Exercices sur les autoadjoints et la géométrie euclidienne

On notera:
- $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices carrées réelles, de taille n, symétriques,
- $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des matrices carrées réelles A, de taille n, symétriques et positives (i.e. $Q(X) = {}^tXAX \geqslant 0$),
- $\mathcal{S}^{++}$ l'ensemble des matrices carrées réelles A, de taille n, symétriques et définies positives (i.e. Q est définie positive),
- $\mathcal{H}$ l'ensemble des matrices carrées complexes, de taille n, hermitiennes,
- $\mathcal{H}^+$ l'ensemble des matrices carrées complexes A, de taille n, hermitiennes et positives (i.e. $H(X) = {}^t\overline{X}AX \geqslant 0$),
- $\mathcal{H}^{++}$ l'ensemble des matrices carrées complexes A, de taille n, hermitiennes et définies positives (i.e. H est définie positive).

1)**(X02) Soit une matrice $H = (h_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{H}^{++}$. **a)** Montrer que $h_{ii} > 0$ pour tout i.

b) Soit $G = (h_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n-1}$ (sous-matrice principale de H). Montrer que G est définie positive.

c) Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure T, inversible, telle que $G = T^*T$. Réciproque ?

d) On prend $H = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ \overline{b} & 0 & a \end{pmatrix}$. A quelles conditions s'agit-il d'une matrice définie positive ?

e) Reprendre les questions précédentes pour des matrices seulement positives. *Indication: blocs.*

2)*(C02) **a)** Montrer que l'application qui à (A, B) associe $\mathrm{tr}(A^tB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Soient A et B symétriques et positives; montrer que: $0 \leqslant \mathrm{tr}(AB) \leqslant \mathrm{tr}(A)\,\mathrm{tr}(B)$ et que $\mathrm{tr}\big((AB + BA)^2\big) \leqslant 4\,\mathrm{tr}(A)^2\,\mathrm{tr}(B)^2$.

c) Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ possède au moins une matrice inversible.

3)*(C08) Soit A une matrice réelle symétrique définie positive avec A_1 et A_2 carrées: $A = \begin{pmatrix} A_1 & B \\ {}^tB & A_2 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que A_1 et A_2 sont symétriques définies positives.

b) Montrer que $\det A \leqslant \det A_1 \det A_2$.

4)*(M07) Soit E un espace vectoriel euclidien et soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur.

a) Dans quel cas a-t-on $p^* \in Vect\{\mathrm{Id}, p\}$?

b) On pose $q = p + p^*$. À quelle condition q est-il un endomorphisme positif ? Montrer que $q^2 - q$ est toujours positif. Que peut-on en conclure quant aux valeurs propres de q ?

5)***(X07) Soit $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})^2$.

a) Montrer qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPP = A$

b) En déduire que $C = (a_{i,j}b_{i,j})$ est symétrique positive.

c) Que peut-on dire de $D = (e^{a_{i,j}})$?

6)**(L08) Soit une matrice A symétrique positive, dont tous les coefficients non diagonaux sont strictement négatifs. Pour une colonne réelle X, on note $|X|$ la colonne des valeurs absolues, $X_+ = \frac{X+|X|}{2}$ et $X_- = X - X_+$.

a) Montrer que pour tout X: ${}^t|X|A|X| \leqslant {}^tXAX$.

b) Montrer que si $X \neq 0$ et $AX = 0$, alors ${}^tUA|X| = 0$ pour tout U, puis montrer que toutes les coordonnées de X sont non nulles.

c) Montrer que $\mathrm{rang}(A) \geqslant n - 1$. *Remarque: ce dernier résultat peut s'obtenir avec la méthode du pivot.*

7)*(C08) Soit A une matrice symétrique positive et B sa comatrice. Montrer que B est diagonalisable et symétrique positive. *Indication: discuter sur le rang de A.*

8)**(C08) Soit $A = (a_{ij})$ avec $a_{ij} = \frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}$, les λ_i étant positifs et distincts.

a) Montrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que A est définie positive. *Indication: on recommande de considérer les fonctions $x \mapsto e^{\lambda_i x}$. Remarque: l'usage de Maple était proposé - pour quoi faire ?*

c) On choisit $\lambda_i = i - \frac{1}{2}$. Montrer que $\det A_n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. *Indication: inégalité de la moyenne géométrique !*

