

# Exercices sur les espaces préhilbertiens et euclidiens

---

1)\*\*(M08) Pour  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , on pose

$$q(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \alpha \sum_{i=1}^n x_i. \text{ Pour quelles valeurs de } \alpha \text{ la forme quadratique } q \text{ est-elle définie positive ?}$$

2)\*\*(C07) **Signature : théorème d'inertie de Sylvester.** Soit  $q$  une forme quadratique sur un espace vectoriel  $E$  réel de dimension  $n$ . On considère  $r$  le rang de  $q$ , et on définit  $p$  (resp.  $q$ ) la dimension maximale d'un sous-espace  $F$  de  $E$  tel que la restriction de  $q$  à  $F$  soit définie positive (resp. définie négative).

- a) Montrer que  $r = p + q$ .
- b) Soit  $A$  la matrice de  $q$  dans une base de  $E$  ; montrer que  $p$  (resp.  $q$ ) est le nombre de valeurs propres  $> 0$  (resp.  $< 0$ ) de  $A$ .
- c) Etablir l'existence d'une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $q$  est diagonale, avec  $p$  fois 1,  $q$  fois  $-1$  et  $n - r$  zéros sur la diagonale.
- d) Exemple : déterminer la signature de la forme quadratique définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par  $q(M) = \text{tr}(M^2)$ .

3)\*\*(E06) Soit  $f$  une forme bilinéaire sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, telle que  $\forall (x, y) \in E^2$ , si  $f(x, y) = 0$ , alors  $f(y, x) = 0$ . Montrer que  $f$  est symétrique ou antisymétrique.

4)\*\*(X09) Soit  $q$  une forme quadratique définie sur  $\mathbb{R}^n$ .

- a) Montrer qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$  tel que
 
$$q(x_0) = \min_{x \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} q(x).$$
- b) Prouver que les coordonnées de  $x_0$  sont premières entre elles dans leur ensemble, et qu'on peut compléter  $x_0$  en une  $\mathbb{Z}$ -base de  $\mathbb{Z}^n$ .
- c) Si  $n = 2$ , soit  $q(x, y) = ax^2 + 2Bxy + cy^2$  ; établir que  $q(x_0) \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{ac - b^2}$ . Peut-on avoir égalité ?

5)\*\*(U04) Soit  $q$  une forme quadratique sur un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie  $n$  ; soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $A$  la matrice de  $q$  dans  $\mathcal{B}$ . Etablir que  $q$  est définie positive si et seulement si les  $n$  mineurs principaux de  $A$   $D_1, \dots, D_n$  (c'est-à-dire les déterminants obtenus en sélectionnant les  $i$  premières lignes et colonnes de  $A$ , où  $i$  décrit  $\{1, \dots, n\}$ ) sont  $> 0$ . Que peut-on dire si les  $D_i$  sont seulement  $\geq 0$  ?

6)\*(M00) Montrer que la forme quadratique définie sur  $\mathbb{R}^{n+1}$  par  $q(x_0, \dots, x_n) = \sum_{(i,j) \in \{0, \dots, n\}^2} \frac{x_i x_j}{i+j+1}$  est un produit scalaire.

7)\*\*(L03) Prouver que l'ensemble des matrices symétriques réelles définies positives (c'est-à-dire telles que la forme quadratique qu'elles définissent canoniquement dans  $\mathbb{R}^n$  le soit) est ouvert dans  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ .

8)\*\*(M00) **Projection sur un convexe fermé.** Soit  $H$  un espace préhilbertien complet (on dit que  $E$  est un espace de Hilbert), et  $\mathcal{C}$  une partie convexe, fermée non vide de  $E$ .

- a) Soit  $x \in E$  ; montrer qu'il existe une suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{C}$  telle que  $\lim \|x - c_n\| = d(x, \mathcal{C})$  et que  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy [on pourra utiliser l'identité du parallélogramme].
- b) Prouver qu'il existe un unique vecteur noté  $p(x) \in \mathcal{C}$  tel que  $\|x - p(x)\| = d(x, \mathcal{C})$ .
- c) Etablir que  $p(x)$  est l'unique vecteur de  $\mathcal{C}$  tel que :  $\forall y \in \mathcal{C}, \langle x - p(x), y - p(x) \rangle \leq 0$ .
- d) Montrer enfin que  $p$  est 1-lipschitzienne.

