P}(X = n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

5. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 7.10 (Navale 2024)

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, indépendantes et suivant la même loi. On pose $U = X_1 + X_2$, $T = X_1 - X_2$, $Y_1 = X_1/U$ et $Y_2 = X_2/U$.

1. Montrer que Y_1 et Y_2 suivent la même loi.
2. Montrer que Y_1 et Y_2 admettent un moment à tout d'ordre et calculer $\mathbf{E}(Y_1)$ et $\mathbf{E}(Y_2)$.
3. Montrer que T/U admet un moment à tout d'ordre et calculer $\mathbf{E}(T/U)$.
4. Exprimer $\mathbf{V}(T/U)$ en fonction de $\mathbf{V}(Y_1)$.

Exercice 7.11 (Saint-Cyr 2024)

Une urne contient $2n$ boules : les n premières sont numérotées 0, les n autres sont numérotées de 1 à n. On tire une poignée de n boules. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable prenant la valeur 1 si la boule n° i figure dans la poignée, 0 sinon.

1. Modéliser X_i avec Python.
2. Soit $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi de X_i.
3. Calculer la covariance de X_i et X_j pour $i \neq j$.
4. On note S la variable aléatoire comptabilisant la somme des numéros des boules de la poignée. Exprimer S à l'aide des X_i, puis calculer son espérance.
5. Effectuer 100 simulations de tirages avec Python.

Exercice 7.12 (IMT 2023)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\left(X_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2 P\left(X_{i,j} = 1\right) = P\left(X_{i,j} = -1\right) = \frac{1}{2}$$

On considère la matrice M telle que $m_{i,j} = X_{i,j}$.

1. Calculer l'espérance de $\mathrm{Tr}(M)$.
2. Calculer l'espérance de $\det(M)$.
3. Calculer la probabilité pour que $\mathrm{rg}(M) = 1$.

Exercice 7.13 (IMT 2023)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(m_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments de $\mathbb{N}^*$ et $\left(p_i\right)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une famille d'éléments de $]\,0,1\,[$. On considère une famille de variables aléatoires X_i mutuellement indépendantes suivant la loi binomiale : $X_i \sim \mathscr{B}\left(m_i, p_i\right)$.
Montrer que $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi binomiale si et seulement si les p_i sont égaux.

Exercice 7.14 (IMT 2023)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p. Calculer l'espérance de X de trois manières différentes :

1. directement à partir de la loi de X ;
2. en utilisant la fonction génératrice de X ;
3. sans calcul, en interprétant la loi de X.

Exercice 7.15 (CCINP 2023)

Une personne sur une échelle est en train de peindre un bâtiment. La probabilité qu'un passant reçoive une goutte de peinture est $p \in]0,1[$. On note X (resp. Y) le nombre de passants ayant reçu une goutte de peinture (resp. n'ayant pas reçu de goutte.)

1. On suppose que n personnes sont passées. Donner les lois de X et de Y. Sont-elles indépendantes ?
2. On note à présent N le nombre de passants dans la journée. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Donner la loi de X et de Y. Donner l'espérance et la variance de X.
3. Montrer que X et Y sont indépendantes. Calculer $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

Exercice 7.16 (IMT 2023)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans I admettant une espérance. On suppose que $f(X)$ admet une espérance. Montrer que l'on a $f(\mathbf{E}(X)) \leqslant \mathbf{E}(f(X))$.

Exercice 7.17 (IMT 2023)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On pose $S = X + Y$.

1. Donner G_S en fonction de G_X et de G_Y.
2. On suppose que $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(m,p)$. Loi de S ?
3. On suppose que $X \sim \mathscr{P}(\lambda_1)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\lambda_2)$. Loi de S ?

Exercice 7.18 (IMT 2023)

On considère n tulipes qui ont chaque année chacune une probabilité $p \in]0,1[$ de fleurir, sachant que si une tulipe fleurit une année, elle fleurira toutes les années suivantes. La variable X_i désigne l'année de la première floraison de la tulipe numéro i, X l'année à partir de laquelle toutes les tulipes fleurissent.

1. Exprimer X en fonction des $(X_i)_{i\leqslant n}$.
2. Exprimer la loi des $(X_i)_{i\leqslant n}$.
3. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X > k)$. Montrer que X est d'espérance finie et calculer cette espérance.

Exercice 7.19 (CCINP 2023)

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2, \mathbf{P}(X=k, Y=\ell) = \frac{\alpha}{2^{k+\ell}}.$$

1. Trouver α. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer $G_X(t), \mathbf{E}(X), \mathrm{V}(X)$ et $\mathrm{cov}(X,Y)$.
3. Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et retrouver $\mathbf{E}(X)$.
4. On pose $Z = \min(X,Y)$. Déterminer la loi de Z.
5. Calculer $\mathbf{P}(X \geqslant Y)$.

Exercice 7.20 (CCINP 2023)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ puis X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$ dont la loi de couple est donnée par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2, \mathrm{P}(X=i, Y=j) = \lambda \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{1}{4^n}$.
2. Déterminer les lois marginales de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer l'espérance et la variance de X.
4. Soit $B = \left(b_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telle que $b_{i,j} = \mathrm{P}(X=i, Y=j)$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2$.
   (a) Justifier que B est diagonalisable.
   (b) En calculant B^2, déterminer les valeurs propres de B et donner la dimension des sous-espace propres associés.

Exercice 7.21 (CCINP 2023)

Soit X une variable aléatoire réelle discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit le taux de panne de X comme la suite (x_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \mathbb{P}(X=n \mid X \geqslant n)$. Soit $Y : \Omega \to \mathbb{N}^\star$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \mathbb{P}(Y=n) = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1. Montrer que la loi de Y est bien une loi de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^\star$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star, \mathbb{P}(X \geqslant n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(1-x_k)$.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, exprimer $\mathbb{P}(X=n)$ en fonction des x_k.
3. Déterminer les variables aléatoires réelles discrètes ayant un taux de panne constant.
4. Déterminer le taux de panne de Y.

Exercice 7.22 (CCINP 2023)

On dispose d'une urne contenant $n \in \mathbb{N}(n \geqslant 2)$ boules numérotées de 1 à n dans laquelle on effectue des tirages successifs avec remise. Soit X_n la variable aléatoire égale au rang d'obtention de la première boule différente de la première tirée.

1. Donner la loi de X_n.
2. Justifier que X_n admet une espérance finie et la calculer.
3. On note Y_n la variable aléatoire correspondant au rang où pour la première fois toutes les boules ont été tirées au moins une fois.
   (a) Donner la loi de Y_2.
   (b) Donner la loi de Y_3.

Exercice 7.23 (IMT 2023)

Soit $a \in]1, +\infty[$; on pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(X = n) = \frac{1}{\zeta(a) n^a}.$$

1. Montrer que X est bien une variable aléatoire discrète.
2. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $A_k = \left\{kp; p \in \mathbb{N}^*\right\}$. Calculer $P(X \in A_k)$.
4. Soit $(i, j) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2$; à quelle condition $(X \in A_i)$ et $\left(X \in A_j\right)$ sont-ils indépendants ?

Exercice 7.24 (IMT 2023)

On possède une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On réalise 2 tirages successifs sans remise. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro de la première boule tirée et Y celle correspondant au numéro de la seconde.

1. Donner la loi de X.
2. Donner la loi de Y.
3. Calculer $V(X), V(Y)$ et $V(X+Y)$.

Exercice 7.25 (IMT 2023)

On se place dans $A = \{1, \ldots, n\}$. On choisit F et G deux parties de A de manière équiprobable et indépendante. Soit $i \in A$.

1. Montrer que $P(i \in F) = \frac{1}{2}$.
2. Montrer que les événements $(i \in F)$ et $(j \in G)$ sont indépendants pour $j \neq i$.

Exercice 7.26 (IMT 2022, CCINP 2022, 2017)

Dans une urne, on dispose de n boules numérotées de 1 à n. On tire p boules simultanément. Les variables aléatoires X et Y représentent respectivement le maximum et le minimum des numéros tirés.

1. Montrer que
$$\sum_{k=p}^{n} \frac{k!}{(k-p)!} = \frac{(n+1)!}{(p+1)(n-p)!}$$

2. (a) Quel est le nombre de tirages différents ?

   (b) En déduire que la loi de X est donnée par
$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{p}{n!} \frac{k!(n-p)!}{k(k-p)!}$$

   (c) Déterminer l'espérance de X.

3. (a) Déterminer la loi de Y.

   (b) En déduire que $\mathbb{E}(Y) = \dfrac{n+1}{p+1}$.

Exercice 7.27 (IMT 2024,2023,2022)

On considère un meuble à 8 tiroirs, dans lequel il peut se trouver un objet avec la probabilité p. Lorsque cet objet est dans le meuble il a autant de chance de se trouver dans un tiroir que dans l'autre. On a ouvert 7 tiroirs du meuble sans trouver l'objet. Calculer la probabilité que l'objet soit dans le meuble.

Exercice 7.28 (IMT 2022)

Soient a et b deux entiers strictement positifs. Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On tire une poignée de n boules dans l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches dans la poignée.

1. Déterminer la loi de X.

On admet la formule suivante où $n \leqslant a+b$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n}.$$

2. Calculer l'espérance de X.

Exercice 7.29 (IMT 2023)

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini inclus dans $\mathbb{R}$.
On suppose que, pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbf{E}\left(X^k\right) = \mathbf{E}\left(Y^k\right)$. Montrer que X et Y suivent la même loi.

Exercice 7.30 (IMT 2022)

Soit a et n deux entiers naturels non nuls, on pose $N = an$. On dispose aléatoirement N boules dans n urnes. Soit Y la variable aléatoire donnant le nombre d'urnes vides. Déterminer l'espérance de Y et donner un équivalent de cette espérance quand n tend vers $+\infty$. Interpréter. *On pourra introduire des variables de Bernoulli judicieusement choisies.*

Exercice 7.31 (Mines-Ponts 2023)

On considère une urne remplie avec des boules numérotées de 1 à $2n$. On procède à une suite de tirages sans remise.

1. Calculer la probabilité que les boules impaires soient tirées exactement dans l'ordre $1, 3, \dots, 2n-1$.
2. Soit X la variable correspondant au nombre de tirages nécessaires pour obtenir toutes les boules impaires. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 7.32 (Mines-Ponts 2023)

On suppose que lorsqu'un enfant naît, il a une chance sur deux d'être un garçon. Dans une famille donnée, le nombre d'enfants est la variable aléatoire Z et le nombre de filles est X.

1. Montrer que : $\forall t \in [0,1], G_X(t) = G_Z\left(\dfrac{1+t}{2}\right)$.
2. Expliciter la loi de X si Z suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 7.33 (Centrale 2023)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Poisson de paramètre 1. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $T_n = \dfrac{S_n - n}{\sqrt{n}}$.

1. Déterminer la loi de S_n. Qu'en déduire sur T_n ?
2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{k\left(n^k - 1\right)}{(n+k)!}$ converge et calculer la somme.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(T_n \geqslant x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7.34 (Centrale 2023)

1. Rappeler les formules des probabilités totales et composées. On fixe $d \in \mathbb{N}^*$ et $(U_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $[\![1, d]\!]$. Soit $N_d = \inf\{n \geqslant 2, U_n \in \{U_1, \dots, U_{n-1}\}\}$.
2. Quelles sont les valeurs prises par N_d ?
3. Montrer que $\mathbf{P}(N_d > k) = \dfrac{d!}{d^k (d-k)!}$ pour tout $k \in [\![0, d]\!]$.
4. Pour tout réel $x > 0$, calculer $\displaystyle\lim_{d \to +\infty} \mathbf{P}\left(\frac{N_d}{\sqrt{d}} > x\right)$.

$\boxed{\textbf{Indications}}$

7.2 2. Montrer que M est diagonalisable ssi $X \neq Y$.

7.3 2. Utiliser l'écriture irréductible des irrationnels.

7.6 2. La covariance est une forme bilinéaire symétrique.

3.(a) Théorème spectral

7.8 Commencer par déterminer $P(X \geqslant n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

7.10 1. Remarquer que les couples (X_1, U) et (X_2, U) ont la même loi.