9)**(X07) Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n, $\mathcal{S}^+$ l'ensemble des matrices symétriques réelles positives. Soit P l'ensemble des couples (X, S), X étant un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et $S \in \mathcal{S}$, tels que $S - \frac{1}{2}\, X\,{}^tX$ appartienne à $\mathcal{S}^+$.

a) Vérifier que P est un convexe fermé (de $\mathbb{R}^n \times \mathcal{S}$). *Indication: introduire un vecteur Y et dériver deux fois la fonction $f(\mu) = {}^tY\left(\mu(S_1 - \frac{1}{2}\, X_1{}^tX_1) + (1-\mu)(S_2 - \frac{1}{2}\, X_2{}^tX_2)\right) Y$.*

b) Décrire les vecteurs X tels que $(X, S) \in P$ pour une matrice S diagonale, fixée. *Indication: X a les mêmes lignes nulles que S.*

10)**(X08) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit $j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+^*$ convexe continue, et $\mathcal{U}$ un convexe compact non vide de $\mathbb{R}^n$. On pose $J(V) = \frac{1}{2} <AV|V> - <b|V> + j(V)$. Existence et unicité de $U_0 \in \mathcal{U}$ tel que $J(U_0) = \operatorname*{Inf}_{V \in \mathcal{U}} J(V)$?

11)**(L07) **Décomposition polaire.** On définit : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|M\| = \mathrm{tr}({}^tMM)$.

a) Montrer qu'il s'agit d'une norme euclidienne.

b) On fixe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; calculer la différentielle en 0 de l'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $f(W) = \|A - e^W\|$.

suppose que $\forall U \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), \|A - I_n\| \leqslant \|A_U\|$. Montrer que A est symétrique.

c) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists (U, S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telles que $A = SU$. A-t-on unicité ?

12)***(L09) Soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ tel que : $\exists k \in]0, 2[, \forall M \in \mathcal{G}, \|M - I_n\| \leqslant k$ (où $\|.\|$ est la norme subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{C}^n$). Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*, \forall M \in \mathcal{G}, M^m = I_n$.

13)***(U08) Montrer que l'exponentielle est un homéomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ sur son image (qu'on déterminera). En est-il de même de la racine carrée définie sur $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$?

14)***(X05) **Décomposition polaire-bis.**

a) Montrer que $\forall M \in GL_n(\mathbb{R}), \exists (S, O) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R}), M = SO$, et qu'on a unicité de la décomposition.

b) Prouver que cette décomposition induit un homéomorphisme de $GL_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \times \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

15)**(M05) **Inégalité de Hadamard.** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$; montrer que $0 \leqslant \mathrm{dét}(A) \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$, et caractériser l'égalité.

16)**(C08) **Injectivité de la racine k-ième positive.** Soient A, B deux matrices symétriques positives. Montrer que $A^k = B^k$ entraine $A = B$. *Indication: c'est une question sur les espaces propres.*

17)**(X03) **Décomposition en valeurs singulières.** Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe deux matrices unitaires U et V telle que U^*AV soit diagonale. Puis étendre ce résultat au cas des matrices singulières. *Indication: Considérer A^*A.*

18)**(L09) Soient $C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $C^*C = D^*D$. Montrer l'existence de $U \in U_n(\mathbb{C})$ telle que $C = UD$. *Indication: interpréter la construction de U comme la recherche d'une isométrie avec quelques contraintes.*

19)**(M05) **Décomposition polaire-ter.** Soit E un espace euclidien ou hermitien de dimension n, et $u \in \mathcal{L}(E)$; soit $v = u^* \circ u$.

a) Montrer que v admet une racine carrée (à savoir, un endomorphisme w autoadjoint positif tel que $w^2 = v$).

b) Comparer $\operatorname{Ker} u, \operatorname{Ker} v, \operatorname{Ker} w$.

c) Soit alors $r : \operatorname{Im} w \to E$ défini de la manière suivante: si $y = w(x_1) \in \operatorname{Im} w$, alors $r(y) = u(x_1)$. Vérifier que cette définition a un sens, que r peut se prolonger en une isométrie de E, et que $u = r \circ w$. On vient de montrer que tout endomorphisme de E (matrice carrée) est décomposable en produit d'un automorphisme (matrice) orthogonal/unitaire et d'un endomorphisme autoadjoint positif (matrice symétrique/hermitienne positive).

d) Étudier l'unicité de w et de r dans la décomposition ci-dessus: si $u = rw = r'w'$ alors a-t-on $w = w'$ et quel lien existe entre r et r' ?