9)\*\*(U03) **Espaces de Hilbert.** (On utilisera le résultat de l'exercice précédent). On appelle espace de Hilbert tout espace préhilbertien réel ou complexe  $E$  complet (pour  $\|\cdot\|_2$ ).

- a) Donner un exemple de tel espace de dimension infinie.
- b) Montrer qu'un sous-espace de  $E$  est fermé (donc complet) si et seulement si il admet un supplémentaire orthogonal. A quelle condition géométrique nécessaire et suffisante un sous-espace est-il dense ?
- c) Soit  $\phi$  une forme linéaire continue sur  $E$  ; établir qu'il existe un unique vecteur  $a \in E$  tel que  $\forall x \in E, \phi(x) = \langle a, x \rangle$ .
- d) Montrer qu'un endomorphisme de  $E$  admet un adjoint si et seulement si il est continu.

e) On suppose qu'il existe une famille orthonormée dénombrable  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dense dans  $E$  [on dit qu'une telle famille est totale]. Montrer que pour tout  $x$  dans  $E$ , la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \langle e_n, x \rangle e_n$  converge (au sens de  $\|\cdot\|_2$ ) vers  $x$ .

**10)\*\*(X05) Polynômes orthogonaux.** Soit  $\langle, \rangle$  u produit scalaire à poids dans  $\mathbb{R}[X]$  (i.e. il existe  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point, et  $\omega$  continue positive sur  $I$  est  $> 0$  sur une partie infinie, telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$   $t \rightarrow t^n \omega(t)$  est intégrable sur  $I$  et pour tous  $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ ,  $\langle P, Q \rangle = \int_I P(t)Q(t)\omega(t)dt$ ).

a) Justifier l'existence d'une unique suite  $(P_n)$  de polynômes telle que :  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est orthogonale pour  $\langle, \rangle$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  est unitaire de degré  $n$ .

b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  possède exactement  $n$  racine réelles distinctes dans l'intérieur  $I$ .

c) Prouver que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\exists (a_n, b, c_n) \in \mathbb{R}^3$  tels que  $P_{n+2} = (a_n X + b)P_{n+1} + c_n P_n$  [Formule de Rodrigues].

**11)\*\*(M03) Famille obtusangle.** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . Quel est le cardinal maximal d'une famille  $(x_1, \dots, x_p)$  de  $E^p$  telle que  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ , tels que  $i \neq j$ ,  $\langle x_i, x_j \rangle < 0$  ?

**12)\*\*(C07) Simplexes réguliers.** Montrer que dans un espace euclidien de dimension  $n$  il existe  $n + 1$  vecteurs  $x_1, \dots, x_{n+1}$  tels que  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n + 1\}^2$ , si  $i \leq j$  alors  $\|x_i - x_j\| = 1$ .

**13)\*\*(C03)** Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ ,  $p \in \mathbb{N}$  et  $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p) \in E^{2p}$  tels que  $\forall (i, j) \in \{1, \dots, p\}^2$ ,  $\langle x_i, x_j \rangle = \langle y_i, y_j \rangle$ . Montrer qu'il existe  $u \in O(E)$  telle que  $\forall i \in \{1, \dots, p\}$ ,  $y_i = u(x_i)$ .

**14)\*(M02)** Calculer  $\inf_{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3} \int_0^{+\infty} ax^2 + bx + c^2 e^{-x} dx$ . (Remarque : beaucoup d'exercices sur ce modèle...)

**15)\*\*(X06) Matrices de Householder.** On appelle matrice de Householder toute matrice de la forme  $H_X = I_n - 2^t X X$ , où  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  est une matrice colonne.

a) Reconnaître l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $H_X$ .

b) Montrer que les matrices de Householder engendrent le groupe orthogonal.

c) Pour  $M \in O_n(\mathbb{R})$ , quel est le nombre minimal de matrices de Householder dont elle est le produit ?

**16)\*\*(C04)  $SO_n(\mathbb{R})$  connexe par arcs.**

a) Soit  $E$  un espace euclidien et  $u \in O(E)$ . On suppose que  $u$  n'a pas de valeur propre (réelle). Montrer qu'il existe un sous-espace de dimension 2 stable par  $u$ .

b) En déduire que si  $v \in O(E)$ , il existe une base orthonormée de  $E$  dans laquelle la matrice de  $v$  est diagonale par blocs, avec des blocs de taille 1 ou 2.

c) Prouver que  $SO_n(\mathbb{R})$  est connexe par arcs.

