Programme de colle 4

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**
  Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examinateur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.

- **Exercice(s) proposé(s) par l'examinateur**
  Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

Début du cours sur la réduction

Polynômes d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée : pour $u \in \mathscr{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$; son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathscr{L}(E)$; polynômes annulateurs, polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée. Si d est le degré du polynôme minimal, alors la famille $\left(u^k\right)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. Lemme de décomposition des noyaux.

Eléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée : définitions; des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe; endomorphismes qui commutent et sous-espaces propres. Valeurs propres et polynômes annulateurs : si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P; le spectre de u est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal.

Questions de cours

1. Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $\left(u^k\right)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.
2. Théorème de décomposition des noyaux : énoncé et preuve dans le cas du produit de deux polynômes premiers entre eux.
3. Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe : preuve par les polynômes de Lagrange.
4. Détermination du polynôme minimal de la matrice circulante $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
5. Détermination du spectre de la matrice circulante $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ \vdots & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ en revenant à la définition d'une valeur propre (raisonnement par analyse-synthèse).
6. Si P est un polynôme annulateur d'un endomorphisme u, alors le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de P.
7. Le spectre est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal.
8. **Banque CCINP** : exercice 93.