

# Programme de colle 11

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**

Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examineur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.

- **Exercice(s) proposé(s) par l'examineur**

Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

## Topologie des espaces vectoriels normés

### Topologie d'un espace vectoriel normé

Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection d'une famille finie.

Voisinage d'un point.

Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie.

Point intérieur, point adhérent.

Intérieur, adhérence, frontière d'une partie.

Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés.

Partie dense.

Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.

Si  $A$  est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de  $A$ . Voisinage relatif.

### Etude locale d'une application

Limite en un point adhérent à une partie  $A$ . Caractérisation séquentielle.

Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée.

Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.

Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.

*Attention, la continuité des applications linéaires n'est pas au programme cette semaine.*

### Questions de cours

- Toute boule ouverte est ouverte; opérations sur les parties ouvertes.
- Toute boule fermée est fermée (preuve par les boules ou les suites au choix du colleur); opérations sur les parties fermées.
- Caractérisation séquentielle des parties fermées; une application élémentaire au choix du colleur.
- Caractérisation séquentielle des points adhérents; si  $A$  est une partie non vide de  $E$  et si  $x \in E$ , alors :

$$x \in \overline{A} \Leftrightarrow d(x, A) = 0.$$

- Exercices de la banque CCINP : 34, 35 et 44