**17)\*\*(X09)** On munit  $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$  du produit scalaire :  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ . On définit, pour  $f \in E$  et  $x \in [0, 1]$ ,  $T(f) = \int_0^x f(t)dt$ .

a) Montrer que  $T$  est un endomorphisme de  $E$  ; déterminer ses éléments propres.

b) Prouver que  $T$  possède un adjoint.

c) Quels sont les éléments propres de  $T^* \circ T$  ?

**18)\*\*(M06) Théorème ergodique de Von Neumann.** Soit  $E$  un espace euclidien, et  $f \in \mathcal{L}(E)$  telle que  $\forall x \in E$ ,  $\|f(x)\| \leq \|x\|$ . Montrer que  $\text{Ker}(f - id)$  et  $\text{Im}(f - id)$  sont supplémentaires orthogonaux.

**19)\*\*(X05) Angles obtus.** Soit  $E$  un e.v. euclidien de dimension  $n$ . a) Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  une famille de vecteurs de  $E$  telle que, pour  $i \neq j$  on ait :  $\langle e_i, e_j \rangle \leq 0$ . Montrer que si  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0$ , alors :  $\sum_{i=1}^n |\lambda_i| e_i = 0$ . Les  $\lambda_i$  peuvent-ils être nuls ?

b) Montrer que si  $\forall i, j$  ( $i \neq j$ )  $\Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle < 0$ , alors  $p \leq n + 1$ .

c) Montrer que s'il existe  $\varepsilon$  tel que  $\langle \varepsilon | e_i \rangle > 0$  pour tout  $i$ , alors la famille des  $e_i$  est libre.

d) Montrer que si  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base, et si  $x$  est un vecteur de  $E$  tel que, pour tout  $i$ ,  $\langle x | e_i \rangle > 0$ , alors les composantes de  $x$  sont strictement positives. Indication: examiner la famille obtenue en adjoignant  $-x$  aux  $e_i$ .

**20)\*\*\*(U08)Pythagore.** Soit un espace euclidien  $E$  et  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  continue et telle que pour tous vecteurs  $x, y$  de  $E$  l'orthogonalité de  $x$  et  $y$  entraîne  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ .

a) On suppose que  $f$  est paire. Montrer que  $f$  est proportionnelle au carré de la norme. *Indication: carrés et losanges.*

b) On suppose que  $f$  est impaire. Montrer que  $f$  est linéaire.

c) En général, montrer qu'il existe une forme linéaire  $\varphi$  et un scalaire  $\mu$  tels que pour tout  $x$  de  $E$  on ait  $f(x) = \varphi(x) + \mu\|x\|^2$ .

**21)\*\*(U05)** Soit  $E$  un espace euclidien;  $p$  et  $q$  deux projecteurs orthogonaux. Montrer qu'il existe des s.e.v.  $(F_i)$  de  $E$  stables à la fois par  $p$  et  $q$  tels que  $E = \oplus F_i$ . *Indication: noter que si  $F$  est stable par  $p$ , alors  $F^\circ$  est aussi stable (se voit directement ou par les adjoints). Si la dimension de  $E$  est impaire c'est facile. Sinon*

*considérer  $f : \begin{cases} \text{Im } p \times \text{Im } q \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \left( \frac{x}{\|x\|} \mid \frac{y}{\|y\|} \right) \end{cases}$  dont le maximum correspond à l'angle entre  $\text{Im } p, \text{Im } q$  (qui sont deux plans pour  $\dim E = 4$  et  $\text{rg } p = \text{rg } q = 2$ ).*

**22)\*(C02)** Soit  $E = C^2([0, 1], \mathbb{R})$ , et

$$\varphi : (f, g) \in E^2 \mapsto \int_0^1 (f(t)g(t) + f'(t)g'(t)) \, dt.$$

a) Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire.

b)  $V = \{f \in E, f(0) = f(1) = 0\}$ ,  $W = \{f \in E, f = f''\}$ . Montrer que  $E = V \oplus W$ ; quelle est la projection orthogonale sur  $W$  ?

c) Soit  $E_{\alpha, \beta} = \{f \in E, f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$ .

Déterminer  $\inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \left\{ \int_0^1 (f^2(t) + f'^2(t)) \, dt \right\}$ .

