Exercices sur les Intégrales

1)**(L04) **DL de sommes de Riemann.** Soit $f \in \mathcal{C}^2[0,1]$ et $u_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n})$, $v_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n-1} f(\frac{i}{n}) + \frac{f(0)+f(1)}{2n}$.
Déterminer un DL de u_n à l'ordre 2 en puissances de $\frac{1}{n}$ puis faire de même pour v_n et comparer les résultats. En déduire une méthode de calcul approché d'intégrale d'une fonction dont on connait la dérivée. *Indication: utiliser Taylor-Lagrange pour avoir les deux premiers termes puis recommencer avec f' à la place de f pour le troisième.*

2)*(C08) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{nk}$ (k étant un entier fixé)

3)*(M00) Soit $f \in \mathcal{C}^1[0,1]$. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f(\frac{i}{n})f'(\frac{i+1}{n})$

4)*(M07) Calculer: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)}$.

5)**(M06) Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, à valeurs réelles. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta \geqslant 0$ tel que si $\sigma = (x_i)$ est une subdivision de $[a,b]$ de pas $|\sigma| \leqslant \delta$ alors

$$\Big|\int_{[a,b]} |f| - \sum_{i=0}^{n-1}\Big|\int_{[x_i,x_{i+1}]} f\Big|\Big| \leqslant \varepsilon \,.$$

Cas des fonctions continues par morceaux à valeurs complexes ?

6)**(X06) **Couper en parts égales.** Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$, positive, et $S(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$; soit $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant i \leqslant n$; montrer que: $S(x_i) = \dfrac{iS(b)}{n}$ définit un unique x_i; prouver: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) = \dfrac{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$

7)**(X07) Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, à valeurs complexes. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour toute subdivision $\sigma = (x_i)$ de $[a,b]$ de pas $|\sigma| \leqslant \delta$ et tous choix de points y_i, z_i appartenant à $[x_i, x_{i+1}]$ on ait

$$|\int_{[a,b]} fg - \sum_{i=0}^{n-1} f(y_i)g(z_i)(x_{i+1}-x_i)| \leqslant \varepsilon \,.$$

8)*(C02) Soit f continue par morceaux sur $[1,e]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Trouver $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^{1+1/n} nf(t^n)\,\mathrm{d}t$.

9)**(M03) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $]0,+\infty[$ de classe C^∞. On suppose que $\dfrac{f'}{f}$ tend vers 0^+ en $+\infty$; et l'on se donne une suite réelle convergente a_n de limite $a \neq 0$. Montrer que $\sum\limits_0^n a_p f(p) \sim a\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

10)*(C08) Montrer: $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^3} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3k+1}$.

11)*(M02) Calculer $J_{pq} = \displaystyle\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$ pour p, q entiers.

Rayon de convergence puis calcul de $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}x^n$.

12)$^{*\mu}$(C08) Soit $u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$. Convergence de (u_n) et développement asymtotique. Étudier de même $v_n = \displaystyle\int_0^n \mathrm{d}t1 + t^n$.

13)**(X04) Soit f continue sur $[0,1]$, et $g(x)=\left(\int_0^1 |f(t)|^x dt\right)^{1/x}$.

a) Montrer que: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \operatorname*{Sup}\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$

b) On suppose que f est strictement positive. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$. Généraliser au cas où f ne s'annule qu'en des points isolés. Que dire si f s'annule sur un intervalle ?

14)**(U03) Soit $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, croissante et $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) On suppose qu'il existe $\alpha>0$ tel que, au voisinage de $+\infty$, $\quad F(x)\sim\dfrac{x^\alpha}{\alpha}$. Montrer que, au voisinage de $+\infty$, $\quad f(x)\sim x^{\alpha-1}$.

b) On suppose que, au voisinage de $+\infty$, $F(x)=x^2+o(x)$. Montrer que l'on a, au voisinage de $+\infty$, $f(x)=2x+o(\sqrt{x})$.

15)**(U06) Soit f continue sur $[0,1]$, telle que $f(0)=1$ et $0\leqslant f(x)<1$ sur $]0,1]$. Quelle est la limite de $I_n=\int_0^1 f(t)^n\,\mathrm{d}t$? Montrer que $\varphi_n(x)=\dfrac{f(x)^n}{I_n}$ converge uniformément sur tout compact de $[0,1[$.