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Majorer $\left|Y_1^k\right|$ par un VAD d'espérance finie.

   Considérer ensuite $\mathbf{E}(Y_1 + Y_2)$.

4. Exprimer T/U en fonction de Y_1.

7.26 1. Le résultat étant donné, on peut procéder par récurrence.

2. Remarquer que la loi Y est la même que celle de $n+1-X$.

7.29 Quitte à introduire des valeurs prises avec une probablité nulle, on peut poser $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{t_1, \dots, t_n\}$. Reconnaître un système de Vandermonde.

7.30 Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, considérer la variable de Bernoulli V_i qui indique si l'urne numéro i est vide ou non.

7.32 1. Formule des probabilités totales et Fubini positif.

7.33 2. Introduire $f : x \mapsto \dfrac{e^x - \left(1 + x + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right)}{x^n}$ et considérer sa dérivée.

J'obtiens au final $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k\left(n^k - 1\right)}{(n+k)!} = (n-1)\left[e - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{i!}\right]$.

3. Commencer par écrire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(T_n \geqslant x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{\frac{k}{\sqrt{n}}}^{\frac{k+1}{\sqrt{n}}} \mathbf{P}(T_n \geqslant x)\,\mathrm{d}x$, puis se ramener à la somme de la question 2.

8 Algèbre

Les points importants

- Définitions précises des notions de groupe, anneau, corps, algèbre.
- Si $(G,.)$ est un groupe fini de cardinal n, alors $x^n = e$ pour tout élément x de G.
- Groupe des inversibles d'un anneau.
- Groupe et anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Propriétés.
- Définition et propriétés de l'indicatrice d'Euler. Méthode de calcul.
- Propriétés des morphismes de groupe.
- Corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- La notion d'idéal. Tout idéal de $\mathbb{K}[X]$ est principal.

Dénombrement

Exercice 8.1 (IMT 2024, applications idempotentes, Mines-Ponts 2022)

Soit E un ensemble. Une application p de E dans E est dite idempotente lorsque $p \circ p = p$.

1. Soit p idempotente sur E.
   (a) Que peut-on dire de p si p est injective ?
   (b) Que peut-on dire de p si p est surjective ?
   (c) Donner trois applications idempotentes sur un ensemble à 2 éléments, et dix sur un ensemble à 3 éléments.
2. On suppose ici que E est un ensemble à n éléments. Dénombrer les applications idempotentes sur E.

Groupes

Exercice 8.2 (IMT 2022)

1. Le groupe $(\mathbb{Z}/10\mathbb{Z})^\times$ est-il cyclique ?
2. Le groupe $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times$ est-il cyclique ?
3. Soient des entiers $p \geqslant 2$ et $q \geqslant 2$ premiers entre eux. Montrer que $\mathbb{Z}/pq\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ sont isomorphes.

Exercice 8.3 (CCINP 2021)

1. Soient $n, m \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m$.
2. $G = \bigcup_{n \geqslant 1} \mathbb{U}_n$ est-il un groupe multiplicatif?
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un polynôme T_n à coefficients entiers, de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(nx) = T_n(\cos(x)).$$

4. En déduire que $\dfrac{3+4i}{5}$ est un complexe de module 1 qui n'appartient pas à G.

Exercice 8.4 (TPE-EIVP 2016)

Soient E un ensemble et $(G,.)$ un groupe. Soit $\Phi : G \to E$ une bijection. Pour tout $x, y \in E$, on pose :

$$x \star y = \Phi\left(\Phi^{-1}(x).\Phi^{-1}(y)\right).$$

Montrer que $\star$ est une loi de groupe. Montrer que $(E,\star)$ et $(G,.)$ sont isomorphes.

Exercice 8.5 (IMT 2021)

Les groupes $(\mathbb{Z},+)$ et $(\mathbb{Q},+)$ sont-ils isomorphes ?

Exercice 8.6 (morphisme de groupes avec au départ un groupe cyclique, CCINP 2017)

Soient G et G' deux groupes notés multiplicativement. On suppose que le groupe G est cyclique engendré par un élément a.

1. Soit b un élément de G'. Montrer qu'il existe un morphisme $\varphi : G \to G'$ vérifiant $\varphi(a) = b$ si, et seulement si, b est d'ordre fini divisant celui de a.
2. Combien y-a-t-il de morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},+)$? et de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z},+)$ dans $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z},+)$?
3. Combien y-a-t-il de morphismes de groupes de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$ dans $\left(\mathbb{C}^*,\times\right)$?

Exercice 8.7 (Mines-Ponts 2023, 2022)

Soient p un nombre premier et $G_p = \left\{z \in \mathbb{C}^* \,|\, \exists n \in \mathbb{N}, z^{p^n} = 1\right\}$.

1. Montrer que G_p est un sous-groupe infini de $\mathbb{C}^*$.
2. Déterminer les sous-groupes de G_p.

Exercice 8.8 (Centrale 2023)

1. Soit G un groupe commutatif fini. Si a et b sont deux éléments de G d'ordre premiers entre eux, quel est l'ordre de ab ?
2. Soit G un groupe commutatif fini. Montrer qu'il existe un élément de G dont l'ordre est le ppcm des ordres des éléments de G.
3. Soit p un nombre premier. Montrer que le groupe $\mathbb{F}_p^*$ est cyclique.

Exercice 8.9 (Centrale 2022)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \left\{M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \,|\, M \text{ et } M^{-1} \text{ sont à coefficients dans } \mathbb{Z}\right\}$.

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients entiers. Montrer que $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det(M) \in \{1,-1\}$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Soient $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $d \in \mathbb{N}^*$ tels que $M^d = \mathrm{I}_n$. On pose $A = \dfrac{1}{3}(M - \mathrm{I}_n)$. Etudier la convergence de la suite $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer qu'il existe un entier K_n majorant le cardinal des sous-groupes finis de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

   Indication

   Etant donné un sous-groupe fini G de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, on pourra montrer que l'application $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ de réduction modulo 3 des coefficients induit une application injective de G dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$.

Anneaux

Exercice 8.10 (CCINP 2023)

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$ avec $a \wedge b = 1$. Montrer que, si a divise c et b divise c alors ab divise c.
2. Trouver une solution de $(*) : x \equiv 6[17]$ et $x \equiv 4[15]$.
3. Trouver toutes les solutions de (*).

Exercice 8.11 (IMT 2022)

Soit A un anneau commutatif non nul. On suppose que chaque idéal I de A est premier, i.e. vérifie :

$$\forall (x,y) \in A^2, xy \in I \Rightarrow \left(x \in I \text{ ou } y \in I\right).$$

1. Montrer que A est intègre.
2. Montrer que A est un corps.

Exercice 8.12 (CCINP 2017)

Soit A un anneau non nul. Un élément x de A est dit nilpotent d'ordre n si $x^n = 0$ et $x^{n-1} \neq 0$.

1. Soit $a \in A$ un élément nilpotent. Montrer que $1 - a$ est inversible.
2. Soient a et b deux éléments de A tel que ab soit nilpotent d'ordre n.
   (a) Montrer que ba est nilpotent.
   (b) Commenter l'ordre de nilpotence de ba.
   (c) Donner une relation entre $(1-ab)^{-1}$ et $(1-ba)^{-1}$.
3. Généralisation. Soient a et b deux éléments de A. Montrer que, si $1 - ab$ est inversible, alors $1 - ba$ est inversible aussi.
4. Application. Soient $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))^2$. Montrer que $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$.

Exercice 8.13 (Mines-Ponts 2023)

Soit A un anneau commutatif.

Si I est un idéal de A, on note $R(I) = \{x \in A ; \exists n \in \mathbb{N}, x^n \in I\}$.

1. Montrer que $R(I)$ est un idéal de A contenant I.

2. Soient I et J deux idéaux de A. Montrer :

$$R(I \cap J) = R(I) \cap R(J); \quad R(I) + R(J) \subset R(I+J)$$

3. Pour cette question, $A = \mathbb{Z}$. Montrer que l'ensemble des entiers naturels non nuls tels que $R(n\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls dont la décomposition primaire ne comporte aucun facteur premier d'exposant au moins égal à 2.

Polynômes, fractions rationnelles

Exercice 8.14 (IMT 2024)

1. Factoriser sur $\mathbb{C}$ le polynôme $X^n - 1$ pour $n \geqslant 2$.
2. En déduire $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

Exercice 8.15 (IMT 2023)

Soit $\mathscr{S}$ l'ensemble des couples $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que

$$(X-1)^n Q(X) + X^n P(X) = 1$$

1. Montrer l'existence et l'unicité d'un couple $(P_0, Q_0) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^2$ dans $\mathscr{S}$.

2. Déterminer $\mathscr{S}$.

Exercice 8.16 (CCINP 2023)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$, à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$. On suppose que $P(0) \neq 0$ et que P est scindé sur $\mathbb{R}$, et on note $x_1, \ldots, x_n$ ses racines. On note également $\sigma_1 = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i, \sigma_2 = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$ et $\sigma_n = \displaystyle\prod_{i=1}^n x_i$.

1. Montrer que $\ln\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \geqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n \ln\left(x_i^2\right)$, puis que $\left(\displaystyle\prod_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/n} \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2$.
2. Quelles sont les valeurs possibles de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_n$?
3. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant 3$.
4. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ scindés sur $\mathbb{R}$ et à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$.

Exercice 8.17 (IMT 2024, 2023)

Montrer que le polynôme $P = X^3 + 3X^2 + 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 8.18 (IMT 2022)

Soit $P = X^n - a_{n-1}X^{n-1} + \cdots - a_0$ avec $a_0 > 0$ et $a_1, \ldots, a_{n-1}$ réels positifs.

1. Montrer que P admet une unique racine sur $\mathbb{R}^+$, que l'on note ρ.

2. Soit z une racine complexe de P. Montrer que $|z| \leqslant \rho$.

3. Montrer que $\rho \leqslant \max(1, a_0 + \cdots + a_{n-1})$

Exercice 8.19 (CCINP 2022)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Le but de cet exercice est de montrer que si P est scindé, alors P' aussi.

1. Énoncer le théorème de Rolle.

2. Si a est une racine d'ordre k de P, quel est son ordre dans P' ?

3. Montrer le résultat voulu.

Exercice 8.20 (IMT 2019)

Soient m et n dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que si m divise n, alors $X^m - 1$ divise $X^n - 1$. Etudier la réciproque.

Exercice 8.21 (IMT 2021)

Soit $P = a_0 + \ldots + a_n X^n \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant de degré $n \geqslant 2$, scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que P' est aussi scindé à racines simples.
2. Décomposer en éléments simples $\dfrac{P'}{P}$. En déduire que pour tout réel x, $P''(x)P(x) - P'(x) < 0$.
3. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Montrer que $a_{k-1}a_{k+1} \leqslant a_k^2$.

Exercice 8.22 (Mines-Ponts 2021)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \ldots, z_n$ les racines de $X^n + 1$. On pose, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $F_k = \dfrac{X^k}{X^n + 1}$.

1. Décomposer F_k en éléments simples.

2. Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Montrer que :

$$XP'(X) = \frac{n}{2}P(X) + \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}.$$

3. Si $Q \in \mathbb{C}_n[X]$, on pose $\|Q\|_\infty = \max\limits_{|z|\leqslant 1}|Q(z)|$.
   Montrer que pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, $\left\|P'\right\|_\infty \leqslant n\|P\|_\infty$.

Exercice 8.23 (Mines-Ponts 2021)

1. Quels sont les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$?

2. Quels sont les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$?

3. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$?

Indications

8.1 Pour la question de dénombrement, remarquer qu'une application p est idempotente ssi :

$$\forall x \in p(E), p(x) = x.$$

8.3 1. Montrer que $\mathbb{U}_n \cap \mathbb{U}_m = \mathbb{U}_{n \wedge m}$.

2. Oui : si n, m sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$, U_n et U_m sont tous les deux inclus dans $\mathbb{U}_{nm}$.
4. Si $\dfrac{3+4i}{5}$ était une racine de l'unité, $\dfrac{3}{5}$ s'écrirait $\cos\left(\dfrac{2ik\pi}{n}\right)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$; trouver une contradiction en appliquant T_n.

