

Programme de colle 18

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**

Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examinateur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.

- **Exercice(s) proposé(s) par l'examinateur**

Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

Endomorphismes des espaces euclidiens

- **Adjoint d'un endomorphisme**

Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.

Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien. Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint.

Matrice de l'adjoint en base orthonormée.

Si le sous-espace F est stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^* .

- **Matrices orthogonales**

Définition par $A^T \cdot A = I_n$. Caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.

Groupe orthogonal.

Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte.

Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.

- **Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien**

Endomorphisme autoadjoint : définition par $u = u^*$.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.

Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée.

Théorème spectral, interprétation matricielle.

- **Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs**

Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Notation $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$. Caractérisation spectrale.

Extension aux matrices.

- **Isométries vectorielles**

Définition par conservation de la norme. Exemples : symétries orthogonales, réflexions.

Caractérisations des isométries de E parmi les endomorphismes de E : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée, par la matrice dans une base orthonormée, par la relation $u^* = u^{-1}$. Groupe orthogonal. Notation $O(E)$.

Déterminant d'une isométrie. Isométrie positive ou directe, négative ou indirecte. Groupe spécial orthogonal. Notation $SO(E)$.

Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2. Interprétation géométrique.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie. Réduction d'une isométrie en base orthonormée.

Cas particulier des isométries directes d'un espace euclidien de dimension 3.

Questions de cours

- Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien : énoncé et démonstration.
- Preuve de l'un des trois points suivants (au choix de l'examineur) : linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint.
- $\text{Ker}(u^*) = (\text{Im}(u))^\perp$ et $\text{Im}(u^*) = (\text{Ker}(u))^\perp$.
- Matrice de l'adjoint en base orthonormée.
- Si le sous-espace F est stable par u , alors $F^\perp$ est stable par u^* .
- Matrice orthogonale. Caractérisation par le caractère orthonormal des colonnes.
- Etant donné $u \in \mathcal{S}(E)$, détermination des extrema de $x \mapsto \langle x, u(x) \rangle$ sur la sphère unité de E .
- Endomorphisme autoadjoint (défini) positif : définition, caractérisation spectrale.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^T \cdot M$.
- Caractérisations des isométries de E parmi les endomorphismes de E : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormale, par la matrice dans une base orthonormale, par la relation $u^* = u^{-1}$.
- Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie.
- Réduction d'une isométrie en base orthonormée : énoncé et démonstration.
- Exercices de la banque CCINP : 63, 66, 68 et 78