Intégrales ; intégrales à paramètre

1)*(C08) Existence et calcul de $\int_0^1 \frac{1}{t} - E(\frac{1}{t})dt$.

2)*(M09) Montrer que pour $x > 0$, on a : $\int_x^{+\infty} \frac{sin^3 t}{t^2}\,dt = \frac{3}{4}\int_x^{3x} \frac{sint}{t^2}\,dt$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{sin^3 t}{t^2}\,dt$

3)**(X05) Etablir l'existence de $f : \mathbb{R}+^* \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1}{e^t-1}\,dt$ (resp. $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{sint}{t}\,dt$). Prouver l'existence de $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et donner sa valeur.

4)***(X07) **Formule de Stirling.**

a) Evaluer, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \int_{-n}^{+\infty} (1+\frac{t}{n})^n e^{-t} dt$.

b) Donner un équivalent, lorque $n \to +\infty$, de $J_n = \int_{-n}^{n} (1+\frac{t}{n})^n e^{-t} dt$.

c) En déduire la formule de Stirling.

5)**(C)/M/X...

Existence et valeur de $\lim_{n\to+\infty}$ de $I_n =$

a) $\int_0^{+\infty}$ arctan $(nx)e^{-x^n}dx$.

b) $\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{n^2+t^2}\,dt$, où f est continue bornée sur $\mathbb{R}$.

c) $n\int_1^{1+1/n} f(t^n)dt$, où f est continue sur $[1, e]$.

d) $\int_0^n (1-\frac{t}{n})^n \ln(t) dt$; en déduire la valeur de $\Gamma'(1)$.

6)***(U07) Soit $f : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}$, continue et vérifiant $f(x) = O(\frac{1}{x^2})$ lorsque $x \to +\infty$. Etudier la limite quand h tend vers 0^+ de $\phi(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} hf(nh)$.

7)**(X02) Existence et équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $I_n = \int_0^{+\infty} sin(t^n)dt$.

8)**(E04) **Théorème de convergence monotone.** Soit (f_n) une suite d'applications positives, continues par morceaux et intégrables sur I ; on suppose que la suite (f_n) converge simplement en croissant vers f continue par morceaux. Montrer que f est intégrable sur I si et seulement si la suite $I_n = \int_I f_n$ converge, et que dans ce cas $\int_I f = lim(\int_I f_n)$.

9)**(U08) **D'Alembert-Gauss par l'indice.**

a) Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^*$ 2π-périodique et $\mathcal{C}^1$. On pose $d(f) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt$. Montrer que $d(f) \in \mathbb{Z}$; donner une interprétation géométrique.

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On suppose que P ne s'annule pas sur $\mathbb{C}$, et on considère, pour $r \geqslant 0$: $f_r(t) = P(re^{it})$. En étudiant les variations de $d(f_r)$, aboutir à une contradiction.

10)**(X07) Soit f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continue intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $F(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(x+t) - f(t)|dt$. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$, et étudier son comportement lorsque x tend vers 0 ou $+\infty$.

11)**(M05) Soit pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}$: $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} e^{-ax}\,\mathrm{d}x$. Existence et limite de I_n.

12)*(M01) Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

13)**(L08) Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ continue et bornée, et $m(x,t) = \frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(x)\,\mathrm{d}x$, puis $M(f)(x) = \operatorname{Sup}_{t\geqslant 0} m(x,t)$.

a) Montrer que l'on a pour tout x: $f(x) \leqslant M(f)(x) \leqslant \operatorname{Sup} f$.

b) Montrer que Mf est continue.

c) On suppose que f est intégrable, $\int_{\mathbb{R}} f = I$ et $\lim_{x\to\pm\infty} xf(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} xm(x,t) = 0$ (à t fixé).

d) Soit $\alpha \in]0,1[$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{Sup}_{t<(1-\alpha)x} |x|m(x,t) = 0$. Que vaut $\lim_{x\to+\infty} |x|m(x,(1+\alpha)x)$?

e) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} xMf(x) = \frac{1}{2} I$.

14)*(C05) Soit $I_a(x) = \int_0^{\infty} \frac{t \operatorname{Arctan} 1/t}{(x^2+t^2)^a}\, \mathrm{d}t$.

a) Pour quels a I_a est-elle définie sur $\mathbb{R}_+^*$? Calculer I_2.

b) Limites de I_1 en 0 et $+\infty$.

c) Dérivabilité de I_1. Calculer I_1.

15)**(M07) Soit $u_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+1)(x^2+n)}}$. Limite et équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.

16)**(M05) Étudier l'existence des limites suivantes, et comparer leurs valeurs:

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^1 \frac{\sin tx}{t}\, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\infty} \int_0^1 e^{t^2} \frac{\sin tx}{t}\, \mathrm{d}t$$

17)**(C04) Soit $I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^\lambda}$ pour λ réel. Déterminer le domaine de définition puis un équivalent de $I(\lambda)$ lorsque λ tend vers l'infini. *Indication: d'abord λ entier; la formule de Stirling peut servir.*

18)*(M02) Étudier l'intégrale $\int_0^{\pi/4} x^n \ln(\sin x)\, \mathrm{d}x$ et en donner un équivalent lorsque $n \to +\infty$.