8.5 Montrer que $(\mathbb{Q}, +)$ n'est pas monogène.

8.11 2. Etant donné un élément x non nul de A, considérer l'idéal engendré par x^2.

8.12 1. Considérer $\sum_{k=0}^{n-1} a^k$.

2. (b) Utiliser des matrices $E_{i,j}$ pour montrer que l'on ne peut pas faire mieux que $\text{ordre}(ba) \leqslant \text{ordre}(ab) + 1$.

3. S'inspirer du résultat de 2(c).

4. λ est valeur propre de AB si et seulement si $\lambda \mathrm{I}_n - AB$ n'est pas inversible. Traiter le cas $\lambda = 0$ à part.

8.20 Considérer les racines des deux polynômes.

8.22 2. Traiter d'abord le cas où $P = X^j$ avec $j \in [\![0, n]\!]$.

3. Prouver que $\left\|P'\right\|_\infty = \max\limits_{|z|=1} \left|P'(z)\right|$.

8.23 1. D'Alembert-Gauss.

2. Pour un tel polynôme, montrer que $P^{(k)}(0) \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{R}$.

3. Pour un tel polynôme, $P(z)\overline{P}\left(\dfrac{1}{z}\right) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{U}$.

9 Algèbre linéaire élémentaire

Les points importants

- Polynômes de Lagrange.
- Symétries, projecteurs.
- Hyperplans et formes linéaires.
- Théorème du rang.
- Divers théorèmes de dimension finie en lien avec les bases, les application injectives, surjectives, etc.
- Sommes directes. Familles de projecteurs associés.
- Noyaux itérés.
- Endomorphismes de rang 1 ($u^2 = \mathrm{tr}(u)\, u$, diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{tr}(u) \neq 0$, etc.)

Les erreurs classiques

Rapport du jury CCINP

- *En dimension infinie, pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires sur E, peu de candidats pensent rapidement à raisonner par analyse et synthèse ou quand ils y pensent, la phase de synthèse ou vérification que la décomposition obtenue convient, est très souvent oubliée. Enfin, précisons que si on utilise cette méthode par analyse-synthèse pour prouver que A et B sont supplémentaires sur E, alors il n'est pas nécessaire de vérifier en plus que $A \cap B = \{0\}$. La phase d'analyse assure l'unicité de la décomposition.*
- *Si F est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, il y a bien existence d'un supplémentaire mais il n'est pas unique !!!*
- *Trop de candidats annoncent u injectif $\Leftrightarrow$ u surjectif $\Leftrightarrow$ u bijectif car u endomorphisme (sans évoquer qu'ils sont en dimension finie) ou car on est en dimension finie juste (sans dire que l'espace de départ et d'arrivée ont la même dimension).*
- *Savoir trouver rapidement une base de l'image pour une application linéaire en dimension finie est indispensable.*
- *La formule du rang en dimension finie n'assure pas, comme le pensent encore trop de candidats, que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires.*

Exercice 9.1 (CCINP 2024)

1. Soit $M = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice non inversible.

   Montrer qu'il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $|m_{i_0,i_0}| \leqslant \sum_{j\neq i_0} |m_{i_0,j}|$. Indication : considérer X non nul dans le noyau de M et i_0 tel que $|x_{i_0}|$ soit maximal parmi les coordonnées de X.

2. Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,j} = 1$ si $|i-j| = 1$, $a_{i,j} = 0$ sinon.

   (a) Montrer que A est diagonalisable.

   (b) Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leqslant 2$.

   (c) Soit $\lambda \in [-2,2]$. On écrit $\lambda = 2\cos\theta$ avec $\theta \in [0,\pi]$ et on note $\Delta_n = \det(A - 2\cos\theta I_n)$.

   Calculer Δ_n et en déduire le spectre de A.

Exercice 9.2 (CCINP 2024)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur de E si et seulement si $p\circ q = q\circ p = 0$.
2. On suppose que $p+q$ est un projecteur. Montrer que $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im}(p)\oplus\operatorname{Im}(q)$ et $\ker(p+q) = \ker(p)\cap\ker(q)$.

Exercice 9.3 (CCINP 2024)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A ? Donner une base de l'image de A.
2. Donner une équation de l'image de A. Le vecteur B appartient-il à l'image de A ?

Exercice 9.4 (Navale 2024)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que f est un projecteur si et seulement si $\operatorname{rg} f + \operatorname{rg}(f - \mathrm{id}) = \dim E$.

Exercice 9.5 (IMT 2024)

Soient E un espace vectoriel réel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant : $u^3 + u = 0$.

1. Pour $x \in \operatorname{Im} u$, calculer $u^2(x)$.
2. On note v l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$. Montrer que v est un isomorphisme.
3. Montrer que $\operatorname{rg} u$ est pair.

Exercice 9.6 (IMT 2024)

Soient u et v deux endomorphismes nilpotents et non nuls de $\mathbb{R}^n$ qui commutent. On note $\tilde{v}$ l'endomorphisme induit par v sur $\operatorname{Im}(u)$.

1. Montrer que l'endomorphisme $\tilde{v}$ est bien défini et en déduire que $\mathrm{rg}(v \circ u) < \mathrm{rg}(u)$.
2. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des matrices nilpotentes d'ordre n commutant deux à deux. Montrer que leur produit est nul.

Exercice 9.7 (CCINP 2024)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque, $u \in \mathscr{L}(E)$ et p un projecteur.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$ à l'aide du lemme des noyaux. Tout endomorphisme f vérifiant $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$ est-il nécessairement un projecteur ?
2. Montrer l'équivalence suivante entre les deux assertions :
   (i) $u \circ p = p \circ u$
   (ii) $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont stables par u.
3. On suppose E de dimension finie n. Montrer que $\Omega = \left\{u \in \mathscr{L}(E), u \circ p = p \circ u\right\}$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Exercice 9.8 (IMT 2024)

Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det\left(I_n + XX^T\right) = 1 + X^T X$.

Exercice 9.9 (IMT 2024)

Soient $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3\right)$ et $g \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2\right)$ telles que $\mathrm{rg}(f \circ g) = 2$. Calculer $\mathrm{rg} f$ et $\mathrm{rg} g$.

Exercice 9.10 (Navale 2024)

Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutant avec les matrices de rang 1.

Exercice 9.11 (IMT 2024)

1. Déterminer le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2-m \\ m-2 & 0 & 1 \\ 2m & m-2 & m-2 \end{pmatrix}$ en fonction de $m \in \mathbb{R}$.
2. Résoudre le système $\begin{cases} 2y + (2-m)z = 2-m \\ (m-2)x + z = 1 \\ 2mx + (m-2)y + (m-2)z = m-2 \end{cases}$

Exercice 9.12 (IMT 2024)

On considère la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j} = \sin(i+j)$. Calculer $\mathrm{rg}(A)$ et en déduire $\det(A)$.

Ind. On pourra considérer $X = \begin{pmatrix} \cos(1) \\ \vdots \\ \cos(n) \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \sin(1) \\ \vdots \\ \sin(n) \end{pmatrix}$

Exercice 9.13 (CCINP 2023)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A ? Donner une base de l'image de A.
2. Donner une équation de l'image de A. Le vecteur B appartient-il à l'image de A ?

Exercice 9.14 (CCINP 2023)

Soient $\varphi \in \mathbb{R}$ et $M_n = \left(m_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $m_{i,j} = 2\cos(\varphi)$ si $i = j$, $m_{i,j} = 1 \text{si} |i-j| = 1$, les autres coefficients étant nuls.

1. On suppose que $\varphi \notin \pi\mathbb{Z}$. Trouver une relation de récurrence vérifiée par $D_n = \det(M_n)$ et exprimer D_n.
2. Déterminer D_n lorsque $\varphi \in \pi\mathbb{Z}$.

Exercice 9.15 (IMT 2023)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\Delta_n(x) = \begin{pmatrix} 1+x^2 & -x & & & 0 \\ -x & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & & & -x & 1+x^2 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.16 (CCINP 2023)

Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{C}$ considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel si et seulement s'il existe deux nombres complexes a, b tels que $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) = az + b\bar{z}$.
2. Montrer l'unicité du couple (a, b).
3. Montrer que f est un projecteur si et seulement si $a^2 + |b|^2 = a$ et $b(a + \bar{a}) = b$.
4. Montrer que f est un projecteur différent de l'endomorphisme nul et de l'identité si et seulement si $\mathrm{Re}(a) = \dfrac{1}{2}$ et $|a| = |b|$.

Exercice 9.17 (IMT 2023)

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A est inversible, que B est nilpotente et que A et B commutent.

1. Montrer que $A - B$ et $A + B$ sont inversibles.
2. Si A et B ne commutent pas, montrer qu'alors $A + B$ n'est pas forcément inversible.

Exercice 9.18 (IMT 2023)

Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ telle que $f \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{rg}(f) \leqslant 2$.

Exercice 9.19 (IMT 2023)

Soient E et F deux espaces de dimension finie et $u, v \in \mathscr{L}(E, F)$.

Montrer que

$$\dim(\mathrm{Ker}(u+v)) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}(u) \bigcap \mathrm{Ker}(v)) + \dim(\mathrm{Im}(u) \bigcap \mathrm{Im}(v))$$

On pourra considérer la restriction de u à $\mathrm{Ker}(u+v)$.

Exercice 9.20 (IMT 2023)

Soient P le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x+y+z=0$ et D la droite d'équations $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$. Écrire la matrice dans la base canonique du projecteur sur P parallèlement à D.

Exercice 9.21 (CCINP 2021, 2019, IMT 2023)

Soient $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) \setminus \{0\}$ tel que $u^3 + u = 0$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$ et que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}\left(u^2 + \mathrm{id}\right)$.
2. Montrer que u n'est pas injective, puis que $\mathrm{rg}(u) = 2$.
3. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.22 (CCINP 2023)

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 0_n & \mathrm{I}_n & 0_n \\ 0_n & 0_n & \mathrm{I}_n \\ 0_n & 0_n & 0_n \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique, le polynôme minimal et le rang de A
2. Soit u un endomorphisme, montrer que $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(u^2\right)\right) \leqslant 2\dim(\mathrm{Ker}(u))$.
3. Soit $B \in \mathscr{M}_{3n}(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = 0$ et $\mathrm{rg}(B) = 2n$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}\left(B^2\right) \subset \mathrm{Ker}(B)$
   (b) En déduire la dimension de $\mathrm{Im}\left(B^2\right)$
   (c) Soit $(E_1; \ldots; E_m)$ une base d'un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\left(B^2\right)$.
   Montrer que $\left(B^2E_1; \ldots; B^2E_m; BE_1; \ldots; BE_m; E_1; \ldots; E_m\right)$ est une famille libre
   (d) Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 9.23 (IMT 2023)

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, u et v deux endomorphismes nilpotents non nuls de $\mathbb{R}^n$ tels que $u \circ v = v \circ u$.

   Montrer que $\mathrm{rg}(u \circ v) < \mathrm{rg}(v)$.

2. Montrer que la composée de n endomorphismes nilpotents de $\mathbb{R}^n$ qui commutent deux à deux est nulle.

Exercice 9.24 (IMT 2023)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\,\mathrm{id}$.

1. Montrer que $\dim(E)$ est pair.
2. Montrer que, pour tout $x \in E$, $\mathrm{Vect}(x, f(x))$ est stable par f.
3. Montrer que, si $\dim(E) = 2n$, il existe des vecteurs $e_1, \cdots, e_n$ de E tels que la famille $\left(e_1, f(e_1), \cdots, e_n, f(e_n)\right)$ soit une base de E. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 9.25 (noyaux itérés, à connaître sur le bout des doigts, CCINP 2022)

Soit E un R-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$, $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Donner un exemple d'endomorphisme pour lequel noyau et image ne sont pas supplémentaires.
2. Montrer que si f est diagonalisable, Imf et Kerf sont supplémentaires. Que dire de la réciproque ?
3. (a) Montrer que la suite $\left(\dim\left(\mathrm{Ker}\left(f^k\right)\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (b) Montrer qu'il existe k_0 tel que $\forall k > k_0, \mathrm{Ker}\left(f^k\right) = \mathrm{Ker}\left(f^{k_0}\right)$.

