Programme de colle 17

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**
  Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examinateur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.

- **Exercice(s) proposé(s) par l'examinateur**
  Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

Espaces préhilbertiens réels

Produit scalaire, norme euclidienne, inégalité de Cauchy-Schwarz.
Vecteurs orthogonaux, algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
Coordonnées dans une base orthonormée, expressions du produit scalaire et de la norme.
Sous-espaces vectoriels orthogonaux. Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie; expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée; caractérisation métrique du projeté orthogonal.

Endomorphismes des espaces euclidiens : le début du chapitre

- **Adjoint d'un endomorphisme**

  Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.

  Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint.

  Matrice de l'adjoint en base orthonormée.

  Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

- **Matrices orthogonales**

  Définition par $A^T.A = \mathrm{I}_n$. Caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.

  Groupe orthogonal.

  Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte.

  Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

Questions de cours

- Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité : énoncé et démonstration.
- Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors $E = F \oplus F^\perp$.
- Caractérisation de $p_F(x)$ à l'aide de $d(x, F)$

- Un exercice

  Soient $(x_1,\dots,x_p)$ une famille de p vecteurs d'un espace euclidien E et G sa matrice de Gram.

  Si $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée de E et si $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_p)$, exprimer G en fonction de A et A^T.

  Montrer que $\mathrm{Ker}(A)=\mathrm{Ker}(A^T.A)$. En déduire que $(x_1,\dots,x_p)$ est libre si et seulement si G est inversible.

- Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien : énoncé et démonstration.

- Preuve de l'un des trois points suivants (au choix de l'examinateur) : linéarité de $u\mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint.

- $\mathrm{Ker}(u^*)=(\mathrm{Im}(u))^\perp$ et $\mathrm{Im}(u^*)=(\mathrm{Ker}(u))^\perp$.

- Matrice de l'adjoint en base orthonormée.

- Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

- Matrice orthogonale. Caractérisation par le caractère orthonormal des colonnes.

- Exercice de la banque CCINP : 63, 77 et 79.