16)*(C00) Soit $I_n=\int_0^{\pi/4}\tan^n x\,\mathrm{d}x$. Exprimer I_n sous forme d'une somme, puis donner un équivalent de I_n lorsque n tend vers l'infini. Qu'en déduit-on sur $\frac{\pi}{4}$?

17)**(X05) Soit une fonction f continue sur $\mathbb{R}$, et g définie sur $\mathbb{R}^*$ par: $g(x)=\dfrac{1}{x}\int_0^x\cos(y-x)f(y)\,\mathrm{d}y$. Trouver la limite de g en 0; en supposant que f a une limite en $+\infty$, trouver celle de g (si elle existe).

18)*(M04) Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue par morceaux et $I_n=\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Quelle est la limite de I_n ? donner un équivalent de I_n.

b) En supposant f de classe $\mathcal{C}^1$ donner un DL_2 de I_n.

c) En supposant f de classe $\mathcal{C}^\infty$, étudier le DL_n de I_n.

19)*(M03) Étudier $\int_{ax}^{bx}\dfrac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers 0 (limite, DL).

20)*(C07) Trouver $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^1\dfrac{xf(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$, avec f continue sur $[0,1]$ et $f(0)=0$; généralisation au cas $f(0)\neq 0$.

21)*(C09) Soient $a,b>0$. Montrer $\lim\limits_{x\to 1}\int_{x^a}^{x^b}\dfrac{dt}{\ln t}=\ln\dfrac{b}{a}$.

22)**(C04) Étudier $G(x)=\dfrac{1}{E(x^2)^2}\int_0^x tE(t^2)\,\mathrm{d}t$, E désignant la partie entière. Notamment, trouver $\lim\limits_{+\infty} G(x)$.

23)*(M05) Limite et équivalent de $I_n=\int_0^1\dfrac{t^n}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$ et de $J_n=\int_0^1\dfrac{t^n\operatorname{ch}t}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$. *Indication:* $I_n\sim\dfrac{K}{2^n}$

24)**(X05) **La haute fréquence donne une moyenne.** Soit f continue sur $[0,2\pi]$. Étudier la convergence et la limite de: $\int_0^{2\pi}\dfrac{f(t)}{3+2\cos(nt)}\,\mathrm{d}t$. *Indication: partager l'intervalle d'intégration en parties égales. Penser au théorème général sur les sommes de Riemann.*

25)*(M02) Étudier et tracer $f(x)=\int_{1/x}^{x^2}\frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,\mathrm{d}t$.

26)*(M08) Étude de $f(x)=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{t^3+x^3}}$ (définition, équivalents).

27)**(L02) On considère un fonction $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ à support compact et $\hat{f}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\exp(itx)\,\mathrm{d}t$.

a) Si f est $\mathcal{C}^2$, montrer que $\hat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\hat{f}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

c) Montrer que $\hat{f}$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

d) Si $f\neq 0$, montrer que $\hat{f}$ n'est pas à support compact.

28)*(M05) Étude de $f(x)=\displaystyle\int_{1/x}^{x}\exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$: continuité, équivalent en 0, dérivée, etc...

29)*(C05) Étude de $f(x)=\displaystyle\int_{x}^{x^2}\frac{e^t}{\operatorname{Arcsin} t}\,\mathrm{d}t$: continuité, équivalent en 0, dérivée.

30)*(M08) Étude de $x\mapsto\displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

31)*(C09) Soit $f(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x\frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ (pour $x\neq 0$).

a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

b) Montrer que $f(\frac{1}{x})=x^2f(x)$ pour tout $x\neq 0$. En déduire un développement asymptotique de f en $+\infty$.

c) Variations et courbe.

32)**(M08) **Inégalité de Young.** Soit une application f strictement croissante, continue sur $[0,a]$, telle que $f(0)=0$. Soit g la réciproque de f; montrer que pour $0\leqslant x\leqslant a$ et $0\leqslant y\leqslant f(a)$ on a: $xy\leqslant H(x,y)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+\int_0^y g(u)\,\mathrm{d}u$ et discuter le cas d'égalité. *Indication: comme on ne suppose pas que f est dérivable, il y a une difficulté lorsque l'on tente de dériver $H(x,f(x))$. Il faut donc revenir à la définition de la dérivée comme limite de taux d'accroissements.*

33)(C04) Soit $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}_+^*)$. On note E l'ensemble des fonctions définies continues et strictement positives sur $I=[a,b]$; soit ϕ l'application définie sur E par $\phi(f)=\displaystyle\int_I f(x)\,\mathrm{d}x\int_I\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$.

a) Montrer que ϕ admet un minimum m sur E et déterminer toutes les fonctions f telles que $\phi(f)=m$.

b) Montrer que ϕ n'est pas majorée sur E. Déterminer $\phi(E)$.

c) Montrer que tout $\mu>(b-a)^2$ admet une infinité d'antécédents pour ϕ, non proportionnels deux à deux.

