Programme de colle 3

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**
  Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examinateur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.

- **Exercice(s) proposé(s) par l'examinateur**
  Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

Intégrales sur un intervalle quelconque

Intégrales convergentes : définition pour une fonction continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, puis extension aux autres cas. Exemples fondamentaux (notamment les fonctions de Riemann, $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ où $\alpha > 0$, cas d'une fonction admettant un prolongement par continuité). Propriétés : linéarité, positivité et relation de Chalses.

Cas des fonctions positives : condition nécessaire et suffisante de convergence pour les fonctions positives. Théorème de comparaison, domination, négligeabilité, équivalence. Exemples d'étude de convergence.

Fonctions intégrables à valeurs réelles ou complexes : définition, notion d'intégrale absolument convergente.
L'absolue convergence de l'intégrale implique sa convergence. Espace vectoriel des fonctions intégrables sur un intervalle. Notion d'intégrale semi-convergente.

Diverses techniques pour les intégrales généralisées : intégration par parties, changement de variable et intégration des relations de comparaison.

Questions de cours

1. Sommes de Riemann d'une fonction continue par morceaux sur un segment : énoncé du théorème, et preuve dans le cas d'une fonction lipschitzienne.
2. Banque CCINP n° 4
3. Intégrale impropre d'une fonction positive : énoncé et démonstration du théorème clé et du théorème de comparaison avec $\leqslant$.
4. Banque CCINP n°28
5. Banque CCINP n° 29 (les deux premières questions)
6. Etudier la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha \ln^\beta(t)}\,\mathrm{d}t$ suivant les valeurs de α et β.
7. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.
8. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$ diverge.
9. Calcul d'une intégrale d'une fonction rationnelle au choix de l'examinateur.
10. Enoncé du théorème d'intégration des relations de comparaison dans le cas convergent ou dans le cas divergent; preuve dans le cas convergent.