   (c) Montrer que $\mathrm{Ker}\left(f^{k_0}\right)$ et $\mathrm{Im}\left(f^{k_0}\right)$ sont supplémentaires dans E.

Indications

9.4 • Si f est un projecteur, alors $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}\right)$.

• Réciproquement, si $\mathrm{rg}\, f + \mathrm{rg}(f - \mathrm{id}) = \dim E$, commencer par montrer que $\dim\left(\mathrm{Ker}(f)\right) + \dim\left(\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})\right) = \dim(E)$, puis $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}\right)$.

9.5 Pour 3., considérer $\det(v)$.

9.6 Pour 2., prouver par récurrence finie que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{rg}\,(A_1 \dots A_k) \leqslant n - k$.

9.7 Pour la dernière question, caractériser les éléments u de Ω par leur matrice dans une base adaptée à $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p)$.

9.8 Observez bien la matrice XX^T... C'est le moment d'utiliser vos connaissances sur les matrices de rang 1 !

9.9 Le cours, l cours, le cours ... Le rang d'une composée est inférieur ou égal au rang de chaque facteur ; le rang d'une application linéaire $u : E \to F$ est inférieur ou égal à la fois à $\dim(E)$ et $\dim(F)$.

9.10 Connaissez-vous des matrices de rang 1 remarquables ? Calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$ pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

10 Réduction

Les points importants

- Lemme des noyaux.
- Endomorphismes nilpotents.
- Endomorphismes de rang 1 ($u^2 = \mathrm{tr}(u)\, u$, diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{tr}(u) \neq 0$, etc.).
- Caractérisations de la diagonalisabilité, de la trigonalisabilité, par le polynôme caractéristique, le polynôme minimal, un polynôme annulateur …
- Lorsque deux endomorphismes commutent, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre ; réduction simultanée.

Les erreurs fréquentes

Rapport du jury CCINP

- *Ce chapitre met en évidence, au moment de déterminer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme, le manque fréquent de technicité pour calculer un déterminant.*
- *Les candidats devraient connaître sur le bout des doigts les différentes équivalences au fait qu'un endomorphisme soit diagonalisable... Et c'est loin d'être le cas !!!*
- *Erreur courante : « un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé à racines simples »!!! Si le polynôme caractéristique est scindé à racines simples alors u est diagonalisable, mais la réciproque est bien entendu fausse, il suffit de considérer l'endomorphisme nul comme contre-exemple.*
- *La donnée d'un endomorphisme u de E et d'un sous-espace vectoriel F de E stable par u devrait, assez mécaniquement, faire penser au candidat à considérer l'endomorphisme induit par u sur F. De nombreux exercices sur le chapitre réduction des endomorphismes (ou algèbre linéaire) s'appuient sur cette idée.*
- *Problèmes courants de vocabulaire.*

  Exemples :

  - A^2+3A+I_3 *est un polynôme annulateur de* A *au lieu de* X^2+3X+1 *est un polynôme annulateur de* A *;*
  - $X^2+3X+1=0$ *(qui est faux) au lieu de* X^2+3X+1 *est annulateur de* A*.*
  - *le polynôme annulateur au lieu d'un polynôme annulateur.*
- *Confusions fréquentes entre le polynôme minimal, le polynôme caractéristique et un polynôme annulateur quelconque.*

Rapport du jury CCINP

- *De grosses confusions sur les polynômes d'endomorphismes :*

  Exemple : si on demande de vérifier que X^2+3X+1 *est un polynôme annulateur de l'endomorphisme* u*, de nombreux candidats tentent de former* $(u(x))^2+3u(x)+1$ *au lieu de* $u\circ u(x)+3u(x)+x$.

  Ce constat explique que ces mêmes candidats peuvent difficilement trouver un polynôme annulateur pour un endomorphisme donné.

- *Si* P *est un polynôme annulateur de l'endomorphisme* u*, la quasi-totalité des candidats annonçaient sur la session 2016 et 2017, que les racines de* P *sont alors exactement les valeurs propres de* u *alors que seule l'inclusion de l'ensemble des valeurs propres dans l'ensemble des racines de* P *est vraie. Il se trouve que depuis la session* 2017*, cette erreur est beaucoup moins courante ...*

- *Une erreur fréquente : si* $\dim(Ker(u))=p$ *alors* 0 *est valeur propre de multiplicité* p*. Rappelons que seul le résultat* $1\leqslant\dim(E_\lambda)\leqslant m_\lambda$ *est vrai et que ce résultat est très utile. En fait, pour de trop nombreux candidats, la confusion entre multiplicité d'une valeur propre dans le polynôme caractéristique et dimension du sous-espace propre associé est fréquente. Le chapitre réduction des endomorphismes semble survolé par certains candidats alors que c'est une partie cruciale du programme d'algèbre.*

Exercice 10.1 (CCINP 2024)

Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $f\in\mathscr{L}(E)$ non nul tel que $f^2=0$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique, le polynôme minimal et le rang de f.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.
3. Montrer que si deux matrices non nulles M_1 et M_2 de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ vérifient $M_1^2=M_2^2=0$, alors elles sont semblables.
4. Montrer que deux matrices carrées quelconques mais semblables ont le même rang.
5. Deux matrices non nulles M_1 et M_2 de $M_4(\mathbb{R})$ vérifiant $M_1^2=M_2^2=0$ sont-elles nécessairement semblables?

Exercice 10.2 (CCINP 2024)

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}1&a&a\\-1&1&-1\\-1&0&2\end{pmatrix}$ avec $a\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. La matrice A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 10.3 (CCINP 2024)

1. Soit $A,B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Que pensez-vous de l'implication $AB=0\Longrightarrow A=0$ ou $B=0$?

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(R)$ telle que $A(A-I_n)^2 = 0$.

   (a) Montrer que la trace de A est dans $\mathbb{N}$.

   (b) Déterminer A dans le cas où la trace de A vaut 0.

   (c) On suppose que la trace de A vaut n. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 10.4 (CCINP 2024)

Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $a^2+b^2 \neq 0$ et $M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

1. Calculer MM^T et en déduire $\det M$.

2. (a) On suppose que $a^2+b^2+c^2+d^2 \neq 0$. Montrer que $\operatorname{rg} M = 4$.

   (b) On suppose que $a^2+b^2+c^2+d^2 = 0$. Montrer que $\operatorname{rg} M = 2$.

3. Étudier la diagonalisabilité de M.

Exercice 10.5 (IMT 2024)

1. Montrer que $P = X^3 - X - 1$ admet une unique racine réelle et qu'elle est strictement positive.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P(A) = 0$. Montrer que $\det A > 0$.

Exercice 10.6 (IMT 2024)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Expliciter P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.

2. Résoudre l'équation $X^2 + X = A$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 10.7 (CCINP 2024)

Soient E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. On suppose u nilpotent. Prouver que $u^n = 0$.

2. On suppose que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Résoudre l'équation $X^2 = A$.

Exercice 10.8 (IMT 2024)

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $f_A : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M - 2\,\mathrm{Tr}(M)\,A$.

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante de bijectivité de f_A.
3. Dans le cas de non bijectivité, montrer que f_A est un projecteur.
4. L'endomorphisme f_A est-il diagonalisable ?

Exercice 10.9 (Navale 2024)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire stable par f.
2. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace stable possède un supplémentaire stable.
3. Que dire de l'énoncé de la question précédente si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Exercice 10.10 (Navale 2024)

Soient $A, B \in \mathbb{R}_n[X]$. On suppose que $A \wedge B = 1$ et que B est scindé à racines simples. On écrit $B = \prod_{i=1}^{p} (X - x_i)$. On note $\phi : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto R$ où R désigne le reste de la division euclidienne de AP par B.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Est-ce un isomorphisme ?
2. Montrer que 0 est valeur propre de ϕ. Déterminer le sous-espace propre associé.
3. Prouver que, pour tout $k \in [\![1, p]\!], P_k = \prod_{i \neq k} (X - x_i)$ est vecteur propre de ϕ.
4. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?

Exercice 10.11 (Saint-Cyr 2024)

Soient $n \in \mathbb{N}^*, E$ un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $u_1, \dots, u_n \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $u_1 + \cdots + u_n = \mathrm{id}$ et $u_i \circ u_j = 0$ pour tous $i \neq j$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ distincts et $f = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n$.

1. Calculer u_i^2 pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. En déduire f^2 puis f^p pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
2. Justifier la diagonalisabilité de f.

Exercice 10.12 (CCINP 2024)

1. Énoncer le lemme de décomposition des noyaux.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$ de polynôme minimal : $\pi_f = \left(X^2 + 1\right)\left(X^2 + 4\right)$.

2. Montrer qu'il existe $x, y \in E$ non nuls tels que : $f^2(x) = -x$ et $f^2(y) = -4y$.
3. On suppose que $\dim E = 4$. Montrer que $(x, f(x), y, f(y))$ est une base de E et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 10.13 (CCINP 2024)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose que $\det A = 1$ et qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = I_2$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
2. On note α et β les deux racines complexes de χ_A. Montrer que : $|\alpha| = |\beta| = 1$, $\alpha = \bar{\beta}$, $|\mathrm{Re}(\alpha)| \in \{0, 1/2, 1\}$.
3. Montrer que $A^{12} = I_2$.
4. Montrer que $G = \left\{A^n, n \in \mathbb{N}\right\}$ est un groupe cyclique.

Exercice 10.14 (CCINP 2024)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^2 + M^T = I_n$.

1. Montrer que, si P est un polynôme annulateur de M, toute valeur propre de M est racine de P.
2. On suppose M symétrique.
   (a) Montrer que M diagonalisable.
   (b) Montrer que $\mathrm{Tr}(M)\det(M) \neq 0$.
3. On suppose M non symétrique. Montrer que M est diagonalisable.
4. Montrer que M est inversible si et seulement si $1 \notin \mathrm{Sp}(M)$.

Exercice 10.15 (CCINP 2024)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathscr{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA\}$.

1. Si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à A, montrer que $\dim \mathscr{C}(A) = \dim \mathscr{C}(B)$.
2. Si A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$, montrer que $\dim \mathscr{C}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m(\lambda)^2$, où $m(\lambda)$ est la multiplicité de la valeur propre λ.

Exercice 10.16 (CCINP 2024)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM + MB$.

1. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{Sp}\, N = \mathrm{Sp}\, N^T$.
2. Soient $U, V \in \left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}\right)^2$. Montrer que : $UV^T \neq 0$.
3. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et que, pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Sp}\, A \times \mathrm{Sp}\, B$, $\alpha + \beta \in \mathrm{Sp}\, \Phi$.
4. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}\, \Phi$ et M un vecteur propre associé.
   (a) Montrer que : $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A)M = MP(\lambda I_n - B)$.
   (b) Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Sp}\, A \times \mathrm{Sp}\, B$ tel que : $\lambda = \alpha + \beta$.

Exercice 10.17 (IMT 2023)

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ n'ayant aucune valeur propre en commun.

1. Montrer que $\chi_A(B)$ est une matrice inversible.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$AX - XB = M.$$

Exercice 10.18 (CCINP 2023)

On note S l'espace vectoriel des suites complexes. On considère l'endomorphisme (de décalage) de S défini par $L\big((u_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Trouver le noyau de $L - \lambda$ id et celui de $(L - \lambda \text{ id })^2$.
2. On note F le sous-espace vectoriel de S des suites (u_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+4} = \dfrac{1}{2}u_{n+3} + 3u_{n+2} - \dfrac{7}{2}u_{n+1} + u_n$.
3. Montrer que $F = \text{Ker}(2L - \text{id}) \oplus \text{Ker}(L + 2\text{id}) \oplus \text{Ker}(L - \text{id})^2$.
4. Déterminer la dimension de F et une base de F.

Exercice 10.19 (IMT 2023)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^{+*}$ et $M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{c}{a} \\ \frac{a}{b} & 1 & \frac{c}{b} \\ \frac{a}{c} & \frac{b}{c} & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de M.

Exercice 10.20 (IMT 2023)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. On veut montrer qu'il n'existe pas de matrice B telle que $B^2 = A$. On suppose l'existence d'une telle matrice. Trouver un polynôme annulateur simple de B. Conclure.
3. Montrer que A est semblable à C.