34)*(M02) Déterminer les applications continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telles que $\forall\, x\geqslant 0,\ f(x)\leqslant\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

35)*(M08) Soit une fonction f continue et positive sur $[1,+\infty[$. On suppose qu'il existe a,b tels que pour tout x on ait $f(x)\leqslant a\displaystyle\int_1^x\frac{f(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t+b$. Montrer que f est bornée.

36)**(E08) **a**) Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. A quelle condition a-t-on $\displaystyle\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x=\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right|$? *Indication: on peut utiliser f^+,f^-.*

b) Même question pour une fonction à valeurs dans un espace euclidien. *Indication: c'est plus subtil. Pour réutiliser le 1°, introduire une base orthonormale $(e_1,\dots,e_n)$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ soit colinéaire à e_1; ainsi, on peut projeter. Pour des normes quelconques c'est aussi exact mais il faut introduire $V(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.*

37)**(L05) **Inégalité de Jensen.** Soit φ une application convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. **a**) Montrer que si f est réelle et continue sur $[a,b]$, alors: $\varphi\Big(\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big)\leqslant\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b\varphi(f(t))\,\mathrm{d}t$ *Indication: fonctions caractéristiques d'intervalles ou sommes de Riemann.*

b) On suppose, de plus, que φ est strictement convexe. Montrer que dans l'inégalité ci-dessus il y a égalité si et seulement si f est constante.

38)*(C05) Soit $I=[a,b]$ et f,g deux fonctions continues sur I, f étant décroissante et g prenant ses valeurs dans $[0,1]$, et $J=\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer que: $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^{a+J}f(x)\,\mathrm{d}x$ et étudier le cas d'égalité lorsque $g(I)\subset]0,1[$ ou lorsque f est strictement décroissante. *Indication: remplacer b par une variable y.*

39)*(M06) Soit $f\in\mathcal{C}^1[a,b]$, telle que $f(a)=f(b)=0$. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que: $|f'(c)|\geqslant\dfrac{4}{(b-a)^2}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. *Indication: ramener à $[-1,1]$, introduire $\|f'\|_\infty$ qui est atteinte par f ou $-f$ quelque part.*

40)**(U05) Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer qu'il existe une constante c indépendante de f et telle que

$$c\Big(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\Big)^2+\int_0^1 f'(x)^2\,\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x$$

puis trouver la meilleure constante c possible. *Indication: coefficients de Fourier.*

41)*(C02) Soit K un convexe fermé de $\mathbb{C}$, f continue de $[0,1]$ dans K et g continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\displaystyle\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t=1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\in K$. *Indication: fonctions en escalier*

42)**(X04) Trouver $a,b,c\in\mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\int_0^1\big(\ln(t)-a-bt-ct^2\big)^2\,\mathrm{d}t$ soit minimale.

43)*(M02) Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^1\frac{x\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

44)*(M02) Trouver les primitives de $\sqrt{1+\sin(2x)}$.

45)**(U02) Soit φ strictement concave, de classe $\mathcal{C}^2$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(0)<0$ et $\varphi(1)<0$. Soit A_φ l'ensemble des applications u, continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, telles que $u(0)=u(1)=0$ et $u\geqslant\varphi$. Déterminer $\displaystyle\operatorname*{Inf}_{A_\varphi}\int_0^1 u'^2(t)\,\mathrm{d}t$ et, le cas échéant, caractériser les u atteignant cette borne inférieure.

