Programme de colle 15

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**
  Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examinateur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.

- **Exercice(s) proposé(s) par l'examinateur**
  Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

Espaces probabilisés

Définitions et probabilités
Tribus sur un ensemble Ω. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.
Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω, une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application P définie sur $\mathscr{A}$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements deux à deux disjoints, on ait : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.
Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Si Ω est fini ou dénombrable et si $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ s'identifie, via la formule $P(\{\omega\}) = p_\omega$, à une famille de réels positifs sommable de somme 1.

Propriétés élémentaires des probabilités

- Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors: $P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$.
- Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors: $P(A_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} P\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$.
- Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements, alors on a dans $[0,+\infty]$, $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.
- Evénements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Probabilités conditionnelles et indépendance
Extension des résultats vus en première année dans le cadre des univers finis : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formules de Bayes. Couple d'événements indépendants. Famille quelconque d'événements mutuellement indépendants.

Variables aléatoires discrètes

Définition d'une variable aléatoire discrète, cas des variables aléatoires réelles discrètes.
Si X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans E, $f(X)$ est aussi une variable aléatoire discrète pour toute application $f : E \to F$.
Loi d'une variable aléatoire discrète.
La loi d'une variable aléatoire discrète $X : \Omega \to E$ est entièrement déterminée par $X(\Omega)$ et $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$.
Pour toute famille sommable de réels positifs de somme 1 indexée par E au plus dénombrable, il existe $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ probabilisé et $X : \Omega \to E$ de loi définie par cette famille sommable.
Loi uniforme sur un ensemble fini.

Lois de Bernoulli, lois binomiales. Interprétations.
La donnée de deux variables aléatoires discrètes définit un couple aléatoire discret. Loi conjointe. Extension aux n-uplets.
Lois marginales, lois conditionnelles.
Couple, famille de variables aléatoires indépendantes.
Si X et Y sont indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ aussi; extension pour plus de deux variables (théorème des coalitions).
Existence d'un espace probabilisé et d'une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur cet espace et ayant une suite de lois fixées (admis).
Lois géométriques, interprétation. Loi de Poisson.

Les points suivants NE sont PAS au programme cette semaine : espérance, variance, fonctions génératrices, inégalité de Markov, inégalité de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres.

Questions de cours

1. Une ou plusieurs définitions parmi : tribu, probabilité, système complet d'événements, événements mutuellement indépendants.
2. Un ou plusieurs énoncés de théorèmes parmi : théorème de continuité monotone, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales.
3. **Banque CCP** : exercice 101 (2. sans l'argument matrice symétrique réelle).
4. **Banque CCP** : exercice 102 (sans la question sur l'espérance)
5. **Banque CCP** : exercice 103 (sans la question sur l'espérance et la variance)
6. **Banque CCP** : exercice 106 (sans la question sur l'espérance)
7. **Banque CCP** : exercice 108 (sans la question sur l'espérance et la variance)
8. **Banque CCP** : exercice 109