Exercice 10.21 (CCINP 2023)

Soit $E = \mathbb{R}_{2n+1}[X]$. Pour tout $P \in E$, on pose $f(P) = \left(X^2 - 1\right)P'(X) - (2n+1)XP(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Donner les valeurs propres et les sous-espaces propres de f (on pourra résoudre une équation différentielle).
3. Montrer que f est diagonalisable.

Exercice 10.22 (CCINP 2023)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ distincts, $n \in \mathbb{N}$ et $u : P \in \mathbb{C}_n[X] \mapsto (X-a)(X-b)P' - nXP$.

1. Montrer que $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}_n[X])$.
2. Pour $P \in \mathbb{C}_n[X]$, donner la décomposition en éléments simples de P'/P.
3. Montrer que u est diagonalisable et donner ses vecteurs propres.

Exercice 10.23 (IMT 2023)

Soit $(A, B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^2$.

1. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geqslant p, A - \dfrac{1}{k} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 10.24 (IMT 2023)

Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable, $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de vecteur propre.

1. Montrer que $\chi_u(u) = 0$ sans utiliser le théorème de Cayley-Hamilton.
2. On écrit $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Calculer $\det_e\left(x, u(x), \ldots, u^{n-1}(x)\right)$.

Exercice 10.25 (CCINP 2023)

1. Localiser les racines réelles de $X^3 - X - 1$.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer $\chi_A(0), \lim\limits_{+\infty} \chi_A$ et $\lim\limits_{-\infty} \chi_A$.
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 10.26 (CCINP 2023)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^2 + A^T = I_n$.

1. Justifier que, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \operatorname{Sp} M = \operatorname{Sp} M^T$.
2. Montrer que A est inversible si et seulement si $1 \notin \operatorname{Sp} A$.
3. Montrer que le polynôme $X^4 - 2X^2 + X$ est annulateur de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 10.27 (CCINP 2023)

Soient $n \in \mathbb{N}^*, (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^{*2}, (M, A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^3$ telles que $\lambda \neq \mu$, $A + B = I_n$, $M = \lambda A + \mu B, M^2 = \lambda^2 A + \mu^2 B$.

1. Déterminer $M^2 - (\lambda + \mu)M + 2\lambda\mu I_n$.
2. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.
3. Montrer que A et B sont des matrices de projecteurs.
4. La matrice M est-elle diagonalisable ? Déterminer son spectre.

Exercice 10.28 (IMT 2023)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$.

On pose $\Phi_u : v \in \mathscr{L}(E) \mapsto u \circ v \in \mathscr{L}(E)$.

1. Quels sont les éléments propres de ϕ_u ?

2. Montrer que ϕ_u est diagonalisable si et seulement si u est diagonalisable.

Exercice 10.29 (IMT 2023)

1. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes et $P = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_i)$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur P pour que u soit diagonalisable et la démontrer.

2. Soit $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^7\right)$. Est-il possible d'avoir simultanément $Q = (X-1)\left(X^2+1\right)$ annulateur de f et $\mathrm{Tr}(f) = 0$?

3. Soit $g \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^7\right)$ tel que $Q(g) = 0$. Calculer $\det(g)$

Exercice 10.30 (CCINP 2023)

Soit $\phi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M + \mathrm{tr}(M) I_n$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Cet endomorphisme est-il diagonalisable ?

3. Trouver une base des sous-espaces propres de ϕ.

4. Déterminer $\mathrm{tr}\,\phi$ et $\det \phi$.

5. L'endomorphisme ϕ est-il inversible ? Si oui, déterminer ϕ^{-1}.

Exercice 10.31 (Navale 2023)

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et $\phi : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto AM$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A pour que ϕ soit diagonalisable.

2. Décrire les éléments propres de ϕ.

Exercice 10.32 (CCCINP 2023)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et N_n l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. A est diagonalisable ;

2. $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A) \in N_n \Leftrightarrow P(A) = 0$.

Exercice 10.33 (CCINP 2023)

Soient $a \in \mathbb{R}^*, U = \left(a^{j-i}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^n\right)$ canoniquement associé à U.

1. Déterminer le rang de u et son déterminant.
2. Déterminer la dimension du noyau de u ainsi qu'une équation de ce noyau.
3. Déterminer la dimension de l'image de u et une base de cette image.
4. Étudier la diagonalisabilité de u.
5. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer U^k en fonction de U.
6. Déterminer le polynôme minimal de u et retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 10.34 (IMT 2023)

On pose $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ vérifiant $\exp(M) = A$.

1. Montrer que M admet une unique valeur propre de la forme $ik\pi$. Préciser k.
2. Montrer que M est triangulaire supérieure.
3. Déterminer les $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $\exp(M) = A$.

Exercice 10.35 (Matrices circulantes, CCINP 2022, 2023, 2024)

On note $\mathscr{T}$ l'ensemble des matrices circulantes :

$$M(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{pmatrix} \qquad \text{avec } (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n.$$

1. Soit $J = M(0, 1, \dots, 0)$, déterminer les éléments propres de J.
2. Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M(a_0, \dots, a_{n-1}) = P(J)$. La matrice $M(a_0, \dots, a_{n-1})$ est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que $\mathscr{T}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et donner sa dimension.

Exercice 10.36 (matrices stochastiques, CCINP 2022)

Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique lorsque elle est à coefficients tous positifs et que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = 1.$$

On fixe une telle matrice A.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A.
2. On considère la norme infinie standard $\| \|_\infty$ sur $\mathbb{C}^n$. Montrer que $\|AX\|_\infty \leqslant \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathbb{C}^n$.
3. En déduire que les valeurs propres complexes de A sont toutes dans le disque unité.

4. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est convexe, fermé et stable par produit matriciel.

Exercice 10.37 (CCINP 2021, Mines, Centrale)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{C}^n$.

1. On suppose que $\det(f^2) \neq 0$ et que f^2 est diagonalisable.

   Grâce à un polynôme annulateur, montrer que f est diagonalisable.

2. On suppose que $\det(f^2) = 0$ et que f^2 est diagonalisable.

   Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.

Exercice 10.38 (CCINP 2023)

Soient un entier $n \geqslant 3$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner le rang de M.
2. Déterminer les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
3. Déterminer la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 10.39 (CCINP 2021)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On considère deux endomorphismes u, v de E tels que $u \circ v - v \circ u = u$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^k \circ v - v \circ u^k = k u^k$.
2. En considérant l'application $\varphi : f \mapsto f \circ v - v \circ f$, montrer que u est nilpotent et que $u^n = 0$.
3. On suppose que u est nilpotent d'indice n, c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que la matrice de v dans la base $\mathscr{B}$ soit triangulaire supérieure de diagonale $(\lambda, \lambda+1, \dots, \lambda+n-1)$.

Exercice 10.40 (CCINP 2021)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie n tels que $f \circ g = g \circ f$.

   On suppose que f a n valeurs propres distinctes. Montrer que tout vecteur propre de f est aussi vecteur propre de g.

   Réciproquement, un vecteur propre de g est-il forcément un vecteur propre de f ?

2. (a) Trouver une matrice A telle que $A^2 = M$.

   (b) Trouver toutes les matrices A telles que $A^2 = M$.

Exercice 10.41 (CCINP 2023)

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^2 + M = A$.
   (a) Trouver un polynôme annulateur de A de degré 2 , puis un polynôme annulateur de M de degré 4 .
   (b) Montrer que M est diagonalisable, et préciser les valeurs possibles de son spectre.
   (c) Donner les différentes formes possibles de M.

Exercice 10.42 (CCINP 2023)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que deux endomorphismes u et v de E. On suppose que u et v commutent et u diagonalisable avec n valeurs propres distinctes.

1. Montrer que tous les vecteurs propres de u sont également vecteurs propres de v.
2. Montrer que v est diagonalisable dans une même base que u.
3. Montrer qu'il existe $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1} \in \mathbb{K}^n$ telle que $v = \sum_{k=0}^{n-1} a_k u^k$.

Exercice 10.43 (CCINP 2021, 2019, IMT 2018)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$ et l'application $u \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$ définie par $u(M) = aM + b\,{}^tM$.

Déterminer les valeurs et sous-espaces propres de u. u est-elle diagonalisable ?

Calculer le déterminant et la trace de u.

Exercice 10.44 (matrices par blocs, CCINP 2022, 2021, 2018)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$.
2. Donner les critères de diagonalisabilité faisant intervenir des polynômes.
3. (a) Montrer que si B est diagonalisable, alors A est diagonalisable, puis que $A = 0$.

(b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que B soit diagonalisable.

Exercice 10.45 (Mins-Ponts 2023)

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Soit u l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ défini par $\forall T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), u(T) = AT - TB$.

a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ (resp. $\beta \in \mathbb{C}$) une valeur propre de A (resp. B). Montrer que $\alpha - \beta$ est valeur propre de u.

b) Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de u, et $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé.

Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X], P(A)T = TP(\lambda I_n + B)$.

c) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathrm{Sp}(A)$ et $\beta \in \mathrm{Sp}(B)$ telles que $\lambda = \alpha - \beta$.

d) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AT = TB$.

Exercice 10.46 (d'après un exercice Centrale 2022)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente. On veut montrer qu'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA - AB = A$.

On introduit pour toute matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ les applications linéaires :

$$u_B : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & BM - MB \end{array} \right. \qquad \varphi_B : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \mathrm{tr}(BM) \end{array} \right. .$$

1. Montrer que $B \mapsto \varphi_B$ est un isomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sur son dual $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u_A) \subset \mathrm{Ker}(\varphi_A)$.
3. Montrer que si E, F sont des espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(E, G)$ vérifient $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$, alors il existe $h \in \mathscr{L}(F, G)$ telles que $g = h \circ f$.
4. En déduire qu'il existe une matrice B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi_A = \varphi_B \circ u_A$.
5. Conclure.

Indications

10.1 1. Pour le rang, remarquer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.

2. Commencer par une phase d'analyse : si une telle base (e_1, e_2, e_3) existe, nécessairement (e_1) est une base de $\mathrm{Im}(f)$, (e_1, e_2) est une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et e_3 est un antécédent de e_1 par f.

3. Utiliser évidemment les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés à M_1 et M_2.

5. Il est facile de construire M_1 de rang 1 et M_2 de rang 2 telles que $M_1^2 = M_2^2 = 0$.

10.4 1. $MM^T = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) I_4$, et en déduire que $(\det(M))^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$, i.e. $\det(M) = \pm (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$. $\det(M)$ est un polynôme en a, quel est son coefficient dominant ?

2b) $\mathrm{Im}(M^T) \subset \mathrm{Ker}(M)$ puis théorème du rang.

3. Comprendre que les questions précédentes donnent quasi-immédiatement le polynôme caractéristique de M et la dimension des sous-espaces propres.

10.5 1. Une étude de fonction.

2. Commencer par établir que A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

10.9 1. Si f est diagonalisable, utiliser le théorème de la base incomplète ; pour la réciproque, utiliser des hyperplans.

2. Utiliser que tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle admet au moins un vecteur propre.

3. Chercher un contre-exemple avec un endomorphisme remarquable de $\mathbb{R}^2$.

10.10 1. Il y a manifestement un défaut de surjectivité.

2. Lemme de Gauss

4. Montrer que $\left(B, XB, \ldots, X^{n-p}B, P_1, \ldots, P_p\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de ϕ.

10.11 1. Montrer que les u_i sont des projecteurs et que $f^p = \lambda_1^p u_1 + \cdots + \lambda_n^p u_n$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2. Trouver un polynôme annulateur de f scindé à racines simples.

10.12 2. Il s'agit de montrer que $\operatorname{Ker}\left(f^2 + \mathrm{Id}\right)$ et $\operatorname{Ker}\left(f^2 + 4\mathrm{Id}\right)$ ne sont pas réduits à $\{0_E\}$. Raisonner par l'absurde en utilisant le lemme de décomposition des noyaux.

3. Prouver qu'il suffit d'établir la liberté de $(x, f(x))$ et de $(y, f(y))$. Remarquer que f n'a pas de vecteur propre.

10.13 2. Attention, α, β peuvent être réels. Considérer $\det(A) = 1$ et $\operatorname{tr}(A) \in \mathbb{Z}$.