**23)\*(M06)** Soit  $S$  l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille  $n$ . Trouver, pour une matrice  $A$  fixée:

$$\min_{M \in S} \sum_{1 \leq i, j \leq n} (m_{ij} - a_{ij})^2.$$

**24)\*(X05)** On munit l'espace  $E$  des fonctions continues sur  $[0, 1]$  du produit scalaire  $\langle f|g \rangle = \int_0^1 fg$ . Soient  $a_1, \dots, a_n$  des réels positifs, et  $F$  le sous-espace de  $E$  engendré par les fonctions  $x \mapsto x^{a_i}$ . Quelle est la distance de  $(x \mapsto x^m)$  à  $F$  ?

**25)\*(C00)** Soit  $\mathcal{P}$  le sous-espace de  $\mathbb{R}^4$  d'équations cartésiennes  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$ . Quelle est, dans la base canonique, la matrice de la projection orthogonale sur  $\mathcal{P}$  ?

**26)\*\*(C06)** Trouver  $\min_{a, b \in \mathbb{R}} \int_0^{\pi/2} (\sin x - ax - b)^2 \, dx$ .

**27)\*\*\*(X03)Hausdorffien.** Soit  $E$  hermitien et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On appelle Hausdorffien de  $u$  l'ensemble  $H(u)$  des nombres complexes  $(ux|x)$  lorsque  $x$  parcourt la sphère unité.

a) Montrer qu'on peut trigonaliser  $u$  dans une base orthonormée (base de Schur).

b) On suppose que  $E$  est un plan vectoriel. Prouver que  $H(u)$  est une ellipse pleine ayant pour foyers les valeurs propres de  $u$  (hormis des cas particuliers à préciser). *Indication: l'objet étudié est la projection (oblique) sur un plan d'un objet tridimensionnel bien connu.*

c) Montrer qu'en général  $H(u)$  est compact (fermé et borné) et convexe.

**28)\*\*(X02)** Soit  $a \neq 0$ , on note  $\Delta$  l'endomorphisme  $P \mapsto P(X+a) - P(X)$  de  $\mathbb{C}[X]$ .

a) Déterminer  $\text{Ker } \Delta$ .

b) Montrer que  $\varphi : (P, Q) \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\Delta^k P(0)} \Delta^k Q(0)$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{C}[X]$ . *Remarque: c'est une somme finie !*

c) Recherche d'une base orthonormée échelonnée en degrés.

**29)\*\*(X06)** Soient  $E = \mathbb{R}[X]$  et  $(a_n)$  une suite réelle. On considère  $(P|Q) = \sum_{k=0}^{\infty} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$  (qui est bien défini car la somme est finie).

a)  $(\cdot|\cdot)$  est-il un produit scalaire ?

- b) Existence d'une base orthonormée  $(P_n)$  de degrés échelonnés ?  
 c) Calcul de  $P_j^{(k)}(a_k)$ .  
 d) Montrer que  $P_n(x) = \int_{a_0}^x \int_{a_1}^{t_1} \cdots \int_{a_{n-1}}^{t_{n-1}} dt_n \cdots dt_1$ .  
 e) Calculer les  $P_n$  si  $a_n = n\alpha$ . *Indication: le résultat est assez simple et émerge du calcul des premières valeurs  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$*

**30)\*\*(M07) Déterminant de Gram.** Soit  $(u_1, \dots, u_p)$  une famille libre de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  euclidien,  $F = \text{Vect}(u_i)$ , et  $G(u_1, \dots, u_p) = \det((u_i|u_j))$ .

- a) Montrer que pour tout vecteur  $x$  l'on a:

$$d(x, F)^2 = \frac{G(x, u_1, \dots, u_p)}{G(u_1, \dots, u_p)}.$$

*Indication: introduire la projection orthogonale.*

- b) Application: minimiser  $f(a_1, \dots, a_n) = \int_0^1 (1 + a_1x + \dots + a_nx^n)^2 dx$ .