20)**(C07) **a**) Montrer que le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ engendré par $O_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $N(A) = \underset{O\in O_n(\mathbb{R})}{\mathrm{Sup}} |\operatorname{tr}(AO)|$. Vérifier que N existe et que c'est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Indication: les coefficients d'une matrice orthogonale peuvent-ils être bien grands ?

c) Montrer que cette norme est invariante par le groupe orthogonal, au sens où $U \in {}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow N(AU) = N(UA) = N(A)$.

d) Soient S une matrice symétrique positive. Calculer $N(S)$.

e) On utilise le concept de racine carrée d'une matrice symétrique positive. Montrer que $N(A) \leqslant \operatorname{tr}[(A^tA)^{1/2}]$, puis qu'on a égalité.

21)**(M07) Soit A antisymétrique réelle. Montrer qu'il existe P orthogonale telle que $A = PBP^{-1}$, B étant une matrice diagonale par blocs, de blocs diagonaux nuls ou de la forme: $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$. *Indication: certains examinateurs exigent que l'on passe sur $\mathbb{C}$, d'autres réclament la diagonalisation de A^2 sur $\mathbb{R}$; et ceci est plus simple...*

22)**(C06) **Endomorphismes antisymétriques.** Soit f une application de E (euclidien) dans E. Montrer l'équivalence entre:

(i) $\forall x, y \in E\ (x|f(y)) = -(f(x)|y)$

(ii) f est linéaire et $(x|f(x)) = 0$ pour tout $x \in E$.

(ii) f est linéaire et $f^* = -f$.

Que dire des valeurs propres de f? De son noyau et de son image ? Montrer que $\operatorname{rg} f$ est nécessairement pair, et que $\det f$ est réel positif. Étudier, de même, ce que l'on peut dire des endomorphismes f d'un espace hermitien tels que $f^* = -f$.

23)***(X04) On donne M matrice réelle symétrique d'ordre n. Quels sont les extrema du rang d'une matrice A réelle d'ordre n telle que ${}^tA + A = M$?

24)**(X04) Soient A et B deux matrices réelles symétriques carrées d'ordre 2, de valeurs propres respectives $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ et $\mu_1 \leqslant \mu_2$. Montrer que $\operatorname{tr}(AB) \leqslant \lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2$.

25)**(X07) Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E.

a) On suppose que u est autoadjoint et de trace nulle. Montrer qu'il existe une base (e_i) orthonormée de E telle que $<e_i|u(e_i)> = 0$.

b) Soit une matrice A carrée, réelle, de trace nulle. Montrer qu'il existe une matrice U orthogonale telle que ${}^tUAU$ ait une diagonale entièrement nulle. En déduire qu'il existe des matrices B,C, avec C symétrique, telles que $A = BC - CB$.

26)**(E04) **Transformation de Cayley.** Soit E hermitien et $v \in \mathcal{L}(E)$, autoadjoint. Soit $\omega \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$; prouver que $v - \omega I$ est inversible et que $u_\omega = (v - \overline{\omega}I)(v - \omega I)^{-1}$ est unitaire n'admettant pas la valeur propre 1. Peut-elle avoir la valeur propre -1 ? Étudier la réciproque (à savoir, v en fonction de u_ω).

27)*(M05) Soit un automorphisme d'un espace vectoriel euclidien E de dimension n. Montrer qu'il existe une base orthonormée (e_i) de E telle que $(f(e_i))$ constitue une base *orthogonale* de E.

28)**(U02) Soit $A \in \mathcal{S}$, à coefficients strictement positifs.

a) Soit une valeur propre λ de module maximal. Soit $x = (x_i)$ un vecteur propre associé; montrer que $x' = (|x_i|)$ est aussi un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

b) Montrer que $\lambda > 0$, que c'est l'unique valeur propre de module maximal, et qu'on peut prendre x est à composantes strictement positives.

29)***(X04) Soit A une matrice réelle symétrique et positive, de valeurs propres $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$. Soit V_k le sous-espace engendré par les vecteurs propres associés à $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Pour X de norme 1, on note $\phi(X) = (AX|X)$.

a) Montrer que $\lambda_k = \underset{X\in V_k}{\mathrm{Max}}\ \phi(X) = \underset{X\in V_k^\perp}{\mathrm{Min}}\ \phi(X)$.

b) Montrer que $\lambda_1 \leqslant a_{ii} \leqslant \lambda_n$.

c) Montrer que $\lambda_k = \underset{W,\dim W=k}{\mathrm{Min}}\big(\underset{X\in W}{\mathrm{Max}}\ \phi(X)\big)$.