3. En posant $\alpha = \exp(i\theta)$, quelles sont les valeurs possibles de θ ?

10.15 1. Commencer par établir que $\mathscr{C}(A)$ et $\mathscr{C}(B)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $A = PBP^{-1}$, montrer que $\theta : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{C}(B) & \to & \mathscr{C}(A) \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array}\right.$ est bien définie, injective et surjective.

2. Il suffit de traiter le cas où A est diagonale. Ecrire $A = \operatorname{diag}\left(\lambda_1 I_{d_1}, \ldots, \lambda_p I_{d_p}\right)$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont distincts, puis résoudre l'équation $AM = MA$ en découpant M par blocs.

10.16 1. On peut par exemple montrer que N et N^T ont le même polynôme caractéristique.

3. Construire à l'aide de 1. et 2. un vecteur propre pour Φ associé à $\alpha + \beta$.

4.(a) Commencer par le cas $P = X^k$ où $k \in \mathbb{N}$.

4.(b) Appliquer le résultat de 4.(a) à $P = \chi_A$, et en déduire que $\chi_A(\lambda I_n - B)$ est non inversible. Ecrire χ_A sous forme scindée pour conclure.

10.40 1. Quelle est la dimension des sous-espaces propres de f ? Montrer qu'ils sont stables par g.

2(b) Montrer que si A est solution, alors $AM = MA$.

10.43 Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{A}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Comment pourrait-on calculer la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$?

11 Algèbre bilinéaire

Les points importants

- Le point essentiel (et souvent le seul non immédiat) pour démontrer qu'une application est un produit scalaire est la définie-positivité.
- Quand une intégrale intervient dans la définition d'un produit scalaire, le théorème des intégrales nulles (une fonction continue et positive est d'intégrale nulle si et seulement si elle est nulle) intervient systématiquement et doit être cité proprement et complètement.
- Pour montrer qu'une application est un produit scalaire sur un espace de polynômes, l'argument du nombre de racines (un polynôme de degré au plus n qui a strictement plus de n racines est nul) est presque toujours présent.
- Une inégalité faisant intervenir des carrés doit faire penser à celle de Cauchy-Schwarz. Le cas échéant, introduisez l'espace et le produit scalaire adéquats.
- Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien E et x un vecteur de E.

  Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur de F qui vérifie :

  $$d(x,F) = \left\| x - p_F(x) \right\|.$$

  Autrement dit, le projeté orthogonal de x sur F est l'unique vecteur de F qui minimise la distance de x à un vecteur de F. Savoir redémontrer ce point à l'aide du théorème de Pythagore et d'un bon dessin.
- Si F est un sous-espace de dimension finie et $x \in E$, on dispose de deux méthodes pour calculer le projeté orthogonal de x sur F, noté $p_F(x)$:
  - ▷ on détermine une base ORTHONORMÉE $\left(e_1, \ldots, e_p\right)$ de F, éventuellement avec le procédé de Schmidt, puis on utilise $p_F(x) = \sum_{k=1}^{p} \langle e_k, x\rangle\, e_k$.
  - ▷ On utilise une base quelconque $\left(a_1, \ldots, a_p\right)$ de F : le vecteur $p_F(x)$ se décompose dans cette base en $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_i$. Les p-équations $\left\langle x - p_F(x), a_i \right\rangle = 0$, où $1 \leqslant i \leqslant p$, permettent de déterminer les p inconnues $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.
- Si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E, u^* est l'unique endomorphisme de E qui vérifie :

  $$\forall (x,y) \in E^2, \left\langle x, u(y) \right\rangle = \left\langle u^*(x), y \right\rangle.$$

  Connaître parfaitement et savoir redémontrer toutes les propriétés relatives à l'adjoint : linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint, Ker $\left(u^*\right) = (\mathrm{Im}(u))^{\perp}$, Im $\left(u^*\right) = (\mathrm{Ker}(u))^{\perp}$, et si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u^*.
- La relation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(u^*\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)^T$ est valable dans **dans une base $\mathscr{B}$ orthonormée**. Les isométries vectorielles et les endomorphismes autoadjoints sont caractérisés par leur matrice **dans une base orthonormée**.

- Les isométries vectorielles et les matrices orthogonales sont caractérisées par un très grand nombre de propriétés, avec lesquelles il faut savoir jongler : conservation de la norme, conservation du produit scalaire, image d'une base orthonormée, toutes les propriétés matricielles (lignes et colonnes formant une base orthonormée, $M^T.M = \mathrm{I}_n \ldots$), théorème de réduction ...
- Le théorème spectral pour les matrices symétriques réelles, comme pour les endomorphismes autoadjoints, doit être présent à l'esprit immédiatement quand un tel objet se présente dans un exercice, avant même de commencer la réflexion. Ce qui ne signifie pas qu'il servira à chaque fois.
- **Les endomorphismes autoadjoints positifs (resp. définis positifs) et les matrices symétriques positives (resp. définies positives) sont caractérisés par deux propriétés équivalentes avec lesquelles il faut savoir jongler : l'une avec un produit scalaire, l'autre avec le spectre. Savoir prouver à toute vitesse cette équivalence**.
- Il faut impérativement savoir écrire matriciellement un produit scalaire. Ne pas confondre un produit scalaire de vecteurs colonnes $\left(\langle X, Y\rangle = X^T.Y\right)$ et de matrices carrées $\left(\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}\left(A^T.B\right)\right)$.
- Dans un espace euclidien, pour établir qu'un vecteur x est nul, on peut penser à montrer que $\|x\|^2 = 0$ ou que x est orthogonal à tout vecteur.
- La compacité de $O(n)$, la décomposition $M = A^T A$ des matrices symétriques positives, l'encadrement de $\langle u(x), x\rangle$ à l'aide des valeurs propres de $u \in \mathscr{S}(E)$, et la racine carrée d'une matrice symétrique réelle à valeurs propres positives sont des classiques incontournables, à connaître et à savoir refaire comme si c'était du cours.
- A savoir : $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}\left({}^tAA\right)$ et $\mathrm{Im}\left({}^tA\right) = \mathrm{Im}\left({}^tAA\right)$.

Les erreurs fréquentes

Rapport du jury CCINP

- *Confusion entre $B = A^{\perp}$ et $A \perp B$. Rappelons que $A \perp B \Leftrightarrow B \subset A^{\perp}$.*
- *De nombreux candidats semblent avoir oublié l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*
- *Ne pas oublier que si p est la projection orthogonale sur $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, alors la formule $p(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, e_i \rangle e_i$ n'est valable que si $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base orthonormée de F.*
  Une mauvaise maîtrise de l'expression d'une projection orthogonale rend difficile le calcul de la distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel donné. Et pourtant c'est un point important du programme.

  À ce sujet, un schéma est toujours le bienvenu pour déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur x sur un sous-espace F.
- *Difficultés fréquentes pour trouver une base orthonormée d'un sous-espace vectoriel même de dimension 2.*
- *Manque de technique pour trouver l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F : rappelons qu'une technique efficace en dimension finie reste de trouver une base de F et de traduire que $x \in F^{\perp} \Leftrightarrow x$ est orthogonal à chaque vecteur d'une base de F.*
- *Le théorème spectral assure effectivement l'existence d'une base de vecteurs propres pour un endomorphisme symétrique réel mais trop de candidats oublient qu'il assure aussi l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres ... et le caractère orthonormé peut s'avérer bien utile.*
- *Dans le théorème spectral, lien pas toujours établi entre l'existence d'une base orthonormée et le fait que la matrice de passage de l'ancienne base à la nouvelle base puisse être orthogonale. Le cours doit être appris, certes, mais aussi compris en profondeur.*
- *La matrice d'un endomorphisme symétrique est symétrique à condition de se placer dans une base orthonormée.*
- *Sur cette session, trop de candidats ne se souviennent plus de la définition d'un endomorphisme symétrique (ils n'ont qu'une version matricielle de la symétrie en tête) ou pensent que u est symétrique si et seulement si pour tout vecteur x de E, $\langle u(x), x \rangle = \langle x, u(x) \rangle$.*
- *Très rares sont les candidats capables de déterminer concrètement une base orthonormée de vecteurs propres pour un endomorphisme symétrique. Très souvent, les candidats pensent qu'en orthonormalisant avec le procédé de Gram-Schmidt, ça va fonctionner. La démarche est fausse car la base obtenue est bien orthonormale mais n'a aucune raison de rester une base de vecteurs propres. La démarche la plus simple reste de chercher une base orthonormée de chaque sous-espace propre et d'utiliser le fait que leur somme vaut E et qu'ils sont orthogonaux.*

Rapport du jury CCINP

- *Pour vérifier si une matrice donnée est orthogonale, $A^{-1} = {}^tA$ n'est pas la caractérisation la plus pratique !!! Une caractérisation très souvent efficace est que A est orthogonale si et seulement si ses colonnes forment une famille orthonormée.*
- *Erreur fréquente : A est orthogonale si et seulement si son déterminant vaut 1 ou -1 !!! Rappelons qu'on peut juste annoncer que si A est orthogonale alors* $\det(A) \in \{-1,1\}$.

Exercice 11.1 (CCINP 2024)

1. Rappeler l'expression du projeté orthogonal d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel F d'un espace euclidien E, lorsque l'on dispose d'une base orthonormée de F.
2. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne canonique. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur la droite d'équation $6x = 4y = z$.

Exercice 11.2 (IMT 2024)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in E$, on pose

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $\langle , \rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer le projeté orthogonal de $x \mapsto \sin^2(x)$ sur $\mathrm{Vect}\,(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(2x))$.

Exercice 11.3 (IMT 2024)

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Exprimer en fonction des coefficients de M la distance de M à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11.4 (IMT 2024)

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ euclidien. Donner la matrice de la rotation R autour de la droite D d'équation $x - y + z = x + y + z = 0$ et telle que $R(e_2) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3)$.

Exercice 11.5 (Navale 2024)

Soient E un espace euclidien et F un sous-espace de E. Soient $u \in \mathscr{S}(E)$ et p la projection orthogonale sur F. Montrer que $p \circ u$ est autoadjoint si et seulement si F est stable par u.

Exercice 11.6 (CCINP 2024)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\det(M)$.
2. Calculer le polynôme caractéristique et déterminer les sous-espaces propres de M.
3. Montrer que M est diagonalisable.
4. Trouver un polynôme annulateur de M. Qu'en dire ?
5. Trouver $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

Exercice 11.7 (CCINP 2024)

1. Montrer que $(M,N) \mapsto \operatorname{tr}\left(M^T N\right)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soient $M, N \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{tr}\left(M^T N\right) \leqslant n$.
3. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\operatorname{tr}\left((AB)^2\right) \leqslant \operatorname{tr}\left(A^2 B^2\right)$.
   (b) Montrer que $\operatorname{tr}\left((AB+BA)^2\right) \leqslant 4\sqrt{\operatorname{tr}\left(A^4\right)}\sqrt{\operatorname{tr}\left(B^4\right)}$.

Exercice 11.8 (CCINP 2024)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$, un espace euclidien.

1. Déterminer les éléments de $\mathcal{S}^+(E) \cap \mathcal{O}(E)$.
2. Montrer la stabilité de $\mathcal{S}^+(E)$ par addition. L'ensemble $\mathcal{S}^+(E)$ est-il un espace vectoriel ?
3. Soit $u \in \mathcal{S}^+(E)$. Montrer l'existence de $w \in \mathcal{S}^+(E)$ tel que $u = w^2$.
4. En déduire que pour tous $u, v \in \mathcal{S}^+(E)$, $\operatorname{Ker}(u+v) = \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(v)$ et $\operatorname{Im}(u+v) = \operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v)$.

Exercice 11.9 (IMT 2024)

Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $XX^TX = -I_n$.

1. Montrer que $X \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer X.

Exercice 11.10 (IMT 2024, CCINP 2023)

Soient E un espace euclidien et f un endomorphisme de E qui vérifie :

$$\forall x \in E, \left\| f(x) \right\| \leqslant \|x\|.$$

1. Montrer que f^* vérifie la même propriété.

2. Montrer que $f - \mathrm{Id}_E$ et $f^* - \mathrm{Id}_E$ ont le même noyau.

3. Montrer que $E = \mathrm{Im}\left(f - \mathrm{Id}_E\right) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$.

4. Soit $x \in E$, que l'on décompose sous la forme $x = i + k$ où $i \in \mathrm{Im}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$ et $k \in \mathrm{Ker}\left(f - \mathrm{Id}_E\right)$.