19)*(C04) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$, intégrable. Montrer que $\int_0^x tf(t)\, \mathrm{d}t = o(x)$. *Indication: primitive*

20)*(C03) Étudier $\int_0^1 \frac{x^n \ln(x)}{x^n - 1}\, \mathrm{d}x$ (existence, limite).

21)**(X05) Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}$. Étudier la suite $I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos^n t f(t)\, \mathrm{d}t$.

22)*(C00) Étudier $\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(x^2-t^2)}}\, \mathrm{d}t$ et limite quand $x \to 0$.

23)**(M03) Étudier (limites, équivalents) $F(x) = \int_0^{+\infty} \sqrt{1+tx}\, e^{-t^2}\, \mathrm{d}t$

24)*(C03) Soit f définie par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t$.

a) Domaine de définition de f?

b) Étudier la dérivabilité de f.

c) Calculer f et f'. On pourra calculer $f(0)$ et $f(1)$.

25)*(C08) Soit $f(x) = \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$: ensemble de définition? Montrer que f est monotone convexe, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $f^{(k)}$.

Calculer $f(x) + f(x+1)$ ainsi que $f(n)$.

Donner un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

26)**(C06) Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Pour $f \in E$ et $x \in]0,1]$, on définit $F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{t+x}\, \mathrm{d}t$.

a) Montrer que F se prolonge en une application de E.

b) $u : f \longmapsto F$ est-elle continue?

c) Soit $G = \{g \in \mathcal{C}(]0,1],\mathbb{R}) / \exists k$ (dépendant de g), $\lim_{t\to 0^+} t^k g(t) = 0\}$. Lien entre E et G? Montrer que $f \in G \Longrightarrow F \in G$.

Montrer que $\Phi : f \in G \longmapsto F \in G$ est continue.

d) Trouver les vecteurs propres de Φ et montrer que tout réel strictement positif est valeur propre de Φ.

27)**(X08) **Fonction d'erreur.** Soit $\psi(x) = \displaystyle\int_x^\infty \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t$.

a) Étude sommaire de ψ (régularité, variations).

b) Montrer que $\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \leqslant \psi(x) \leqslant \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$.

c) Montrer que $\psi(x) \leqslant \frac{2}{x+\sqrt{x^2+2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$. *Indication: on peut poser* $g(x) = \psi(x) \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$ *et* $h(x) = \frac{2}{x+\sqrt{x^2+2}}$ *pour découvrir des (in)équations différentielles vérifiées par* g, h.

28)***(X08) Calculer, pour des valeurs de x et a à préciser, $F(a,x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} exp(-xt - \frac{a}{t}) dt$.

29)*(M07) Étudier la fonction $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^p}}$, puis donner un équivalent de $f(1) - f(x)$. *Indication: encadrer* $\sqrt{1-t^p}$ *par* $pt\sqrt{1-t}$ *et* $p\sqrt{1-t}$.

30)*(M06) Soit f continue sur $\mathbb{R}$, et telle que pour tout y: $f(y) = k \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-y|} f(t) \, \mathrm{d}t$. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et satisfait une équation différentielle. Calculer alors f.

N.B. Dans les exercices qui suivent on considère une fonction f continue sur $\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$ et on pose $Lf(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) \, \mathrm{d}t$ pour $p > 0$.

31)*(C01) Soit f continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $x_0 > 0$. Montrer que si $Lf(x_0)$ existe alors $Lf(x)$ existe pour tout $x > x_0$. Que peut-on dire de l'ensemble de définition de $L(f)$? Exemples ?

32)*(M08) Étudier Lf pour la fonction $f(t) = (1+t^2)^{-1/2}$ ('equivalent en 0 et en $+\infty$).

33)*(M01) Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} xt}{t} e^{-t} \, \mathrm{d}t$. Étudier la définition de f, sa continuité, sa dérivabilité. Comment calculer f ?

34)*(M03) Soit $I(x) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos tx}{t^2} e^{-t} \, \mathrm{d}t$. Étudier la régularité de I (classe $\mathcal{C}^2$), puis la calculer.

35)*(X07) Étudier Lf pour $f(t)) = (t^2+1)^{-1/2}$ (domaine de définition, continuité, limites).

36)**(C07) Equivalent de $L(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-pt} f(t)}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t$ pour $p \to +\infty$, f étant continue bornée. *Indication: voir le cas où* f *est constante.*

37)**(L07) **Injectivité.** Montrer que la transformation de Laplace est injective sur l'espace E formé des fonctions f continues sur $\mathbb{R}_+$ et dominées par un polynôme, c'est-à-dire qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $t \mapsto t^N f(t)$ soit bornée. *Indication: utiliser le théorème de Weierstrass.*

38)*(E06) Calculer pour a, b, s réels convenables l'intégrale:

$$\int_0^{+\infty} e^{-ts} . \frac{\cos at - \cos bt}{t} \, \mathrm{d}t$$

Indication: par changements de variable se ramener au cas $a = 0$, $b = 1$; *cas* $s = 0$ *à part.*

39)**(X04) **Une forme intégrale du théorème de Tauber.** Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue, telle que $Lf(x)$ existe pour tout $x > 0$, cette intégrale ayant une limite finie ℓ au voisinage de 0. On suppose de plus que $\lim\limits_{+\infty} tf(t) = 0$. Démontrer que $Lf(0) = \ell$.

