MP1

Programme de colle 8

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**
  Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examinateur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.

- **Exercice(s) proposé(s) par l'examinateur**
  Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

Suites et séries de fonctions numériques

(le début du chapitre)

Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions
Convergence simple; diverses propriétés conservées par convergence simple (monotonie, convexité).
Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.
$(f_n)_{n\geqslant 0}$ converge uniformément vers f sur I, si, et seulement si, les $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang, et $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Convergence simple, convergence uniforme d'une série de fonctions
Définitions via la suite des sommes partielles. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle.
Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point

Transmission de la continuité par convergence uniforme

Questions de cours

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto x\,(1 + n^\alpha e^{-nx})$ définie sur $\mathbb{R}^+$.
   Etudier la convergence simple de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ sur $\mathbb{R}^+$. Pour quelles valeurs de α a-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto \sin\left(\dfrac{n+1}{n}x\right)$.
   Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$, la convergence uniforme sur tout segment puis la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.
3. Exercices de la banque CCINP : 8, 9, 11, 12, 15 et 17.