   Déterminer $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1} f^j(x)$.

Exercice 11.11 (IMT 2023)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $A^{2022} = A^{2024}$.

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \mathrm{rg}(A)$.
2. Ce résultat demeure-t-il vrai si A est seulement diagonalisable ?

Exercice 11.12 (IMT 2023)

Soient $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = \left(b_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices symétriques positives.

1. Montrer que : $\forall\, i \in [\![1, n]\!], a_{i,i} \geqslant 0$.

2. Montrer que : $\mathrm{tr}\,(AB) \leqslant \mathrm{tr}\,(A)\,\mathrm{tr}\,(B)$.

Exercice 11.13 (IMT 2023)

On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on considère la forme bilinéaire suivante définie pour $(P, Q) \in E^2$:

$$\varphi(P,Q) = \sum_{i=0}^{n} P\left(a_i\right) Q\left(a_i\right)$$

où les $a_0, \ldots, a_n$ sont des réels. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que φ soit un produit scalaire.

Exercice 11.14 (CCINP 2023)

On note $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que l'on définit un produit scalaire sur E en posant $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.

2. Trouver a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\int_0^1 \left(t^2 - at - b\right)^2 \,\mathrm{d}t$ soit minimal :

   — en construisant une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$;

   — en recherchant a et b tels que $X^2 - aX - b$ soit orthogonal à $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 11.15 (IMT 2023)

Soit $A \in \mathbb{R}_n[X]$ supposé non constant.

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P associe le reste de la division euclidienne de P par A est un projecteur. Donner son noyau et son image.

2. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire : $\langle P, Q\rangle = \int_0^1 PQ$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un projecteur orthogonal.

Exercice 11.16 (IMT 2023)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, \mathrm{d}t$.

1. Montrer l'existence et calculer I_n.

   Pour $(P, Q) \in (\mathbb{R}[X])^2$, on pose $\langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} \, \mathrm{d}t$.
2. Montrer que $\langle , \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $L_n(x) = \dfrac{e^x}{n!} \cdot \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n e^{-x}\right)$ (polynôme de Laguerre).
3. Montrer que L_n est un polynôme de coefficient dominant $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.
4. Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes orthogonaux pour le produit scalaire défini en **2**.

Exercice 11.17 (IMT 2023)

Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(t^2 - at - b\right)^2 \, \mathrm{d}t$.

Exercice 11.18 (CCINP 2023)

Soit $n \geqslant 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel : pour $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = \left(y_1, \dots, y_n\right)$ dans $\mathbb{R}^n$, on pose : $(x \mid y) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$. Soit $F = \left\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_n\right\}$.

1. Montrer que F est un hyperplan.
2. Trouver une base orthonormée de F.
3. Déterminer $F^{\perp}$.
4. Ecrire la matrice de la projection orthogonale sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
5. Calculer $d(e_1, F)$.

Exercice 11.19 (CCINP 2023)

On définit trois fonctions sur le segment $[0,1]$: $f_0 : t \mapsto 1$, $f_1 : t \mapsto t$ et $f_2 : t \mapsto \mathrm{e}^t$, et on note $E = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\left(f_0, f_1, f_2\right)$.

1. Montrer que $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.
2. Trouver une base orthonormée de $F = \mathrm{Vect}\left(f_0, f_1\right)$.
3. Trouver a et b tels que la distance de f_2 à $t \mapsto at + b$ soit minimale.

Exercice 11.20 (Navale 2023)

1. Rappeler l'algorithme de Gram-Schmidt.

2. On note $T_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaires supérieures, à coefficients diagonaux strictement positifs. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple $(O, T) \in \mathscr{O}_n(\mathbb{R}) \times T_n^+(\mathbb{R})$ tel que $A = OT$.

Exercice 11.21 (CCINP 2023)

Soient E un espace euclidien, a et b deux vecteurs linéairement indépendants.

Soit $u : x \mapsto \langle a, x\rangle a + \langle b, x\rangle b$.

1. Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint.
2. Déterminer son noyau.
3. Déterminer les éléments propres de u.

Exercice 11.22 (CCINP 2023)

On considère la matrice $A = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 5 & -2 \\ 4 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^T A$.
2. Sans utiliser χ_A, trouver les valeurs propres de A et les multiplicités associées.
3. Calculer π_A et χ_A.
4. Trouver $P \in \mathscr{O}_4(\mathbb{R})$ telle que $P^T AP$ soit diagonale.
5. Trouver le commutant de A.

Exercice 11.23 (IMT 2023)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AA^T + 2A^T + I_n = 0$. Déterminer A.

Exercice 11.24 (IMT 2023)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.
2. Que dire si $A = A^T$?

Exercice 11.25 (IMT 2023)

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ symétrique à valeurs propres strictement positives. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$\|x\|^4 \leqslant \langle u(x), x\rangle \left\langle u^{-1}(x), x\right\rangle$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait égalité.

Exercice 11.26 (IMT 2023)

On concidère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base orthonormale de diagonalisation de A.

Exercice 11.27 (CCINP 2023)

Soient un entier $n \geqslant 3$, et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

1. Donner le rang de M.
2. Déterminer les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.
3. Déterminer la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 11.28 (CCINP 2023)

Soient u et v deux endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien $(E, \langle\rangle,)$.

1. Montrer que u et v commutent si et seulement si $u \circ v$ est autoadjoint.
2. Montrer que u et v commutent si et seulement s'il existe une base orthonormée de vecteurs propres communs à u et v.
3. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan $x + y + z = 0$. Caractériser les symétries orthogonales de $\mathbb{R}^3$ qui commutent avec s.

Exercice 11.29 (CCINP 2023)

Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

1. On suppose que $\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle = 0$. L'endomorphisme u est-il nécessairement nul?
2. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   (i) $u \circ u^* = u^* \circ u$,
   (ii) $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y)\rangle = \left\langle u^*(x), u^*(y)\right\rangle$,
   (iii) $\forall x \in E, \|u(x)\| = \left\|u^*(x)\right\|$.

Exercice 11.30 (IMT 2023)

Soit $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, telle que $A^{2022} = A^{2024}$. Montrer l'égalité $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = \mathrm{rg}(A)$.

Exercice 11.31 (IMT 2023)

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$.

1. Trouver $P \in \mathbb{R}_1[X]$ tel que $P(A) = 0$. Que dire sur A et $\mathrm{Sp}(A)$?

2. On suppose, pour cette question seulement, que $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que $A - I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et que $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

3. On prend $n = 3$. Montrer que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

Exercice 11.32 (CCINP 2023)

On considère un espace euclidien E dont le produit scalaire est noté, pour tous vecteurs x et y de E : $\langle x \mid y\rangle$. On fixe deux vecteurs non nuls u et v de E.

1. Pour tout vecteur x de E, on pose : $(u \otimes v)(x) = \langle v \mid x\rangle u$.

   (a) Justifier que $u \otimes v$ est linéaire et donner son rang.

   (b) Déterminer les éléments propres de $u \otimes v$.

   (c) L'endomorphisme $u \otimes v$ est-il diagonalisable ?

2. Calculer $(u \otimes v)^2 = (u \otimes v) \circ (u \otimes v)$ et retrouver le résultat de la question 1.c..

3. Soit g un endomorphisme de E. On note $g^\star$ son adjoint.

   Montrer que g commute avec $u \otimes v$ si et seulement si il existe un réel α tel que : $g(u) = \alpha u$ et $g^\star(v) = \alpha v$.

Exercice 11.33 (CCINP 2023)

Soit E un espace euclidien de dimension n. On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

1. Soit $v \in S(E)$ tel que : $\forall x \in E, (v(x) \mid x) = 0$. Montrer que $v = 0$.

2. (a) Montrer que tout projecteur orthogonal de E est autoadjoint.

   (b) Montrer que tout projecteur de $S(E)$ est un projecteur orthogonal.

3. Soient $u_1, \ldots, u_p \in S(E)$ tels que $\mathrm{rg}\, u_1 + \cdots + \mathrm{rg}\, u_p = n$ et :

$$\forall x \in E, \sum_{i=1}^{p} (u_i(x) \mid x) = (x \mid x).$$

   (a) Montrer que $u_1 + \cdots + u_p = \mathrm{Id}_E$.

   (b) Montrer que $\mathrm{Im}\, u_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\, u_p = E$.

   (c) Montrer que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, u_i est la projection sur $\mathrm{Im}\, u_i$ parallèlement à

$$\mathrm{Im}\, u_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\, u_{i-1} \oplus \mathrm{Im}\, u_{i+1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}\, u_p.$$

   (d) Montrer que les $\mathrm{Im}\, u_i$ sont deux à deux orthogonaux.

Exercice 11.34 (CCINP 2024,2023)

Soient E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^* \circ u = u \circ u^*$.

1. Soient $\lambda \in \mathrm{sp}\, u$ et x un vecteur propre associé. Montrer que $\left\| u^*(x) \right\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2$.

2. Montrer que u et u^* ont les mêmes espaces propres.

3. Montrer que les espaces propres de u sont orthogonaux.

4. Montrer que, si u est diagonalisable, alors u est autoadjoint.

Exercice 11.35 (CCINP 2023)

Soient $(E,\langle,\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$, f un endomorphisme autoadjoint de E, a sa plus petite valeur propre et b sa plus grande valeur propre.

1. Montrer que, pour tout $x \in E, a\|x\|^2 \leqslant \langle x, f(x)\rangle \leqslant b\|x\|^2$.
2. Soient $k \in \mathbb{R}$ et $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{i,j} = k$ si $i = j, a_{i,j} = 1 \text{si} |i-j| = 1$, les autres coefficients étant nuls.

   Montrer que la plus grande valeur propre b de A vérifie $k+2 \geqslant b$.

Exercice 11.36 (IMT 2022, CCINP 2021)

Soit $\phi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \phi(P,Q) = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$$

1. Montrer que ϕ existe, et que c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Calculer $\phi\left(X^i, X^j\right)$, en déduire que $((i+j)!)^2 \leqslant (2i)!(2j)!$.
3. Déterminer $\displaystyle\inf_{a,b\in\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \left(t^2-(at+b)\right)^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11.37 (IMT 2023)

On considère l'espace vectoriel $E = \mathscr{C}^1([-1,1],\mathbb{R})$. Si $f, g \in E$, on pose :

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} \left(u(t)v(t) + u'(t)v'(t)\right) \mathrm{d}t$$

et on introduit les sous-espaces vectoriels :

$$F = \left\{f \in E \,\middle|\, f(-1) = f(1) = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{g \in E \,\middle|\, g \text{ est de classe } C^2 \text{ et } g'' = g\right\}.$$

1. Montrer que $\langle,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que F et G sont supplémentaires et orthogonaux.
3. Déterminer $p_G(f)$ le projeté orthogonal de $f \in E$ sur G.

Exercice 11.38 (CCINP 2022,2021)

On note $S_n^+(\mathbb{R}) = \left\{M \in S_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXMX \geqslant 0\right\}$.

1. Montrer que $(A,B) \mapsto \operatorname{tr}\left({}^tAB\right)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

2. (a) Soient $A, B \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer que $[\mathrm{tr}\,(AB+BA)]^2 \leqslant 4\mathrm{tr}\left(A^2\right)\mathrm{tr}\left(B^2\right)$.

   (b) Soit $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ avec $S \neq 0$. Montrer que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$: $\ln\left(\mathrm{tr}\left(S^{p+q}\right)\right) \leqslant \dfrac{1}{2}\left[\ln\left(\mathrm{tr}\left(S^{2p}\right)\right)+\ln\left(\mathrm{tr}\left(S^{2q}\right)\right)\right]$.

3. Montrer que l'ensemble des H des matrices de trace nulle est un espace vectoriel et donner sa dimension. Donner la distance à H de la matrice $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Exercice 11.39 (IMT 2022)

Soient E un espace vectoriel de dimension finie n et $A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in O(n)$ une matrice orthogonale.