46)**(U08) Soit f continue sur $[0,1]$ et à valeurs réelles strictement positives.

a) Montrer que $(S):\begin{cases}u''=-f\\ u(0)=u(1)=0\end{cases}$ admet une unique solution.

b) Montrer que (S) équivaut à

$$\forall v\in\mathcal{C}^1(]0,1[,\mathbb{R})\cap\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})\quad\int_0^1 u'(t)v'(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1 f(t)v(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

47)**(X07) **Une équation de Fredholm.** Soient $\lambda\in\mathbb{R}$, $K:[a,b]^2\to\mathbb{R}$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continues, $M=\|K\|_\infty$. On cherche les fonctions g continues par morceaux sur $[a,b]$ telles que: $\forall x\in[a,b], g(x)=\lambda\displaystyle\int_a^b K(x,y)g(y)\,\mathrm{d}y\;+\;f(x)$.

a) Montrer que toute solution g est en fait continue.

b) Montrer que si $M(b-a)\lambda<1$, il y a au plus une solution.

c) On pose $h_0=f$ et pour tout n: $h_{n+1}(x)=\displaystyle\int_a^b K(x,y)h_n(y)\,dy$. Montrer que la suite de fonctions (h_n) est bien définie et que, si $M(b-a)\lambda<1$, la série $g=\displaystyle\sum_{p\in N}\lambda^p h_p$ converge sur $[a,b]$.

d) Montrer que g est solution du problème.

48)*(C00) **Opérateur de primitivation.** Soit T l'endomorphisme de $E=\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ défini par $Tf(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que T est une application linéaire continue.

b) Montrer que $\mathrm{Id}-T$ est surjective. *Indication: On pourra utiliser une série.*

c) Montrer que $\mathrm{Id}-T$ est un homéomorphisme de E sur E.

49)* Caractériser f réelle et continue sur $\mathbb{R}$ telle que: $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_{x-y}^{x+y} f(t)\,\mathrm{d}t=f(x)f(y)$.

50)***(U05) **Fonction singulière de Cantor-Lebesgue.** On note K l'ensemble des éléments de $[0,1]$ de la forme $x=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\varepsilon_k}{3^k}\in[0,1]$, avec $\varepsilon_k=0$ ou 1. Pour un tel x on pose $f(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_k}{2^k}$.

a) Montrer que f est continue et croissante.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x$.

51)**(X08) Trouver les fonctions g continues sur $\mathbb{R}_+$ telles que $g(x) > 0$ et $x\displaystyle\int_0^x g^2(t)\,\mathrm{d}t = 2\Big(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\Big)^2$ pour tout $x > 0$.

52)***(L08) **Produit infini du sinus.**

Soit $I_n(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos(2xt)\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$. Calculer I_0 et déterminer la relation de récurrence sur la suite (I_n); en examinant la limite de $\dfrac{I_n(x)}{I_n(0)}$ obtenir l'expression du sinus comme limite d'un "produit infini" (Euler). *Indication: couper les intégrales pour montrer que* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2(xt)\cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$ *est négligeable devant* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\,\mathrm{d}t$*; ou majorer* $\sin^2(xt)$ *par* $\dfrac{\pi x^2}{2}\sin^2 t$.

53)**(X04) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, telle que $g(0) = 0$, et soient $b > 0, c > 0$. Montrer qu'il existe $a > 0$ et $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, unique, telle que pour tout t on ait $f(t) = b + g(t) + c\displaystyle\int_0^t \frac{ds}{f(s)}$. *Indication: appliquer le théorème du Point Fixe dans l'ensemble des fonctions continues φ sur $[0, a]$, telles que $\varphi(0) = b$ et $|\varphi(t) - b| \leqslant \dfrac{b}{2}$ sur $[0, a]$.*

54)**(L05) On ne considère que des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note 0 l'espace des fonctions continues à support compact, et 1 celui des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact.

a) Soit $f \in \mathcal{C}^0$ telle que $\forall\varphi \in 0$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\varphi = 0$. Montrer que $f = 0$.

b) Soit $f \in \mathcal{C}^0$ telle que $\forall\varphi \in 1$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = 0$. Montrer que f est constante.

c) Soit $f \in \mathcal{C}^0$ telle qu'il existe $g \in \mathcal{C}^1$ telle que $\forall\varphi \in 1$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\varphi' = \int_{\mathbb{R}} g\varphi$. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$.

