

Programme de colle 7

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**

Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examineur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.

- **Exercice(s) proposé(s) par l'examineur**

Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

Séries numériques et vectorielles

Séries à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie

Sommes partielles, convergence, divergence. Somme et restes d'une série convergente. Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Lien suite-série: la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ et la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ ont la même nature.

Série absolument convergente. Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.

Révisions et compléments sur les séries numériques

Exemples: séries télescopiques, séries géométriques, séries de Riemann et séries exponentielles.

Séries de nombres positifs: CNS de convergence (suite des sommes partielles majorée), théorèmes de comparaison avec $\leq$, O , o et $\sim$, exemples d'emploi.

Règle de d'Alembert.

Théorème des séries alternées. Signe et encadrement des restes.

Lien série-intégrale : méthode des rectangles pour la détermination d'équivalents de restes ou de sommes partielles de séries.

Théorèmes de sommation des relations de comparaison.

Questions de cours

1. **Banque CCINP** : exercice 6

2. **Banque CCINP** : exercice 7

3. Un exercice : la règle de Raabe-Duhamel

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes strictement positifs telle que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(a) Déterminer la nature de la série de terme général $w_{n+1} - w_n$ où $w_n = \ln(n^\alpha u_n)$.

(b) En déduire qu'il existe un réel $k > 0$ tel que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{k}{n^\alpha}$. Que peut-on dire de la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$

(c) Nature de $\sum_{n \geq 1} u_n$ où $u_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2n+2)}$.

4. **Banque CCINP** : exercice 8 première question

5. Convergence et somme de $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(n\theta)}{3^n}$ (où $\theta \in \mathbb{R}$) ou de $\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^n \cos(nx)}{n!}$ (où $\alpha, x \in \mathbb{R}$).

6. Soient $\|\cdot\|$ une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| < 1$.

Montrer que $\sum A^n$ converge, que $I_p - A$ est inversible et que $\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = (I_p - A)^{-1}$.

7. Trouver un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$