

Programme de colle 9

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**

Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examineur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.

- **Exercice(s) proposé(s) par l'examineur**

Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

Suites et séries de fonctions numériques

Convergence simple, convergence uniforme d'une suite de fonctions

Convergence simple; diverses propriétés conservées par convergence simple (monotonie, convexité).

Convergence uniforme. La convergence uniforme entraîne la convergence simple.

$(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f sur I , si, et seulement si, les $f_n - f$ sont bornées à partir d'un certain rang, et $\|f_n - f\|_\infty$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Convergence simple, convergence uniforme d'une série de fonctions

Définitions via la suite des sommes partielles. Une série de fonctions converge uniformément si et seulement si elle converge simplement et la suite de ses restes converge uniformément vers la fonction nulle.

Convergence normale d'une série de fonctions. La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point

Propriétés de la limite d'une suite de fonctions, de la somme d'une série de fonctions

Continuité, extension au théorème de la double limite. Intersion limite intégrale pour une suite ou une série de fonctions continues convergeant uniformément sur un segment. Classe C^1 .

Extension à la classe C^k .

Approximation uniforme

Théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment S et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme sur S d'une suite de fonctions polynomiales à coefficients dans K .

Questions de cours

- La convergence normale implique la convergence uniforme et la convergence absolue en tout point.
- Exercices de la banque CCINP : 9, 11, 12, 14, 16 et 53.