

# Programme de colle 14

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**

Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examineur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.

- **Exercice(s) proposé(s) par l'examineur**

Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

## Espaces probabilisés

### Définitions et probabilités

Tribus sur un ensemble  $\Omega$ . Espace probabilisable  $(\Omega, \mathcal{A})$ .

Si  $\mathcal{A}$  est une tribu sur  $\Omega$ , une probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  est une application  $P$  définie sur  $\mathcal{A}$ , à valeurs dans  $[0, 1]$ , telle que  $P(\Omega) = 1$  et, pour toute suite  $(A_n)_{n \geq 0}$  d'événements deux à deux disjoints, on ait :  $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ .

Espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . Si  $\Omega$  est fini ou dénombrable et si  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ , une probabilité  $P$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  s'identifie, via la formule  $P(\{\omega\}) = p_\omega$ , à une famille de réels positifs sommable de somme 1.

### Propriétés élémentaires des probabilités

- Si  $(A_n)_{n \geq 0}$  est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors:  $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$ .
- Si  $(A_n)_{n \geq 0}$  est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors:  $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$ .
- Si  $(A_n)_{n \geq 0}$  est une suite d'événements, alors on a dans  $[0, +\infty]$ ,  $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ .
- Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

### Probabilités conditionnelles et indépendance

Extension des résultats vus en première année dans le cadre des univers finis : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formules de Bayes. Couple d'événements indépendants. Famille quelconque d'événements mutuellement indépendants.

### Questions de cours

1. Une ou plusieurs définitions parmi : tribu, probabilité, système complet d'événements, événements mutuellement indépendants.
2. Un ou plusieurs énoncés de théorèmes parmi : théorème de continuité monotone, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales.
3. **Banque CCP** : exercice 101 (2. sans l'argument matrice symétrique réelle).
4. **Banque CCP** : exercice 107