MP1

Programme de colle 2

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**
  Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examinateur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.

- **Exercice(s) proposé(s) par l'examinateur**
  Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

Intégrales des fonctions continues par morceaux sur un segment : révisions de MPSI

Manipulation des relations de comparaison O, o et $\sim$: révisions de MPSI

Intégrales sur un intervalle quelconque

Intégrales convergentes : définition pour une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, puis extension aux autres cas. Exemples fondamentaux (notamment les fonctions de Riemann, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ où $\alpha > 0$, cas d'une fonction admettant un prolongement par continuité). Propriétés : linéarité, positivité et relation de Chasles. Extension du théorème fondamental aux restes.

Cas des fonctions positives : condition nécessaire et suffisante de convergence pour les fonctions positives. Théorème de comparaison, domination, négligeabilité, équivalence. Exemples d'étude de convergence.

Fonctions intégrables à valeurs réelles ou complexes : définition, notion d'intégrale absolument convergente.
L'absolue convergence de l'intégrale implique sa convergence. Espace vectoriel des fonctions intégrables sur un intervalle. Notion d'intégrale semi-convergente.

Questions de cours

1. Sommes de Riemann d'une fonction continue par morceaux sur un segment : énoncé du théorème, et preuve dans le cas d'une fonction lipschitzienne.
2. Banque CCINP n° 4
3. Exercice

   Montrer que la fonction $f : \left| \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\exp(x)-1}{\ln(1+x)} \end{array} \right.$ est prolongeable par continuité en 0. La fonction obtenue est-elle dérivable sur $]-1,+\infty[$? de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$?
4. Intégrale impropre d'une fonction positive : énoncé et démonstration du théorème clé et du théorème de comparaison avec $\leqslant$.
5. Banque CCINP n°28
6. Etudier la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta(t)}\,\mathrm{d}t$ suivant les valeurs de α et β.

7. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
8. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.