30)***(M06) **Projections orthogonales.** Soit p un projecteur quelconque d'un espace euclidien E, et soit: $c = \mathrm{Sup}\{(u|v)\ /\ u \in \mathrm{Ker}\, p, v \in \mathrm{Im}\, p, \|u\| = 1, \|v\| = 1\}$.

a) Montrer que $c \in [0, 1]$; on pose alors $c = \cos\alpha$ (angle de $\mathrm{Ker}\, p$ et de $\mathrm{Im}\, p$). Montrer que $\|p\| = 1/\sin\alpha$. *Indication:* $\|p\| = \mathrm{Sup}\{\|p(u)\|\ /\ \|u\| = 1\}$

b) Soit p un projecteur. Prouver que l'on a équivalence de:

(i) p est une projection orthogonale;

(ii) pour tous x et y de E: $<x|p(y)> = <p(x)|y>$;

(iii) $\|p\| = 1$ ou 0.

c) Si p et q sont deux projections orthogonales, prouver que $\|p - q\| \leqslant 1$, et que p et q ont même rang si on a $\|p - q\| < 1$. *Indication: examiner* $\mathrm{Im}\, p \cap \mathrm{Ker}\, q$ *et* $\mathrm{Ker}\, p \cap \mathrm{Im}\, q$.

d) On définit une distance dans la famille des sous espaces de E en posant: $d(A, B) = \|p_A - p_B\|$, en notant p_F le projecteur orthogonal d'image F. Prouver que cet espace est compact; le décomposer en composantes connexes (c'est-à-dire, en sous-connexes maximaux).

31)**(C02) **Endomorphismes normaux.** Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (E hermitien ou euclidien). On dit que u est *normal* si u et u^* commutent.

a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^*u$.

b) Soit n nilpotent et normal. Montrer que $n = 0$.

c) Soit un projecteur p qui est normal. Montrer que p est un projecteur orthogonal.

d) Montrer que si u est normal alors les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux.

e) Montrer que si u diagonalise dans une base orthonormale alors il est normal.

f) Montrer que si u est normal et que χ_u est scindé alors u est diagonalisable dans une base orthonormée de E. *Indication: décomposer en somme de deux endomorphismes plus simples.*

32)*(M05) Soient $A, B \in \mathcal{S}^{++}$. On pose: $A_0 = A$ et: $A_{k+1} = B + (A_k)^{-1}$. Montrer que la suite (A_k) est bien définie, puis que si X est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, alors la suite réelle $u_k = {}^tXA_kX$ est bornée.

33)***(M02) **Inégalités de Ky Fan.** Soit $A = (a_{ij})$ une matrice symétrique réelle et soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ses valeurs propres rangées en ordre décroissant. Prouver que $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k} a_{ii} \leqslant \sum\limits_{1\leqslant i\leqslant k} \lambda_i$ pour tout k. *Indication: utiliser simultanément la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et la base orthonormée de diagonalisation.*

34)**(X06) **Isométries comme points extrémaux.** A partir de $\mathbb{R}^n$ euclidien on norme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $\|A\| = \mathrm{Sup}\{\|AX\|\ /\ \|X\| = 1\}$. Soit $\mathcal{B}$ la boule unité fermée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{Z}$ l'ensemble de ses points extrémaux (A t.q. $A = \lambda B + (1-\lambda)C, 0 < \lambda < 1$ et $B, C \in \mathcal{B} \Rightarrow A = B = C$). Montrer que $\mathcal{Z} = O_n(\mathbb{R})$. *Indication: décomposition polaire.*

35)**(X05) Soient E un espace euclidien de dimension N, F et F' des sous-espaces supplémentaires de E, de dimension n, mais pas nécessairement orthogonaux. On note π et π' les projecteurs orthogonaux sur F et F' respectivement. Soient $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n, 0, \ldots, 0)$ les valeurs propres de $\pi - \pi\circ\pi'\circ\pi$ (justifier). Montrer que les valeurs propres de $\pi - \pi'$ sont $\pm\sqrt{\sigma_1}, \ldots, \pm\sqrt{\sigma_n}$.

