Programme de colle 5

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**
  Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examinateur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.

- **Exercice(s) proposé(s) par l'examinateur**
  Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Polynômes d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée : pour $u \in \mathscr{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$; son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathscr{L}(E)$; polynômes annulateurs, polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée. Si d est le degré du polynôme minimal, alors la famille $\left(u^k\right)_{0 \leqslant k \leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. Lemme de décomposition des noyaux.

Eléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée : définitions; des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe; endomorphismes qui commutent et sous-espaces propres. Valeurs propres et polynômes annulateurs: si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P; le spectre de u est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie ou d'une matrice carrée : définition et description; multiplicité d'une valeur propre et dimension du sous-espace propre associé; théorème de Cayley-Hamilton (preuve non exigible).

Endomorphismes diagonalisables d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrices carrées diagonalisables : définitions; caractérisations élémentaires:

- $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable si, et seulement si, la somme des sous-espaces propres de u est égale à E;
- $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres de u est égale à $\dim(E)$;
- $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé et l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.

Si $\dim(E) = n$, un endomorphisme qui a n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Caractérisation de la diagonalisabilité par les polynômes annulateurs : un endomorphisme u est diagonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.

Endomorphismes trigonalisables d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrices carrées trigonalisables : définitions; un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, il existe un polynôme annnulateur scindé, ssi son polynôme caractéristique est scindé, ssi son polynôme minimal est scindé. La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme. On se limite au cas $n = 2$ et à des cas particuliers simples pour $n = 3$.

Endomorphismes nilpotents d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrices carrées nilpotentes : définitions, un endomorphisme est nilpotent si, et seulement si, il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0. L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.

Endomorphismes à polynôme caractéristique scindé : décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent. Traduction matricielle. La décomposition de Dunford et la réduction de Jordan sont hors programme.

Questions de cours

1. Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $\left(u^k\right)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.
2. Théorème de décomposition des noyaux: énoncé et preuve dans le cas du produit de deux polynômes premiers entre eux.
3. Si P est un polynôme annulateur d'un endomorphisme u, alors le spectre de u est inclus dans l'ensemble des racines de P.
4. Le spectre est égal à l'ensemble des racines du polynôme minimal.
5. Enoncé et démonstration des caractérisations élémentaires de la diagonalisablilité.
6. Enoncé et démonstration de la caractérisation de la diagonalisabilité par les polynômes annulateurs.
7. Un exercice

   Un endomorphisme de rang 1 est diagonalisable si et seulement si sa trace est non nulle.
8. Un exercice

   Soient u et v deux endomorphismes diagonalisables d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que $u\circ v = v\circ u$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont diagonales.