Programme de colle 13

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**
  Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examinateur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.

- **Exercice(s) proposé(s) par l'examinateur**
  Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

Séries entières

Généralités
Lemme d'Abel. Rayon de convergence défini comme la borne supérieure dans $[0,+\infty]$ de l'ensemble des réels $r \geqslant 0$ tels que la suite $(|a_n|\, r^n)$ est bornée. Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$ et diverge grossièrement si $|z| > R$.
La convergence est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à R.
Si $|a_n| = O(|b_n|)$, alors le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n z^n$.
Si $a_n \sim b_n$, alors les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence.
Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence.
Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.
Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.

Série entière d'une variable réelle
Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence. La somme d'une série entière est de classe C^1 sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.
Théorème de la limite radiale.
Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme. Si les fonctions $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ coïncident sur un voisinage de 0, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

Fonctions développables en série entière, développements usuels
Développement de $\exp(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$.
Développement de $\dfrac{1}{1-z}$ sur $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.
Fonction développable en série entière sur intervalle $]-r, r[$ de $\mathbb{R}$. Série de Taylor d'une fonction de classe C^∞ sur un intervalle $]-r, r[$.
Développements usuels :

$$\mathrm{e}^x,\ \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{ch} x,\ \operatorname{sh} x,\ \arctan x,\ \frac{1}{1-x},\ \ln(1+x),\ (1+x)^\alpha.$$

En plus de la question de cours, demander à chaque étudiant deux développements en série entière usuels.

Questions de cours

- Lemme d'Abel : preuve. Définition du rayon de convergence. Si R est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, alors la série $\sum a_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$ et diverge grossièrement si $|z| > R$: preuve.

- Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon $r < R$, mais ne converge pas forcément normalement sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R : preuve.

- Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont même rayon de convergence : preuve.
- Si $R > 0$, alors la somme de la série entière est continue sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon R : preuve.
- Si $R > 0$, alors $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^1 sur $]-R, R[$, la dérivée étant obtenue par dérivation terme à terme : preuve.
- Enoncé du théorème de la limite radiale; application à $\dfrac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$.
- Un exercice

  Pour tout entier $n > 0$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

  1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geqslant 1} H_n x^n$.
  2. Déterminer la somme de cette série entière en utilisant deux méthodes différentes :
     (a) en exploitant la relation de récurrence $H_n = H_{n-1} + \dfrac{1}{n}$.
     (b) en utilisant un produit de Cauchy.
- Un exercice

  Déterminer le développement en série entière au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, puis celui de $x \mapsto \arcsin(x)$.

  En déduire que $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{\pi}{2}$.
- Exercices de la banque CCINP : 22, 47.