Indication: Soit e une base de E obtenue en concaténant des bases orthonormées f et f' de F et F', exprimer les matrices de π et π' dans la base e. Étudier les polynômes caractéristiques (par blocs). Utiliser l'identité:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & bd^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a - bd^{-1}c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d^{-1}c & 1 \end{pmatrix}.$$

36)*(C03) Soient $A, B \in \mathcal{S}$. Montrer l'équivalence des propositions suivantes:

(i) AB est symétrique

(ii) $AB = BA$

(iii) Il existe P inversible rendant ${}^tPP$, ${}^tPAP$ et ${}^tPBP$ diagonales.

37)*(X05) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique et positive telle que $A = B^2$. Donner l'unicité de B. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique, positive. Montrer que $\mathrm{tr}(AC) \geqslant 0$. Que dire si on a égalité ?

38)*(C00) Soient $A, B \in \mathcal{S}^+$. Montrer que AB a ses valeurs propres toutes réelles, positives ou nulles. *Indication: Montrer d'abord que $X^*BX \geqslant 0$, nul si et seulement si $BX = 0$, puis posant $ABX = \lambda X$, examiner X^*BABX. On peut aussi prendre des racines carrées.*

39)**(M04) Soit E hermitien et u autoadjoint défini positif, v autoadjoint. Montrer que uv et vu sont diagonalisables à spectre réel.

Indication: utiliser la forme sesquilinéaire hermitienne définie par $\Phi(x, y) = <u(x)|y>$.

Réciproquement, montrer que tout endomorphisme diagonalisable à spectre réel peut être décomposé comme produit d'un autoadjoint défini positif et d'un autoadjoint positif.

40)*(E05) Soient A et B deux matrices symétriques, éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que

$$\forall X \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \leqslant {}^tXAX \leqslant {}^tXBX.$$

Montrer que $0 \leqslant \det(A) \leqslant \det(B)$. *Indication: prendre une racine carrée définie positive, si possible. Ou bien, considérer un autre produit scalaire que l'usuel.*

41)**(X08) Soient deux matrices A, B hermitiennes positives. Montrer: $\det A + \det B \leqslant \det(A + B)$. *Indication: commencer par le cas où $A = I$ qui est facile (v.p.); si $A \in \mathcal{H}^{++}$ écrire $A = {}^tMM$ avec M inversible et jouer sur les produits.*

42)*(C03) Soit E hermitien, u autoadjoint positif et v autoadjoint. Montrer que $|\det(u + iv)| \geqslant \det u$.

43)*(M08) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{S}^+$. Montrer que $\left(\frac{\mathrm{tr}(A)}{n}\right)^n \geqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii} \geqslant \det A$ et discuter les cas d'égalité.

Indication: procédé d'orthogonalisation de Schmitt.

44)**(M06) Montrer que: $\sqrt[n]{\det A} + \sqrt[n]{\det B} \leqslant \sqrt[n]{\det(A + B)}$ pour toutes $A, B \in \mathcal{S}^+$. *Indication: commencer par le cas $A = I$ en se ramenant à la convexité de la fonction $\varphi(x) = \ln(1 + e^x)$. Puis si A est inversible considérer l'endomorphisme associé à $A^{-1}B$ qui est autoadjoint pour la forme $Q(V) = {}^tVAV$. Enfin considérer le cas général.*

45)**(C07) **Conditions de Sylvester.** Soit $A \in \mathcal{S}$. On note A_k la sous-matrice de A formée des k premières lignes et colonnes. Montrer que l'on a $A \in \mathcal{S}^{++}$ si, et seulement si les $\det A_k$ sont strictement positifs. *Indication: introduire la forme $Q(X) = {}^tXAX$; pour un sens, restreindre. Inversement, récurrence; considérer $W = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$ (e_i = base canonique), les vecteurs propres de A et le signe des valeurs propres. Il y a aussi une solution très directe basée sur la méthode de Gauss.* Cas des matrices définies négatives ?

46)*(C08) Soit la matrice réelle $M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$, avec pour tout k $a_k > |b_k| + |b_{k-1}|$, en posant $b_0 = b_n = 0$.

a) Montrer que toute valeur propre de M appartient à $]0, 2\,\mathrm{Max}\, a_k[$.

b) Factoriser $M = AB$ avec A triangulaire supérieure, B triangulaire inférieure.

47)*(C02) Soit E euclidien de dimension paire $2n$, F et G des sous-espaces de dimension n. Existe-t-il D droite vectorielle incluse dans F et D' droite vectorielle incluse dans G telles que D' (resp. D), soit la projection orthogonale de D sur G (resp. de D') sur F ?

