Programme de colle 1

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**
  Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examinateur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.
- **Exercice(s) proposé(s) par l'examinateur**
  Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

Algèbre linéaire

Révisions de première année

Compléments

- Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.
- Matrices définies par blocs : interprétation géométrique des blocs, opérations par blocs (combinaison linéaire, produit, transposition).
- Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.
- Matrices semblables, interprétation géométrique.

Questions de cours :

1. **Banque CCINP** : exercices 60, 62 (sans la question sur le lemme des noyaux), 64 et 90
2. Projecteur : définition, théorème (énoncé et preuve)
3. Matrices de rang 1
   Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.
   (a) Montrer qu'il existe deux matrices uni-colonnes non nulles U et V telles que $A = UV^T$.
   (b) Montrer que $\mathrm{tr}(A) = U^T V$ et que $A^2 = \mathrm{tr}(A)\, A$.
4. Un exercice Mines-Télécom 2025
   Soient $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que
   $$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
   (a) Montrer que AB est la matrice d'un projecteur. Déterminer $\mathrm{rg}(A)$ et $\mathrm{rg}(B)$.
   (b) Montrer que $BA = \mathrm{I}_2$.