**31)\*\*(C08)** Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice carrée réelle de taille  $n$ . Donner une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une famille  $(X_i) (1 \leq i \leq n)$  telle que:  ${}^tX_i X_j = a_{ij}$  pour tous  $i, j$ . Application:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 3 & 1 \\ \alpha & 1 & 3 \end{pmatrix}; \text{ discuter selon } \alpha.$$

**32)\*\*(X04) Hadamard.** Soient  $n$  vecteurs  $V_1, \dots, V_n$  de  $\mathbb{C}^n$  muni de sa structure préhilbertienne usuelle. Montrer que  $|\det(V_i)| \leq \prod_i \|V_i\|$ . *Indication: Schmidt.* Cas d'égalité ? Application: soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

et  $N(A) = \text{Sup } |a_{ij}|$  (c'est une norme, pas un norme d'algèbre). Majorer  $\frac{\det A}{N(A)^n}$  et étudier le cas d'égalité.

**33)\*\*(M02) Simplexe régulier.** Soit  $E = \mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) muni de sa structure euclidienne canonique  $u_1, \dots, u_n$  des vecteurs de norme 1, tels que, pour  $1 \leq i < j \leq n$ , on ait  $\|u_i - u_j\| = 1$ .

- a) Existence ?  
 b) Établir que  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $E$ .  
 c) Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  l'orthonormalisée de Schmidt de  $(u_1, \dots, u_n)$ . Montrer qu'il existe des réels  $b_1, \dots, b_n, a_1, \dots, a_n$  tels que, pour tout  $j$  de  $[1, n]$   $u_j = (\sum_{1 \leq i < j} b_i e_i) + a_j e_j$ . et les calculer.

d) Plus généralement, pour quelles valeurs de  $m$  et quels nombres  $\mu$  existe-t-il une famille de vecteurs  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$  tels que  $\|x_i\| = 1$  pour tout  $i$ , et  $(x_i|x_j) = \mu$  pour tout couple  $(i, j)$  avec  $i \neq j$  ?

**34)\*(M00)** Soit un vecteur  $a$  non nul d'un espace euclidien  $E$  de dimension 3, et  $f(x) = a \wedge x$ .

- a) Quelles sont les valeurs propres de  $f^2$  ? Est-ce que  $f^2$  est un endomorphisme diagonalisable ?  
 b) Quel lien existe entre  $f$  et  $f^3$  ?

**35)\*\*(C07) Caractérisation des similitudes.** Soit  $f$  une application de  $E$  (euclidien) vers  $E$  telle que  $f(0) = 0$ .

Montrer l'équivalence des propriétés suivantes:

- a)  $\exists k > 0 / \forall x, y \in E, d(f(x), f(y)) = kd(x, y)$ .  
 b)  $f$  est composée d'une homothétie et d'une isométrie.  
 c)  $f$  est linéaire, non nulle, et préserve l'orthogonalité.  
 d)  $f \in \text{GL}(E)$  et  $\|f\| \cdot \|f^{-1}\| = 1$ , avec  $\|f\| = \text{Sup}_{\|x\|=1} \|f(x)\|$ .

*Indication: pour (a)  $\Rightarrow$  (b) le problème est de montrer la linéarité. Développer un carré de norme bien choisi.*

**36)\*\*(C04) a)** Soit  $V$  un sous-espace d'un espace euclidien  $E$ ,  $f$  un endomorphisme de  $E$  tel que  $\forall x \in V, \|f(x)\| = \|x\|$ . Montrer qu'il existe un automorphisme orthogonal  $g$  de  $E$  dont  $f$  est la restriction à  $V$ .

b) Soit  $(x_i)_{i \in I}$  et  $(y_i)_{i \in I}$  deux familles de vecteurs d'un espace euclidien  $E$ . à quelle condition existe-t-il un automorphisme orthogonal  $g$  de  $E$  tel que  $\forall i \in I, g(x_i) = y_i$  ?