48)* Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe P orthogonale telle que: $P{}^tAA = A{}^tAP$ *Indication: soit passer par les polynômes caractéristiques (égalité via produit par blocs); soit considérer successivement les cas inversible/non inversible (rangs, noyaux, orthogonaux).*

49)***(U03) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathcal{T}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures et $\mathcal{U}_n(\mathbb{C})$ le groupe unitaire. Montrer l'équivalence entre

(1) $\mathrm{sp}(A\bar{A}) \subset \mathbb{R}_+$

(2) $\exists P \in \mathcal{U}_n(\mathbb{C}) \quad {}^tPAP \in \mathcal{T}_n(\mathbb{C})$.

50)***(L06) Soit une matrice Z symétrique *complexe* et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la liste des valeurs propres de $Z\bar{Z}$.

a) Montrer que les λ_i sont strictement positifs.

b) Soit $D = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$. Montrer qu'il existe une matrice U unitaire telle que $Z = {}^tUDU$.

51)*(X03) Montrer que l'image d'une conique propre par une similitude est une cônique de même excentricité. À quelle condition (c.n.s.) deux côniques sont-elles semblables ?

52)*(C02) Trouver M et N pour que le triangle SMN avec $S(a, 0)$, inscrit dans l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ait une aire maximale. Calculer cette aire.

53)*(C02) **a**) Quelle est la nature de la courbe $\mathcal{E}$ d'équation $2x^2 + 3y^2 = 5$ dans un repère orthonormé du plan euclidien ?

b) Soit A le point de ccordonnées $(1, 1)$. On note M le point de $\mathcal{E}$ en lequel la droite de pente t passant par A recoupe $\mathcal{E}$. Trouver les coordonnées de M.

c) Quelles sont les solutions entières de l'équation $2u^2 + 3v^2 = 5w^2$?

54)**(C04) Soient $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$. Dans le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé, on considère les deux courbes C_1 et C_2 d'équations respectives $(ax + by)^2 + (a'x + b'y)^2 = 1$ et $(ax + a'y)^2 + (bx + b'y)^2 = 1$. Nature des deux courbes ?

On suppose que $ab' - a'b \neq 0$. Montrer qu'il existe une isométrie transformant C_1 en C_2.

Que dire si $ab' - a'b = 0$?

55)*(M05) À quelle condition la courbe d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$ est-elle une hyperbole équilatère ?

56)*(C02) Soit $a \in \mathbb{C}^*$; étudier l'application $z \in \mathbb{C} \longmapsto z + a\bar{z}$. Montrer que l'image du cercle-unité est une ellipse ou un segment dont on donnera respectivement les caractéristiques.

57)(C) Soit une parabole $\mathcal{P}$. Quel est le lieu $\mathcal{E}$ des points du plan depuis lesquels on peut mener deux tangentes à $\mathcal{P}$ faisant un angle $\pm\pi/4$ (nature, symétries) ? Existe-t-il un point sur $\mathcal{E}$ et un point sur $\mathcal{P}$ dont la distance soit minimale ?

58)(C) Soit une ellipse $\mathcal{E}$, un point M_0 de $\mathcal{E}$, une droite $\mathcal{D}$ passant par M_0 recoupe $\mathcal{E}$ en P; on appelle $\mathcal{D}'$ la droite symétrique de $\mathcal{D}$ par rapport à l'un des axes de $\mathcal{E}$; $\mathcal{D}'$ recoupe $\mathcal{E}$ en Q distinct de M_0. Montrer que (PQ) passe par un point fixe (lorsque $\mathcal{D}$ varie), ou possède une direction fixe.

59)**(M03) Soit $a > b > 0$. Pour $\lambda \in]-\infty, b[\cup]b, a[$ caractériser la courbe C_λ d'équation $\dfrac{x^2}{b-\lambda} + \dfrac{y^2}{a-\lambda} = 1$ dans un repère orthonormé et montrer que, par tout point du plan en dehors des axes, il existe deux courbes C_λ et C_μ orthogonales en ce point.

60)*(M08) Soit un triangle rectangle ABC. Lieu des centres des hyperboles passant par A,B,C ? Même question pour les foyers.

