Programme de colle 16

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**
  Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examinateur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.
- **Exercice(s) proposé(s) par l'examinateur**
  Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

Espérance et variance

- **Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe**

  Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, l'espérance de X est la somme, dans $[0,+\infty]$, de la famille $(x\,P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$.

  Pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, égalité $\mathrm{E}(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.

  Une variable aléatoire complexe X est dite d'espérance finie si la famille $(x\,P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X. Notation $X \in L^1$.

  Espérance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson.

  Formule de transfert, linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire. Caractérisation des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ d'espérance nulle.

  Si $|X| \leqslant Y$ et si $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$.

  Si X et Y sont dans L^1 et indépendantes, alors XY est dans L^1 et $E(XY) = E(X)E(Y)$.

  Extension au cas de n variables aléatoires.

- **Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, covariance**.

  Si $\mathrm{E}\left(X^2\right) < +\infty$, X est d'espérance finie. Notation $X \in L^2$.

  Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X et Y sont dans L^2, XY est dans L^1 et $\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}\left(X^2\right)\,\mathrm{E}\left(Y^2\right)$.

  Pour $X \in L^2$, variance et écart type de X. Variables réduites.

  Caractérisation des variables aléatoires de variance nulle.

  Relations $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - \mathrm{E}(X)^2$, $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.

  Variance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson.

  Covariance de deux variables aléatoires de L^2.

  Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes.

  Variance d'une somme de n variables aléatoires, cas de variables décorrélées.

- **Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, loi faible des grands nombres**

- **Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$**

  Détermination de la loi de X par G_X, utilisation de G_X pour calculer l'espérance et la variance, et fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Questions de cours

- Pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, égalité $\mathrm{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.
- Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev : énoncé et preuve.
- Loi faible des grands nombres : énoncé et preuve.
- Fonction génératrice d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$: énoncé et preuve
- Exercices de la banque CCINP : 95, 97, 99, 100, 102, 103 et 111.