- 37)\*\*(L06) Le groupe du cube.** Trouver un morphisme injectif du groupe symétrique  $S_4$  vers le groupe  $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ , pour un  $n$  à choisir, puis pour  $n = 3$ . Dans ce dernier cas, caractériser l'image d'une permutation circulaire. *Indication: Choisir 4 vecteurs adéquats.*
- 38)\*(C07)** Soient  $r, s$  des rotations de  $\mathbb{R}^3$ . Caractériser  $s \circ r \circ s^{-1}$  à partir des éléments de  $r$  (angle, axe) modifiés par  $s$ . A quelles conditions deux rotations de  $\mathbb{R}^3$  commutent-elles ?
- 39)\*\*\*(X02)** Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ , non nul, tel que:  $f(u \wedge v) = f(u) \wedge f(v)$  pour tous vecteurs  $u$  et  $v$ . Montrer que  $f$  est une rotation. Puis supprimer l'hypothèse de linéarité. *Indication: travailler sur une BOND  $(i, j, k)$ , montrer que  $f(\alpha i) = \varphi(\alpha)f(i)$ ,  $f(\alpha j) = \varphi(\alpha)f(j)$ ,  $f(\alpha k) = \varphi(\alpha)f(k)$ , et que  $\varphi$  est un morphisme de corps de  $\mathbb{R}$ .*
- 40)\*\*(M04)** Soit  $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une matrice hermitienne, (i.e. une matrice telle que  $H^* = {}^t\bar{H} = H$ ).
- Montrer que les valeurs propres de  $H$  sont réelles.
  - On définit la matrice  $U$  par  $U = (H - iI_n)(H + iI_n)^{-1}$ . Montrer que  $U$  est unitaire, i.e.  $U^*.U = I_n$ . Relier les valeurs propres de  $U$  à celles de  $H$ .
- 41)\*(C08)** Soit un espace euclidien  $E$ .
- Quels sont les endomorphismes de  $E$  qui commutent avec toutes les isométries ?
  - Même question en ce qui concerne les applications affines et les isométries affines.
- 42)\*\*(L07)** Soit  $T \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ . Peut-on trouver  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $S = P(T)$  soit nilpotente? *Indication: valeur propre.*
- 43)\*\*(L02)** Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace euclidien  $E$ . Montrer que deux de ces hypothèses entraînent la troisième:
- $f$  est une isométrie
  - $f^2 = -\text{Id}$
  - $f$  est antisymétrique (c.à.d. sa matrice l'est)
- Trouver tous les endomorphismes qui conviennent en dimensions 2 ou 3. A quelle condition sur la dimension est-ce possible ?
- 44)\*(M05)** Soit  $r$  une rotation de l'espace  $\mathbb{R}^3$  euclidien muni d'une B.O.N.  $(e_1, e_2, e_3)$  telle que  $r(e_1) = -e_2$  et  $r(e_1 - e_2 + e_3) = e_1 - e_2 + e_3$ . Déterminer la matrice de  $r$  dans cette base.
- 45)\*(M02)** Chercher les matrices réelles carrées nilpotentes  $M$  telles que  $I + M$  soit orthogonale.
- 46)\*\*\*(L04)** Montrer que tout endomorphisme  $u$  d'un espace hermitien est décomposable en somme de quatre endomorphismes unitaires.
- 47)\*\*(C08)** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ .
- Montrer que  $A$  est la matrice d'un déplacement (rotation) de  $\mathbb{R}^3$  si et seulement si  $a, b, c$  sont racines d'un polynôme  $X^3 - X^2 + p$  avec  $p \in [0, \frac{4}{27}]$ .
  - Déterminer l'axe et l'angle de cette rotation.
  - Étudier les matrices orthogonales de la forme de  $B$ .
- 48)\*(C05)** Idem:  $\begin{pmatrix} \cos^2 t + \cos t \sin^2 t & \cos t \sin t(1 - \cos t) & \sin^2 t \\ \cos t \sin t(1 - \cos t) & \sin^2 t + \cos^3 t & -\cos t \sin t \\ -\sin^2 t & \sin t \cos t & \cos t \end{pmatrix}$
- 49)\*(M07)** Même question:
- $$\frac{1}{13} \begin{pmatrix} 12 & -4 & -3 \\ 4 & 3 & 12 \\ 3 & 12 & -4 \end{pmatrix} \text{ et } \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}.$$
- 50)\*(C08)** Soit  $A \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ , symétrique.
- Déterminer  $A$  si sa première ligne vaut  $(1 \ 0 \ 0)$ .
  - Déterminer  $A$  en général.

