Programme de colle 6

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**
  Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examinateur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.

- **Exercice(s) proposé(s) par l'examinateur**
  Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

Espaces vectoriels normés

Normes et espaces vectoriels normés
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Structure d'espace vectoriel normé.
Distance entre deux vecteurs. Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules. Parties, suites, fonctions bornées. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.

Exemples de normes
Normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. *Pour les applications pratiques, on peut utiliser sans justification l'égalité $sup(kA) = ksup(A)$ pour A partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$.*
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes. Produit fini d'espaces vectoriels normés.
Normes sous-multiplicatives sur une $\mathbb{K}$-algèbre.

Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé
Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Suites extraites, valeurs d'adhérence.

Comparaison de normes
Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.
Equivalence des normes dans un espace vectoriel de dimension finie (résultat admis). Caractérisation de la convergence d'une suite par les suites coordonnées.

Questions de cours

1. Soient X un ensemble non vide et $E = \mathscr{B}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées de X dans $\mathbb{R}$.
   Si $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$. Montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Comparaison de $\|\|_2$ et $\|\|_\infty$, puis de $\|\|_1$ et $\|\|_2$ sur $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$.
3. Un exercice
   On considère E l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 sur $[0,1]$. On pose:
   $$N : f \mapsto |f(0)| + \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)|.$$
   (a) Montrer que N est une norme sur E.

(b) Montrer que $\| \|_\infty$ est dominée par N, i.e. il existe un réel $\alpha > 0$ tel que :

$$\forall f \in E, \left\| f \right\|_\infty \leqslant \alpha N(f).$$

On pourra commencer, pour $t \in [0,1]$, à écrire $f(t)$ en fonction de $f(0)$ et f' et à l'aide du symbole $\int$.

(c) Montrer que les deux normes $\| \|_\infty$ et N ne sont pas équivalentes.

4. Un exercice

Pour tout $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose :

$$N_1(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)| \qquad \text{et} \qquad N_2(P) = \sup_{k \in \mathbb{N}} |a_k|.$$

(a) Montrer que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. On pourra admettre que N_2 est aussi une norme.

(b) Montrer qu'aucune des deux normes N_1 et N_2 ne domine l'autre.

(c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe deux réels $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_p[X], \alpha N_1(P) \leqslant N_2(P) \leqslant \beta N_1(P).$$

5. Pour $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on pose:

$$\|A\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^{n} \left|a_{i,j}\right|.$$

Montrer que $\|.\|$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.