

Programme de colle 19

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**

Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examinateur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.

- **Exercice(s) proposé(s) par l'examinateur**

Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

Intégrales à paramètre

- **Révisions : passage à la limite sous l'intégrale**

Théorème de convergence dominée

Théorème d'intégration terme à terme: interversion série-intégrale sur un intervalle quelconque sous l'hypothèse de convergence de $\sum \int_I |u_n(x)| dx$

- **Intégrales dépendant d'un paramètre**

Le cadre est celui des fonctions définies sur une partie A d'un espace vectoriel normé E de dimension finie à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ par une relation $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$.

- Passage à la limite et continuité de g sous hypothèse de domination.
- Caractère C^k de g avec domination de la dernière dérivée (quand A est un intervalle de $\mathbb{R}$). Expression des dérivées de g .

La définition et les propriétés élémentaires de la fonction Gamma ne sont plus au programme qu'à titre d'exemples.

Questions de cours

- Continuité, ou classe C^1 , ou classe C^∞ de la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.
- Exercices de la banque CCINP : 25, 26, 27, 30 et 50.
- Orthodiagonalisation d'une matrice symétrique réelle de taille 2 ou 3 au choix de l'examinateur.
- Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$(\forall X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, X^T A X > 0) \Leftrightarrow \text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_*^+.$$

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à $S_n^+(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^T \cdot M$.
- Etant donné $u \in \mathcal{S}(E)$, détermination des extrema de $x \mapsto \langle x, u(x) \rangle$ sur la sphère unité de E .