55)**(L08) **Fonctions de Rademacher.** On définit sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $f_0(x) = (-1)^{E(x)}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) = f_n(2^n x)$.

a) Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(x)f_k(x)\,\mathrm{d}x = \delta_n^k$.

b) Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On pose $a_k = \displaystyle\int_0^1 f_k(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Démontrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

c) Soit $(i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $0 \leqslant i_1 < \ldots < i_n$. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f_{i_1}(x)\ldots f_{i_n}(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

d) Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \prod_{i=0}^n f_i(x)\,\mathrm{d}x = \prod_{i=0}^n \int_0^1 f_i(x)\,\mathrm{d}x$.

e) Démontrer que: $\displaystyle\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

56)*(M02) Soit g continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et u qui à g associe $u(g)$ définie par $\forall x \in [0, 1]$, $u(g)(x) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{Inf}(x, t)g(t)\,\mathrm{d}t$. Résoudre $u(g) = \lambda g$, pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

57)*(M08) Soit $F(\rho, \theta) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln|e^{it} - \rho e^{i\theta}|\,\mathrm{d}t$ pour $\rho \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que F ne dépend pas de θ.

b) Calculer $F'(\rho)$ et en déduire F.

c) On peut aussi calculer F par sommes de Riemann et factorisation polynomiale.

d) On peut encore calculer F par des équations fonctionnelles liant $F(\frac{1}{\rho})$ et $F(\rho)$, ainsi que $F(\rho^2)$ et $F(\rho)$.

e) Et enfin tenter une intégration par parties et un développement en série entière d'une fonction rationnelle.

58)**(X06) Ensemble de définition de $f(x, t) = (x^2 - 2xt + 1)^{-\frac{1}{2}}$. Continuité; dérivée partielle par rapport à x. Soit $\varphi(x) = \displaystyle\int_{-1}^1 f(x, t)dt$. Montrer que φ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

59)**(L09) Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + a\cos x)}{\cos x}\,\mathrm{d}x$ pour $|a| < 1$.

60)*(M06) Montrer que: $\forall\lambda \in [0,1[\ \exists!\mu \ / \ \int_0^1 1 - e^{-\mu/t^2}\,\mathrm{d}t = \lambda$.

61)*(C08) Calculer ces intégrales. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^n}$ $\int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} - \mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$ $\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t(1-t)^3}}\,\mathrm{d}t$ $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln x}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\tan x(1-\tan x)}}$ $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)\sqrt{1-x^2}}$ $\int_0^{\pi/4} \frac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos(2t)}}\,\mathrm{d}t$.

62)**(X02) Que pensez-vous de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$? Calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x.\,\mathrm{d}x}{1-x^2}$.

63)*(M09) Montrer que $f(x) = \cos x \ln\big(\tan x\big)$ est intégrable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. Calculer $\int_0^{\pi/2} f(x)\,\mathrm{d}x$.*Indication: d'abord* $\int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

64)**(C06) Pour quelles valeurs réelles de y, $f(x) = e^{-xy}\sin x$ est-elle intégrable ? Trouver une primitive de $e^{x(i-y)}$, puis une primitive de f. Calculer $\int_0^{\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

65)**(X08) Existence et calcul de $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Indication: $\int_0^{\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ *est nulle (couper).*

66)**(M02) La fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2|\sin x|}$ est-elle intégrable sur $[0,+\infty[$?

67)**(M04) Déterminer $\lim_{X\to+\infty} \int_{-X}^{X} \frac{1}{x+ia}\,\mathrm{d}x$, où $a \in \mathbb{R}^*$. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x-t+ia)(t+ib)}$ t, où a, $b \in \mathbb{R}^*$.

68)**(X02) Étudier l'existence de $\int_{]0,1]} |\sin \frac{\pi}{x}|^{1/x}\,\mathrm{d}x$.

69)*(M05) Intégrabilité de $\frac{\sqrt{x-1}}{x^3\ln x}$ sur $]1,+\infty[$.

70)**(X07) Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, telle que f et f'^2 soient intégrables. Montrer que f tend vers 0 à l'infini. *Indication: Voir* $f.|f|^{-1/2}$. Montrer aussi que f est hölderienne (i.e. qu'il existe M et $\alpha > 0$ tels que $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^{\alpha}$ pour tous x, y).

71) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et intégrable. Montrer qu'il existe une suite (x_n) de limite $+\infty$ telle que $x_n f(x_n)$ tende vers 0. *Indication: Étudier* $\operatorname*{Inf}_{x\geqslant A} |xf(x)|$.