1. Montrer que : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}^2 = n$.
2. Montrer que : $n \leqslant \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left|a_{i,j}\right| \leqslant n\sqrt{n}$.

Exercice 11.40 (CCINP 2019)

1. Montrer que la matrice $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ est orthogonale. Sans aucun calcul de déterminant, montrer que A est diagonalisable, et déterminer ses valeurs propres, ses sous-espaces propres, son polynôme minimal et son polynôme caractéristique. Quelle est la nature de l'endomorphisme canoniquement associé à A?
2. Soient E un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que deux quelconques des propositions suivantes entraînent la troisième.

   (i) f est une isométrie vectorielle.

   (ii) $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

   (iii) Pour tout $x \in E$, $f(x)$ est orthogonal à x.

Exercice 11.41 (IMT 2022)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que la matrice de f dans la base canonique est :

$$A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 8 & 6 & -10 \\ -10 & 5 & 0 \\ 6 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que : $\mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}(f)$.
2. Ecrire la matrice de f dans une base orthonormée directe de E formée d'une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et d'une base de $\mathrm{Im}(f)$.
3. En déduire la nature géométrique de f.

Exercice 11.42 (CCINP 2021)

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique. Soient u un vecteur unitaire et $a \in \mathbb{R}^*$. On note :

$$f_a : x \in \mathbb{R}^n \mapsto x + a(x|u)u$$

1. Montrer que f_a est un endomorphisme.

2. Montrer qu'il existe un unique $a \neq 0$ tel que f_a soit une isométrie. Reconnaître f_a.

3. On revient au cas général : montrer que f_a est autoadjoint et trouver ses éléments propres.

Exercice 11.43 (Centrale 2022)

1. Soit A une matrice symétrique réelle de taille n et de valeurs propres strictement positives $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

   Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ convexe.

   (a) Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \varphi\left(A_{i,i}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\lambda_k\right)$ où les $A_{i,j}$ désigne les coefficients de A. *On pourra exprimer ces coefficients en fonction des λ_k à l'aide d'une matrice bien choisie...*

   (b) Montrer que $\det(A) \leqslant \prod_{i=1}^{n} A_{i,i}$.

2. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\det(A)^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j}^2$.

3. On admet que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}), |\det(A)|^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left|A_{i,j}\right|^2$ et on note $D := \{z \in \mathbb{C} \text{ tq } |z| \leqslant 1\}$. Déterminer

$$\sup\left\{ \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left|z_i - z_j\right|, (z_1, \ldots, z_n) \in D^n \right\}$$

Exercice 11.44 (Centrale 2022)

Soit $n \geqslant 1$ et $f \in \mathscr{S}\left(\mathbf{R}^n\right)$ de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

1. Soit $x \in \mathbf{R}^n$ unitaire. Montrer que $\lambda_1 \leqslant \langle f(x), x \rangle \leqslant \lambda_n$. Montrer que $\langle f(x), x \rangle = \lambda_1$ si et seulement si $f(x) = \lambda_1 x$, et que $\langle f(x), x \rangle = \lambda_n$ si et seulement si $f(x) = \lambda_n x$.

2. On suppose que la matrice de f dans la base canonique est à coefficients strictement positifs.

   Soit $u = (u_1, \ldots, u_n)^T \in \mathbf{R}^n$ unitaire tel que $f(u) = \lambda_n u$.

   (a) Montrer que $f(\widetilde{u}) = \lambda_n \widetilde{u}$, où $\widetilde{u} = (|u_1|, \ldots, |u_n|)^T$. En déduire que les u_i sont de même signe et tous non nuls.

   (b) Montrer que $E_{\lambda_n}(f)$ est de dimension 1.

   (c) Montrer que toute valeur propre λ de f distincte de λ_n vérifie $|\lambda| < |\lambda_n|$.

Exercice 11.45 (Mines-Ponts 2021)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe $A' \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A'^2 = A$.

2. Montrer que si A, B sont dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors $\operatorname{tr}(AB) \geqslant 0$.

3. Déterminer les matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \operatorname{tr}(MS) \geqslant 0$.

Exercice 11.46 (Mines-Ponts 2021, Centrale 2022)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors il existe $A' \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A'^2 = A$.
2. Montrer que si A, B sont dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{tr}(AB) \geqslant 0$.
3. Une première application

   Déterminer les matrices M de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $\forall S \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathrm{tr}(MS) \geqslant 0$.
4. Une deuxième application

   (a) Soient $f : I \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dérivable et $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que $t \mapsto \mathrm{tr}(P(f(t)))$ est dérivable et calculer sa dérivée.

   (b) Soient A, B dans $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ avec $B - A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{tr}(\exp A) \leqslant \mathrm{tr}(\exp B)$.

Exercice 11.47 (Mines-Ponts 2022)

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $M^T = M^2$ et $\mathrm{Sp}(M) \cap \mathbb{R} = \varnothing$.

1. Déterminer χ_M.
2. Montrer que $M \in O_n(\mathbb{R})$.
3. Décrire l'endomorphisme canoniquement associé à M pour $n = 2$, puis pour n quelconque.

Indications

11.4 Exhiber une BON dont le premier vecteur dirige la droite D. Dans cette BON, la matrice de R est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. Trouver θ, puis utiliser la formule de changement de base pour trouver la matrice de R dans la base canonique. Vu que la matrice de passage est orthogonale, les calculs sont très rapides.

J'obtiens au final $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

11.5 Comme u est autoadjoint, F est stable par u si, et seulement si, $F^\perp$ l'est.

11.7 2. Cauchy-Schwarz

3.(a) Par le théorème spectral, se ramener au cas où A est diagonale.

3.(b) Utiliser 3.(a) et Cauchy-Schwarz.

11.8 1. Montrer proprement que $\mathscr{S}^+(E) \cap \mathscr{O}(E)$ est l'ensemble des symétries orthogonales.

4. Pour $\mathrm{Im}(u+v) = \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$, utiliser que $\mathrm{Im}(u+v) = (\mathrm{Ker}(u+v))^\perp$.

11.37 2. Un vecteur f de E appartient à $G^{\perp}$ ssi il est orthogonal à chacun des vecteurs d'une base de G.

11.38 2. Commencer par écrire le membre de gauche sous la forme $2\mathrm{tr}(AB)$ puis appliquer une inégalité (mystérieuse)...

Quant à la deuxième, on peut au choix appliquer l'inégalité précédente à A et B bien choisis, ou commencer par diagonaliser S et conclure par une variation sur une inégalité mystérieuse...

12 Avec Python

Exercice 12.1 (Centrale 2022, théorème de Wolstenholme)

Pour $n \in \mathbf{N}^\star$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{p_n}{q_n}$, avec p_n et q_n premiers entre eux.

1. Écrire une fonction `determiner` (n) qui renvoie le couple $\left(p_n, q_n\right)$
2. Pour tout nombre premier n au plus égal à 100, afficher le reste de la division euclidienne de p_{n-1} par n^2. Conjecturer le résultat pour un n premier quelconque.
3. Soit un entier p premier au moins égal à 5 . On pose $Q = \prod_{k=1}^{p-1}(X+k) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$.
   (a) Donner a_0 et a_{p-1}. Montrer que $(p-1)! \equiv -1[p]$ et que $\frac{a_1}{(p-1)!} = H_{p-1}$.
   (b) On pose $V = \left(i^j\right)_{1 \leqslant i, j \leqslant p-2}$ et $A = \left(a_1 \cdots a_{p-2}\right)^T$. Montrer qu'il existe un vecteur colonne B à coefficients entiers tel que $V\ A = pB$
   (c) En déduire que les coefficients de A sont multiples de p.
4. Démontrer la conjecture de 2) .

Exercice 12.2 (Centrale 2021, une marche aléatoire)

On considère un pion qui se déplace d'un nombre strictement positif de cases alignées numérotées dans l'ordre croissant à chaque étape. On note Y_i la variable aléatoire qui donne le nombre de cases parcourues à l'instant i. On suppose que les Y_i, où $i \in \mathbb{N}^*$, sont mutuellement indépendants et de même loi. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$. On pose, pour $j, k \in \mathbb{N}$, $f_j = P\left(Y_1 = j\right)$, $u_k = P\left(E_k\right)$ où E_k est l'événement « le pion atteint la case k ». On a $u_0 = 1$.

1. (a) On suppose que $Y_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p. Ecrire une fonction qui renvoie TRUE si la case k est atteinte, et FALSE sinon.
   (b) Ecrire une fonction qui renvoie une approximation de $P(E_k)$. La comparer avec $\frac{1}{E(Y_1)}$.
   (c) Même chose si Y_1 suit une loi géométrique de paramètre p.
2. Exprimer E_k à l'aide des S_n.
3. Exprimer $P\left(E_k \cap \left(Y_1 = j\right)\right)$.
4. En déduire que, pour $k \geqslant 1$, $u_k = \sum_{j=1}^{k} u_{k-j} f_j$.

Soient $u : t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} u_k t^k$ et $f : t \mapsto \sum_{j=0}^{+\infty} f_j t^j$.

5. Montrer que u et f sont définies sur $[0, 1[$ et que, pour $t \in [0, 1[$, $u(t) = \frac{1}{1 - f(t)}$.
6. En déduire les u_k lorsque $Y_1 - 1$ suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
7. On suppose que Y_1 ne prend qu'un nombre fini de valeurs et que les $k \in \mathbb{N}^*$ tels que $P(Y_1 = k) \neq 0$ sont premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que $u_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} \frac{1}{E(Y_1)}$.
   Indication : on pourra montrer que la seule racine complexe de $1 - f$ *de module au plus* 1 *est* 1.

Exercice 12.3 (Centrale 2022)

Soient $A = \left(X_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice dont les coefficients sont des variables aléatoires indépendantes et $D = \det A$.

1. Avec Python, estimer les valeurs de $\mathbf{E}(D)$ et $\mathbf{V}(D)$ pour différentes valeurs de n lorsque les $X_{i,j}$ sont à valeurs dans $\{-1,1\}$ avec $\mathbf{P}\left(X_{i,j}=-1\right) = \mathbf{P}\left(X_{i,j}=1\right) = \dfrac{1}{2}$. Conjectures ?
2. Montrer les conjectures dans le cas $n=1$ puis $n=2$.
3. Montrer que $\mathbf{E}(D) = \det\left(\mathbf{E}\left(X_{i,j}\right)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
4. Soit $x\in\mathbf{R}$. Calculer $\mathbf{E}\left(\chi_A(x)\right)$ dans le cas où les $X_{i,j}$ ont la même loi.
5. On suppose les $X_{i,j}$ centrées réduites. Que vaut $\mathbf{V}(D)$?

Exercice 12.4 (Centrale 2022, nombres de Carmichael)

Un entier $n\geqslant 2$ est dit **nombre de Carmichael** lorsque

$$\text{pour tout } a\in[\![2,n-1]\!] \text{ tel que } a\wedge n = 1, \text{ on a } a^{n-1}\equiv 1\ [n].$$

1. Ecrire une fonction `Carmichael` en PYTHON permettant de tester si un entier $\geqslant 2$ est de Carmichael.
2. Justifier que si n est un nombre premier alors n est un nombre de Carmichael.
3. A l'aide de PYTHON, déterminer le plus petit entier de Carmichael qui ne soit pas premier.
4. Soit n un entier de Carmichael tel que $n\geqslant 3$ et p un diviseur premier de n.
   (a) On suppose dans cette question que p^2 divise n. Montrer que $\left(1+\dfrac{n}{p}\right)^p\equiv 1[n]$. En déduire une contradiction.
   (b) Montrer que $p-1$ divise $n-1$.
   Indication : on pourra admettra, sans chercher à le montrer que $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\setminus\{0\},\times\right)$ *est cyclique engendré par* a. *On pourra alors considérer* a^{n-1}.
   (c) En déduire que n est impair.
5. Soit $n\geqslant 3$ un entier tel que
   $$\text{pour tout } p \text{ diviseur premier de } n,\ p-1 \text{ divise } n-1 \text{ et } p^2 \text{ ne divise pas } n.$$
   Montrer que n est un nombre de Carmichael.
6. Montrer que si n est un nombre de Carmichael alors $\forall a\in\mathbb{Z},\ a^n\equiv a[n]$.