- 51)\*\*\* (M02) Transformation de Cayley.** Soit  $\mathcal{D}$  l'ensemble des matrices  $A \in O_n(\mathbb{R})$  telles que  $A + I$  soit inversible et  $\mathcal{D}'$  l'ensemble des matrices antisymétriques réelles.
- Montrer que  $\mathcal{D}$  est inclus dans  $SO_n(\mathbb{R})$ .
  - Soit  $\varphi(A) = (I - A)(I + A)^{-1}$  pour  $A \in \mathcal{D}$ . Montrer que  $\varphi$  est une bijection entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$ .
  - Soit  $n = 3$  et  $A$  une rotation d'angle  $\alpha$ , d'axe  $u(\lambda, \mu, \nu)$ . Calculer  $\varphi(A)$ . *Indication: les applications antisymétriques de  $\mathbb{R}^3$  dans lui-même sont de la forme:  $x \rightarrow a \wedge x$ .*
- 52)\*\* (U06)** Soit  $G$  un sous-groupe fini du groupe  $GL_n(\mathbb{C})$ .
- Montrer qu'il existe un produit scalaire sur  $\mathbb{C}^n$  tel que  $G$  soit inclus dans le groupe unitaire associé à ce produit scalaire. Même question en remplaçant  $\mathbb{C}$  par  $\mathbb{R}$ . *Indication: faire une moyenne.*
  - Montrer que pour tout élément  $f$  de  $G$  l'on a  $\text{tr } f^{-1} = \text{tr } f$ . Même question en remplaçant  $\mathbb{C}$  par  $\mathbb{R}$ .
  - Imaginer une solution n'utilisant pas la théorie des groupes orthogonaux/unitaires, mais plutôt celle des polynômes annulateurs.
- 53)\*\* (C04)** Soit  $E$  un plan vectoriel réel, muni d'une base quelconque, et  $u$  l'endomorphisme de  $E$  de matrice  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ . Peut-on mettre sur  $E$  une structure euclidienne telle que  $u$  soit une isométrie? *Indication: Conditions nécessaires sur les valeurs propres ?*
- 54)\*\* (M09)** Résoudre  $X^n = U$  dans  $O_3(\mathbb{R})$ , puis dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  avec  $U \in O_3(\mathbb{R})$ . *Indication: diagonaliser  $U$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$  pour montrer que  $X$  est orthogonale.*
- 55)\*\* (X05)** Soit  $A = (a_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$ . Montrer:  $\left| \sum_{i,j} a_{ij} \right| \leq n$ ; cas d'égalité.
- 56)\*\*\* (X08)** a) Soit  $E$  hermitien et  $u \in L(E)$  tel que  $\|u\| \leq 1$ . Montrer que si  $|\det u| = 1$  alors  $u$  est unitaire.  
b) Soit  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$  (euclidien) on ait  $\|PX\| \leq \|X\|$ . Montrer que  $P$  est orthogonale si, et seulement si ses valeurs propres complexes sont toutes de module 1.
- 57)\*\*\* (U03)** Sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  on définit la norme:  $\|A\| = \sqrt{\text{Tr}(A^*A)}$ . Soit  $\mathcal{U}_n$  l'ensemble des matrices unitaires d'ordre  $n$ .
- Montrer que pour tout  $U$  de  $\mathcal{U}_n$  et tout  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on a:  $\|UA\| = \|AU\| = \|A\| = \|U^{-1}AU\|$ .
  - Examiner la réciproque: si  $U$  est inversible, et telle que pour toute matrice  $A$ ,  $U^{-1}AU$  ait même norme que  $A$ , alors  $U$  est proportionnelle à une matrice unitaire.
  - On considère des matrices  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{U}_n$  et on pose  $C = ABA^{-1}B^{-1}$ . On suppose  $AC = CA$  et  $\|I - B\| < \sqrt{2}$ . Montrer que  $A$  et  $BAB^{-1}$  commutent.
  - Montrer qu'il existe  $U$  dans  $\mathcal{U}_n$ , des complexes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de module 1 et une permutation  $\sigma$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $U^*AU = D$  et  $U^*BAB^{-1}U = D'$ , avec  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  et  $D' = \text{diag}(\lambda_{\sigma(1)}, \lambda_{\sigma(2)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})$
  - En déduire que  $AB = BA$  et conclure.
- 58)\*\* Sans adjoint.** Soit dans l'espace  $\mathcal{C}^\infty([0, 1])$  muni du produit scalaire  $\langle f | g \rangle = \int_0^1 \overline{f(t)}g(t) dt$  l'endomorphisme  $D$  de dérivation. Montrer que  $D$  n'a aucun adjoint sur cet espace. *Indication: faire le produit scalaire avec les fonctions "puissance".*
- 59)\* (M02)** On munit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  du produit scalaire canonique  $(f, g) \mapsto \int_0^1 f(t)g(t) dt$ .  
Montrer que l'endomorphisme  $T : f \mapsto (Tf : x \mapsto \int_0^x f(t) dt)$  possède un adjoint  $T^*$ . Quelles sont les valeurs propres de  $T^* \circ T$  ?
- 60)\*\* (C07)** Soit un espace euclidien  $E$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ . a) Montrer que  $\text{Ker } u^* \circ u = \text{Ker } u$  et déterminer de même  $\text{Im } u^* \circ u$ .  
b) Montrer que  $u \circ u^* \circ u = u \iff u^* \circ u = \text{projecteur}$ .
- 61)\*\* (E00)** Caractériser les matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telles que  $AA^* = A^2$ . *Indication: cf. cours sur les adjoints, leurs noyaux et leurs images.*
- 62)\*\* (L06)** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  préhilbertien ayant un adjoint  $f^*$  non injectif, et tel que:  $f^* \circ f - f \circ f^* = \text{Id}_E$ . Montrer que  $f$  est injectif, que  $h = f^* \circ f$  est autoadjoint défini positif, et que  $h$  a comme spectre exactement  $\mathbb{N}^*$ .