72)**(C04) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$, intégrable sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Montrer qu'il existe $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue, croissante, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$, telle que le produit fg soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On commencera par le cas où f est l'application $t \to (t+1)^{-\mu}$ avec μ réel.

Dans le cas général, on pourra construire une suite croissante (x_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{x_n}^{+\infty} f \leqslant \frac{1}{2^n}$ ·

73)**(C07) Soit f uniformément continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\lim_{+\infty} f(x) = 0$ et que f^2 est intégrable.

74)**(L08) Soit une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ et k-lipschitzienne. **a**) Montrer que f est bornée et que $\|f\|_{\infty}^2 \leqslant k\|f\|_1$. *Indication: intégrer* $|f(x+t)|$ *par rapport à* t *sur* $[-\beta,\beta]$ *pour* β *bien choisi.*

b) Montrer que la constante k dans l'inégalité précédente est optimale. *Indication: une fonction affine par morceaux judicieusement choisie fera l'affaire.*

c) En déduire que f est de carré intégrable.

75)*(C02) Soit E l'espace des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, et admettant une période rationnelle.

a) Montrer que E est un espace vectoriel de dimension infinie.

b) Soit, pour $f \in E$, $\varphi_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f^2(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$. Montrer que $\varphi_f(x)$ admet une limite $u(f)$ quand x tend vers $+\infty$.

c) Montrer que u est une forme quadratique définie positive sur E, donner sa forme polaire puis une famille orthonormale infinie.

76)**(L04) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ telle que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_a^b t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est nulle sur $[a,b]$. *Indication: Weierstrass*

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n \exp((i-1)t)\,\mathrm{d}t$.

Trouver une fonction continue $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. *Indication: On pourra calculer les parties réelle et imaginaire de I_n.*

77)***(X07) **Réarrangement décroissant.** Soit (u_n) une suite réelle positive, de limite nulle. On note, pour $x > 0$, $N(x)$ le nombre de termes de la suite supérieurs ou égaux à x. Prouver que $N(x)$ est bien défini, que $\sum u_n$ converge si, et seulement si N est intégrable sur $]0,+\infty[$ et qu'en ce cas $\displaystyle\int_0^{\infty} N = \sum u_n$. *Indication: essayer l'exemple: $(u_n) = (1,2,3,1,2,4,5,3,0,0,0,\ldots)$ représenter N, découvrir le réarrangement décroissant, et regarder les aires. Noter que, N étant décroissante, si N est intégrable alors $\displaystyle\lim_{x\to 0} xN(x) = 0$. Le théorème de convergence monotone est utile.*

78)**(X08) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue intégrable. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-n\sin^2 x} f(x)\,\mathrm{d}x$. *Indication: découper et minorer le sinus entre 0 et 1/2.*

79)*(X08) Soit une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, dérivable. Déterminer, si elle existe, la limite de $\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x+i\varepsilon}\,\mathrm{d}x$ quand ε tend vers 0. Généraliser.

80)**(C04) Existence et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$, puis de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{e^t-1}\,\mathrm{d}t$ et enfin de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{e^t+1}\,\mathrm{d}t$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

81)*(C02) **a**) Soit $I(\alpha) = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Déterminer des équivalents simples de $I(\alpha)$ et $J(\alpha)$ pour α tendant vers ∞.

b) Soit une fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{e^{-nt}}{\sqrt{t}} f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$. On distinguera les cas $f(0) = 0$ et $f(0) \neq 0$.

82)**(M08) Soit f continue sur $[1,+\infty[$ à valeurs strictement positives, telle que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{xf'(x)}{f(x)} = C$ existe, soit non nulle et supérieure à -1. Montrer que f n'est pas intégrable et que $\displaystyle\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est équivalent à $\dfrac{xf(x)}{C+1}$. Montrer que cela reste vrai pour $C = 0$. Que dire si $C < -1$?