40)**(C03) **Transformée de Fourier.** **a**) Soit f intégrable sur $\mathbb{R}$; montrer que $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-itx} \, \mathrm{d}t$ est définie pour $x \in \mathbb{R}$, que $\widehat{f}$ est continue et bornée, et $\lim\limits_{x \to \infty} \widehat{f}(x) = 0$.

b) On suppose de plus que f est continue à support compact ; établir que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Que peut-on dire si $\widehat{f} = 0$ (fonction identiquement nulle) ?

41)*(M99) Calculer $\displaystyle\int_0^{\to\infty} \frac{e^{t(ix-1)}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$

42)**(C05) **a**) Existence de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{xt}-1}\,dt$ pour $x > 0$.

b) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle peut s'écrire sous la forme d'une série de fonctions rationelles.

c) Pour x fixé, comparer f et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2x^2}$ et en déduire un équivalent de f en 0.

43)**(C08) Calculer, pour des valeurs de x à préciser, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,dt$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\frac{Arctan(t)}{t})^2 dt$.

44)***(X05) Calculer $\displaystyle\int_0^{\to\infty} \frac{e^{it}}{1+t}\,\mathrm{d}t$. *Indication: on peut introduire* $I(a) = \displaystyle\int_0^{\to\infty} \frac{e^{it}}{t+a}\,\mathrm{d}t$ *et dériver par rapport à* a.

45)***(C05) **Transformée de Fourier d'une distribution de Cauchy.** Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Définition de f.

b) Montrer que f est bornée et continue sur son domaine.

c) Montrer que f est deux fois dérivable sur un domaine à préciser.

d) Calculer f. *Indication: on peut admettre que* $\frac{\pi}{2} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u}\,\mathrm{d}u$. *Réponse:* $f(x) = \dfrac{\pi}{2} e^{-|x|}$.

46)**(M01) Justifier que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1-(1-t/n)^n}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ et que $\lim_{n\to+\infty} \displaystyle\int_1^n \frac{(1-t/n)^n}{t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

47)**(C03) **a**) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\big(1-\tfrac{t}{n}\big)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$, pour $x > 0$ donné.

b) On pose $B(x,\,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$. Pour quelles valeurs du couple de réels $(x,\,y)$ cette expression a-t-elle un sens?

c) Calculer $B(x,\,n+1)$ par récurrence sur l'entier naturel n.

d) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^x B(x,\,n+1)$.

48)**(M06) **Γ selon Weierstrass.** **a**) Montrer que $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-\tfrac{t}{n})^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t$.

b) En déduire: $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\ldots(x+n)}$.

c) ...et que $\dfrac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\displaystyle\prod_1^\infty (1+\frac{x}{k})e^{-x/k}$ (γ=constante d'Euler).

49)***(L05) **Formule des compléments.** Montrer que pour $s \in]0,1[$ on a $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \dfrac{\pi}{\sin(s\pi)}$. *Indication: comme il s'agit d'un problème multiplicatif, on peut recourir à la formule de Weierstrass pour* Γ.

50)***(U07) **Zéros de la fonction Γ.** **a**) Montrer qu'on peut définir , pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(z) > 0$, $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{-z}e^{-t}dt$, et qu'en identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, il s'agit d'une fonction de deux variable de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$.

b) Etablir qu'on peut prolonger Γ sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}-$ en une fonction continue.

c) On suppose qu'il existe $z \in \mathbb{C}, \mathcal{R}e(z) > 0$, vérifiant $\Gamma(z) = 0$. Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $\displaystyle\int_0^1 (-ln(u))^{z-1}P(u)du = 0$ puis aboutir à une contradiction.

51)***(E04) **La méthode de Laplace.** Supposons que dans $]a,b[$ (borné ou non) les fonctions g et h soient de classe $\mathcal{C}^2$, que la fonction $g(t)e^{h(t)}$ soit intégrable et que h' ne change de signe qu'en un seul point c tel que $a < c < b$, où de plus h atteint un maximum et $g(c)$ non nul, $h"(c) < 0$. Alors on a, pour x voisin de $+\infty$:

$$\int_a^b g(t)e^{xh(t)}\,\mathrm{d}t \sim \Gamma(\frac{1}{2})g(c)e^{xh(c)}\sqrt{\frac{2}{xh"(c)}}$$

Indication: tout se passe au voisinage de c, travailler à gauche puis à droite de c en utilisant un D.L. de h.

Exemples: Formule de Stirling; Equivalents de $\int_0^{+\infty} e^{xt(1-\ln t)}\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^{+\infty} t^{-tx}\,\mathrm{d}t$.