I) Sujet CCP 2024

1. Oui, 0 rouge 123 bleu
2. Il s'agit de n, car, comme tous les sommets sont reliés deux à deux, ils ne peuvent pas avoir la même couleur.
3. $\chi(G) \leq n$ car on peut toujours colorier chaque sommet avec une couleur unique.

$\omega(G) \leq \chi(G)$: on a que $K_{\omega(G)}$ est un sous-graphe de G. Donc une coloration de G doit fonctionner pour $K_{\omega(G)}$, et donc elle a au moins $\omega(G)$ couleurs.

4.

```
d1 = {
    0: [1, 2, 3],
    1: [0],
    2: [0]
    3: [0]
}
```

5.

```
def degres_sommets(d):
    return [(len(l), i) for (i, l) in d.items()]
```

6.

```
def tri_degres(d):
    couples = degres_sommets(d)
    tri(couples) #on suppose une fonction in place ?
    return [s for (d, s) in couples]
```

7.

II) Centrale 2024

2.

a) par récurrence

- Un graphe à deux sommets est connexe ssi il a une arrête
- Soit un $G = (S, A)$ graphe connexe avec n sommets.

On a deux cas :
- soit tous les sommets de G sont reliés a au moins 2 arrêtes. Alors on a au moins n arrêtes.
- soit il existe $x \in S$ relié a exactement une arrête.

Alors, soit $G[S \setminus \{x\}]$ le sous graphe induit par les sommets sauf x. $G[S \setminus \{x\}]$ est nécessairement connexe, car, pour deux sommets y et $z \in S \setminus \{x\}$, le chemin entre y et z ne peut pas passer par x.

Alors, par récurrence, $G[S \setminus \{x\}]$ a au moins n - 2 arrêtes.

Or, comme G est connexe, il a au moins une arrête reliée à x, qui n'est donc pas dans $G[S \setminus \{x\}]$. Donc $|A| \geq n - 1$.

b) Si un graphe a $|S|$ arrêtes ou plus, alors il a un cycle.

Par récurrence :
- ok pour 3 sommets (le seul graphe à 3 arrêtes est un triangle)
- Soit $G = (S, A)$, avec $|A| \geq |S|$.

- 1er cas : tous les sommets sont de degrés 2 ou plus. Dans ce cas, considérons une chaine de longueur maximale dans G, $s_1, ..., s_k$. Comme s_k est de degrés 2 ou plus, il existe une arrête $s_k \to x$ tel que $x \neq s_{k-1}$. De plus, comme notre chaine est maximale, on ne peut pas avoir $x \notin \{s_1, ..., s_k\}$, et donc il existe $1 \leq p < k - 1$ tel que $s_k \to s_p$. La chaine $s_p, ..., s_k$ est alors un cycle.
- 2eme cas : il existe un sommet x de degrés 0 ou 1. Dans ce cas, $G[S \setminus \{x\}]$ a au moins $|S| - 1$ arrêtes, et, par récurrence, il a un cycle.

3.

Par définition, G est un arbre $\Leftrightarrow$ G est connexe et sans cycle. En appliquant les deux propriétés de la question 2, on en déduit $|A| \geq |S| - 1$ et $|A| \leq |S| - 1$.

Donc G est un arbre $\Rightarrow |A| = |S| - 1$, et donc implique aussi les propriétés 2 et 3.

Si on montre $2 \Leftrightarrow 3$, cela permet de conclure (car $2 + 3 \Rightarrow 1$ par définition).

Si G n'est pas connexe, alors on a deux composantes connexes $G[X] = (X, A_X)$ et $G[Y] = (Y, A_Y)$ avec $X \sqcup Y = S$ (union disjointe), et aucune arrête reliant X à Y.

Donc toutes les arrêtes de A sont soit dans A_X, soit dans A_Y.

Donc $|A_X| + |A_Y| = |S| - 1 = |X| + |Y| - 1$. Donc soit $A_X \geq |X|$, soit $|A_Y| \geq Y$, et donc d'après la question 2, soit $G[X]$, soit $G[Y]$, ont un cycle.

Inversement, si G a un cycle, on prend X les sommets du cycle, et $G[X] = (X, A_X)$ le sous-graphe associé.

On a forcément $|A_X| \geq |X|$.

Il reste donc, au plus, $|S| - |X| - 1$ arrêtes qui ne sont pas dans $G[X]$.

Or, dire que G est connexe, reviens à dire que le graphe G', où on a fusionné tous les sommets de X en un seul, est connexe (car comme X est un cycle, tous ses sommets sont reliés).

Or, G' a $|S| - |X| + 1$ sommets et $|S| - |X| - 1$ arrêtes. Donc il ne peut pas être connexe. Donc G n'est pas connexe.