83)$^{\mu}$(M08) Équivalent au voisinage de l'infini de $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

84)**(X06) Soit $f_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$.

a) Examiner la convergence de cette suite de fonctions (simple, uniforme, en moyenne).

b) Si g est une fonction continue et intégrable sur $\mathbb{R}$ calculer: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} g(t) f_n(t)\,\mathrm{d}t$. *Indication: découper. Réponse: c'est $g(0)$.*

85)*(C06) Soit une fonction f intégrable sur $[1,+\infty[$.

a) Justifier l'existence de $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, selon α.

b) Limite de l'intégrale précédente lorsque α tend vers $+\infty$?

c) Préciser cette information (équivalent...) si de plus $f(1) \neq 0$. *Indication: Deux méthodes possibles: soit découper; soit poser $u = t^\alpha$ et utiliser les puissants théorèmes du cours.*

86)**(M05) Soit $I_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} e^{-ax}\, \mathrm{d}x$ pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$. Existence de I_n? Étudier $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$.

87) Étudier $\displaystyle\int_0^x \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}\, \mathrm{d}t$ et limite quand x tend vers 0.

88)*(M08) Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t$.

89)*(M07) Étudier l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{a-2}}{1+t^a}\, \mathrm{d}t$: existence, limite lorsque a tend vers l'infini.

90) Soit $I(\lambda) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^\lambda}$ pour λ réel. Déterminer le domaine de définition puis un équivalent de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers l'infini. *Indication: d'abord λ entier; la formule de Stirling peut servir.*

91)(M) Étudier l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x^n \ln(\sin x)\, \mathrm{d}x$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.

92) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, intégrable. Montrer que $\displaystyle\int_0^x t f(t)\, \mathrm{d}t = o(x)$. *Indication: primitive*

93) Étudier $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{x^n - 1}\, \mathrm{d}x$ (existence, limite).

94)(M95) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ et $F(a,b) = \displaystyle\int_a^b \frac{f(t)}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}\, \mathrm{d}t$. Définition de F, limite de $F(a,b)$ quand b tend vers a.

95)**(C04) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Étudier la convergence de la suite $\displaystyle\left(\int_a^b f(t)\sin(nt)\, \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \tfrac{\sin(2nt)\cos(t)}{\sin(t)}\, \mathrm{d}t$.

À l'aide de $g(t) = \mathrm{cotan}(t) - \frac{1}{t}$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \tfrac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u$.

On note $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln\sin(t/2)\cos(nt)\, \mathrm{d}t$. Limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et équivalent quand n tend vers l'infini ?

96)**(L04) Montrer la convergence de $I = \displaystyle\int_{\to-\infty}^{\to+\infty} e^{-it^2/2}\, \mathrm{d}t$.

Soit alors g définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $\displaystyle\int_a^b f(t) e^{-ixt^2/2}\, \mathrm{d}t$; montrer que $g(x) = \frac{f(0)I}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

97)**(M05) Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{\to\infty} \sum_{k=1}^n \mu_k \cos(\mu_k x) \frac{\mathrm{d}x}{x}$, les μ_k étant des nombres réels tels que $\sum \mu_k = 0$.

98)*(M08) Soit f application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ continue. **a**) On suppose que $l = \displaystyle\lim_{+\infty} f$ et $m = \lim_0 f$ existent. Démontrer, que pour $0 < a < b$: $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to+\infty} \frac{1}{t}(f(bt) - f(at))\, \mathrm{d}t = (l-m)\ln\frac{b}{a}$. *Indication: découper, recoller, évaluer...*

b) Même question, en supposant cette fois qu'il existe l et m tels que $\displaystyle\int_{\to 1}^{\to+\infty} \frac{1}{t}(f(t) - l)\, \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{\to 0}^{\to 1} \frac{1}{t}(f(t) - m)\, \mathrm{d}t$ convergent.

c) Calculer: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}(e^{-t} - e^{-2t})\, \mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^{\to+\infty} \frac{1}{t}(\cos t - \cos 2t)\, \mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x(t-1)}{\ln(t)}\, \mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^\infty \tfrac{\mathrm{Arctan}(tx) - \mathrm{Arctan}(t)}{t}\, \mathrm{d}t$.

99)*(C07) Montrer que $I = \displaystyle\int_0^\pi \ln(\sin\tfrac{t}{2})\, \mathrm{d}t = -\pi\ln 2$. *Indication: on peut y associer $J = \displaystyle\int_0^\pi \ln(\cos\tfrac{t}{2})\, \mathrm{d}t$, ou tenter une somme de Riemann en justifiant la convergence de celle-ci par monotonie.*

100)**(M05) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - p^2}}$. *Indication: on peut traiter la somme de Riemann comme intégrale d'une fonction en escalier et songer au théorème de convergence dominée.*