

Programme de colle 20

Chaque colle se déroule en deux parties :

- **Une question de cours ou un exercice de la banque CCINP**

Cette partie dure **au maximum 15 minutes** et est notée sur **8 points**. L'examinateur doit s'assurer que l'étudiant maîtrise parfaitement le fond et les détails.

- **Exercice(s) proposé(s) par l'examinateur**

Cette partie est notée sur **12 points**. Les critères d'évaluation sont la connaissance du **cours** et des **méthodes**, la capacité à **structurer sa démarche** et à prendre des **initiatives**, la capacité à **analyser le résultat** d'une démarche et, si nécessaire, à en changer, **l'aisance à l'oral et le dynamisme**.

Parties compactes d'un espace vectoriel normé

Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. Une partie compacte est fermée et bornée.
 Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.
 Produit d'une famille finie de compacts.
 Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.
 Image d'une partie compacte par une application continue.
 Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes.
 Théorème de Heine.

Révisions de MPSI : équations différentielles

- **Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1**

Méthode de la variation de la constante, existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Etude de raccords. Application à la recherche de développements en série entière.

- **Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients constants.**

Fonctions vectorielles de la variable réelle

- **Dérivation des fonctions vectorielles**

Définition, dérivation et applications coordonnées.

Propriétés, dérivation de $t \mapsto u(f(t))$ avec u linéaire et $t \mapsto B(f(t), g(t))$ avec B bilinéaire.

Fonctions de classe C^k : formule de Leibniz, formule de Taylor-Young.

- **Intégration sur un segment des fonctions vectorielles**

Définition par intégration des fonctions coordonnées.

Propriétés : sommes de Riemann, inégalité triangulaire, lien entre calcul différentiel et calcul intégral, formule de Taylor avec reste intégral et inégalité de Taylor Lagrange.

- **Suites et séries de fonctions vectorielles de la variable réelle**

Brève extension du cours sur les suites et séries de fonctions numériques.

Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice carrée: continuité de l'exponentielle, exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent, dérivation de l'application $t \mapsto \exp(ta)$.

Questions de cours

- L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Exercices de la banque CCINP : 3, 4, 13 et 42