Programme de colle 12

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**
  Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examinateur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.

- **Exercice(s) proposé(s) par l'examinateur**
  Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

Applications linéaires et multilinéaires continues

Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que:

$$\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E.$$

Norme subordonnée d'une application linéaire continue. Adaptation aux matrices.
Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue. Extension aux applications multilinéaires.

Le début du cours sur les séries entières

Lemme d'Abel. Rayon de convergence défini comme la borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $(|a_n|\, r^n)$ est bornée. Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$ et diverge grossièrement si $|z| > R$.
Si $|a_n| = O(|b_n|)$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n z^n$.
Si $a_n \sim b_n$, alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence.

Questions de cours

- Pour qu'une application linéaire u de E dans F soit continue, il faut et il suffit qu'il existe $C \geqslant 0$ tel que:

$$\forall x \in E, \|u(x)\|_F \leqslant C\|x\|_E.$$

- Soit $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$. u admet une plus petite constante de Lipschitz, que l'on appelle **norme subordonnée** de u et que l'on note $|||u|||$. On a de plus :

$$|||u||| = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|u(x)\|_F.$$

- L'application $\left|\begin{array}{ccc} \mathscr{L}_c(E,F) & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & |||u||| \end{array}\right.$ est une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$.

- Pour $(u,v) \in \mathscr{L}_c(E,F) \times \mathscr{L}_c(F,G)$, on a :

$$|||v \circ u||| \leqslant |||v|||.|||u|||.$$

- Exercices de la banque CCINP : 38Q1, 38Q2Q3, 20, 21