61)**(C00) Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole ayant pour équation $xy = 1$ dans un repère orthonormé, et trois points A, B, C de $\mathcal{H}$.

a) Montrer que l'orthocentre de ABC se situe sur $\mathcal{H}$; quelles sont ses coordonnées ?

b) Soient (α) et (α') les droites perpendiculaires à (BC) en ses points d'intersection avec (Ox) et (Oy). On définit de même (β) et (β'). Montrer que $(\alpha), (\beta), (\gamma)$ sont concourantes en un point I, et que $(\alpha'), (\beta'), (\gamma')$ sont concourantes en un point I'.

62)*(C06) Soit $\mathcal{P}$ une parabole définie par son foyer F et son paramètre p. Soit $\mathcal{D}$ une droite variable passant par F. $\mathcal{D}$ rencontre $\mathcal{P}$ en M et N.

a) Donner le lieu du milieu de $[M, N]$.

b) Les normales à $\mathcal{P}$ en M et N se coupent en Q. Lieu de Q ?

63)**(C05) Soit $\mathcal{P}$ une parabole de sommet O, A un point de son axe, $\mathcal{D}$ une droite variable passant par A. $\mathcal{D}$ rencontre $\mathcal{P}$ en M et N. Donner le lieu des centres des cercles circonscrits au triangle MNO.

64)*(M02) Distance de O à la cônique $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225$.

65)*(C05) Soit D une droite du plan euclidien et A un point n'appartenant pas à D.

a) Ensemble des foyers des paraboles passant par A et admettant D pour directrice?

b) Ensemble des sommets de ces paraboles?

c) Ensemble des foyers des ellipses d'excentricité e donnée, passant par A et dont la directrice associée au foyer en question est D?

d) Ensemble des autres foyers de ces ellipses?

66)*(M00) Soit une parabole $\mathcal{P}$ de foyer F et de sommet O. Une droite D variable passe par F et coupe $\mathcal{P}$ en A et B. Soit M le centre du cercle circonscrit au triangle AOB. Quel est le lieu de M ?

67)**(C06) **Cercle orthoptique d'une ellipse.** Soit une ellipse $\mathcal{E}$ du plan affine euclidien.

a) Déterminer l'ensemble des points du plan depuis lesquels on peut mener à $\mathcal{E}$ deux tangentes perpendiculaires.

b) Rectangles d'aire maximale circonscrits à $\mathcal{E}$?

c) On considère à présent un repère fixé (Oxy), et que l'ellipse $\mathcal{E}$ glisse sur les axes (Ox) et (Oy) tout en leur restant tangente. Quel est le lieu du centre ?

68)**(M08) Soit dans un plan affine euclidien l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $x^2 + 5y^2 = 5$. Déterminer l'ensemble des centres des cercles passant par O et tangents à $\mathcal{E}$.

69)*(C05) Soit une ellipse $\mathcal{E}$ de foyers F et F'. Un point M décrit $\mathcal{E}$. On projette orthogonalement F sur la tangente en M à $\mathcal{E}$, obtenant un point N. Quel est le lieu de N ?

70)*(M08) On considère dans un repère orthonormé la famille de courbes (C_λ) d'équations $x^2 + y^2 + 2\lambda xy - 2x + 2y = 0$.

a) Tracer C_0, déterminer les points communs à toutes les courbes C_λ.

b) Nature de C_λ. Tracer la parabole de la famille.

c) Lieu des centres de C_λ quand λ varie.

d) Déterminer parmi les ellipses de la famille, celle d'aire minimale.

71)*(C08) Soient les plans $P_1 : 2x + y + z = 2$ et $P_2 : x + 3y - z = 1$, ainsi que $\Delta = P_1 \cap P_2$. Quelle est la distance de Δ à (Oz) ?

72)*(C07) Projection orthogonale d'un cube sur un plan orthogonal à une diagonale.

73)(C) Déterminer le symétrique du plan $2x + y + z = 3$ par rapport au plan $x + y + 2z = 0$.

74)(C) Soient les deux droites D_m d'équations $x = \dfrac{m}{2}z - 3, y = z - \dfrac{1}{2m} + 1$ et Δ_m d'équations $x = z + 2, y = \dfrac{1}{2}z + 3 - 2m$ (à vérifier). Peut-on trouver m tel que les deux droites soient coplanaires ?