**63)\***(M05) Soit  $E$  euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $u^2 = 0$ . Prouver que  $u + u^*$  est inversible si et seulement si  $\text{Ker } u = \text{Im } u$ .

**64)\*\***(C06) Dans  $\mathbb{R}^4$  euclidien naturel, on considère le cube  $C$  défini par les  $X$  de composantes majorées en valeur absolue par 1 et  $H$  l'hyperplan d'équation:  $\sum x_i = 0$ .  $C \cap H$  est un solide d'un espace euclidien de dimension 3. Prouver que  $C \cap H$  est un octaèdre régulier. ( On utilisera le changement de base matrice de

passage:  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ).

**65)\***(C05) Dans  $\mathbb{R}^4$  euclidien naturel, Soit  $P$  le plan vectoriel défini par:

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \text{ et } x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0).$$

Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur  $P$ .

**66)\*\*\***(U08) **Le théorème de Fischer-Cochran.** Soit  $E$  euclidien de dimension  $n$ . Soient  $q_1, \dots, q_m, m$  formes quadratiques telles que  $\sum_{i=1}^m q_i(x) = \|x\|^2$  pour tout  $x$  et  $\sum_{i=1}^m \text{rg}(q_i) = n$ , ( $\text{rg}(q)$ : rang de  $q$ ).

Prouver qu'il existe  $m$  projecteurs orthogonaux  $(p_i)$ , tels que: pour tout  $i$  et tout  $x$ ,  $q_i(x) = (p_i(x)|x)$  et  $E$  est somme directe orthogonale des  $\text{Im } p_i$ .

**67)\*\***(X02) Soit  $\Delta$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  défini par  $\Delta(x)_i = x_i - x_{i-1}$  en posant  $x = \sum x_i e_i (1 \leq i \leq n)$  et  $x_0 = 0$ . Prouver que  $D$  est inversible et que  $\|\Delta^{-1}\| = \frac{1}{2 \sin(\frac{\pi}{2(2n+1)})}$  (norme fonctionnelle associée au produit scalaire naturel de  $\mathbb{R}^n$ )

**68)\*\*\***(U07) Soit  $E$  euclidien orienté de dimension 3. On se propose de prouver que le groupe  $O + (E)$  des rotations est simple (les seuls sous groupes distingués sont  $\{I\}$  et  $O+$ ). Soit donc  $\Gamma$  un sous groupe distingué de  $\Gamma \neq I$ .

**a)** Soit  $u \in \Gamma$  et  $u \neq I$ ; en étudiant  $u^k$ , montrer qu'il existe  $\rho \in \Gamma$ , d'angle  $\theta$  tel que  $\cos \theta < 0$ , et en déduire l'existence de  $x \neq 0$  tel que  $(x|\rho(x)) = 0$ .

**b)**  $x$  étant défini dans (a), soit  $t$  le retournement autour de  $x$ . On pose  $r = t \rho t \rho^{-1}$ . Vérifier que  $r \in \Gamma$ ; calculer  $r(\rho(x))$ ; en déduire que  $r$  est un retournement.

**c)**  $r$  étant défini dans (b) vérifier que  $\{f r f^{-1}, f \in O+\}$  est l'ensemble des retournements. Conclure.