75)(C) Soit dans un espace affine euclidien E de dimension 3 une famille $(P_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ de plans affines. On note $\vec{n}_i$ un vecteur unitaire orthogonal à P_i. On considère la fonction $\varphi(M) = \sum\limits_{i=1}^{k} d(M, P_i)^2$, définie sur E et à valeurs réelles. On note E_K l'ensemble des points de E où φ prend la valeur K (c'est une surface de niveau).

a) Montrer que φ n'est pas majorée mais qu'elle est minorée et atteint son minimum.

b) Que sait-on sur la nature de E_K en général ?

c) On suppose que $k = 3$ et que les vecteurs n_i sont indépendants. Déterminer le point qui minimise φ et la nature de E_K.

d) Même question si $k = 3$ et $(\vec{n}_i)$ est de rang 2.

e) Même question si $k = 4$ et $(\vec{n}_i)$ est de rang 3.

76)*(C07) Étudier la quadrique d'équation $(a + b)(x^2 + z^2) + ay^2 + 2bxz = 1$.

77)**(M08) Ensemble des points de l'espace équidistants d'une droite et d'un plan fixés. *Indication: dans le cas où la droite et le plan se coupent, la configuration proposée est invariante par des homothéties. Sinon, considérer des translations.* L'ensemble trouvé peut-il constituer une surface de révolution ?

78)*(C04) Soient deux droites D_1, D_2 non coplanaires et $r > 0$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $d^2(M, D_1) + d^2(M, D_2) = r^2$.

79)*(C04) Soit P un plan et A un point, fixés. Soit E l'ensemble des points de l'espace qui sont équidistants de A et de P.

a) Étudier E.

b) Étudier la section de E par un plan faisant un angle $\frac{\pi}{4}$ avec P.

c) Comparer avec l'ensemble des centres des sphères passant par A et tangentes à P.

d) Étude de l'ensemble des projections orthogonales de A sur les plans tangents à E.

80)*(M04) Ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ équidistants de deux droites données.

81)*(C04) Soit $\mathcal{P}$ la surface d'équation $x^2 + y^2 = 2pz$. Trouver le lieu des centres des ellipses d'excentricité $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ contenues dans $\mathcal{P}$.

82)**(C05) Soit un cône de révolution $\mathcal{C}$.

a) On suppose que l'intersection de $\mathcal{C}$ avec un plan P est une hyperbole équilatère. Montrer que l'intersection de $\mathcal{C}$ avec tout autre plan parallèle à P est aussi une hyperbole équilatère.

b) A quelle condition sur $\mathcal{C}$ une telle intersection est-elle possible ?

c) Supposant cette condition vérifiée, déterminer le lieu des centres des hyperboles équilatères ainsi définies.

83)**(C05) Étudier la surface d'équation $azy + bxz + cyx = 0$; à quelle condition est-elle de révolution ? cas particulier où $a = b = c$; image par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ autour de la droite d'équations $x = y = z$.

84)*(C07) Soit $q(x, y, z) = xy + yz + zx + a(x^2 + y^2 + z^2)$ et Σ la surface d'équation $q(x, y, z) = 0$. Quelle est la nature de Σ ? Quels sont les plans où la restriction de q est définie positive (resp. négative) ? *Indication: la condition sera exprimée en fonction de l'angle du plan avec l'axe de révolution.*

85)*(M08) On fait tourner la droite $\mathbf{D}$ d'équations: $y = x+1, z = 0$ autour de l'axe $\Delta : y = 0, x = z$. Equation et nature de la surface ainsi créée ?

86) Montrer que $\{x^2 + y^2 - z^2 = 0\} \cap \{2x + 3y - z = 0\}$ est formée de deux droites. Trouver l'angle de ces droites.

87)**(T) Rouver les cercles tracés sur un ellipsoïde ; quel est leur rayon maximal ?

88)***(U05) **Ellipsoïde de John.** Soit E un espace euclidien, C une partie bornée et génératrice de E. Pour $u \in \mathcal{S}^+(E)$, on pose $P_u = \{x \in E, (u(x)|x) \leqslant 1\}$. On définit également $\mathcal{A} = \{u \in \mathcal{S}^+(E), C \subset P_u\}$.

a) Montrer que $\mathcal{A}$ est compact.

b) Montrer que le déterminant atteint son maximum sur $\mathcal{A}$ en un unique point.

c) Donner une interprétation géométrique de ce résultat.

89)***(U06) Soit E un espace euclidien (muni d'un produit scalaire noté $(|)$) et G un sous-groupe compact de $GL(E)$.

a) Montrer qu'il existe un produit scalaire $<,>$ sur E tel que les éléments de G sont des endomorphismes orthognaux de $E, <,>$.

b) Montrer que si un sous-espace F de E est stable par tous mes éléments de G, il existe un supplémentaire de F dans E vérifiant la même propriété.