Exercices sur les Séries Entières

N.B. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe ; on notera systématiquement R_a le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$; on dit que f définie sur U à valeurs dans $\mathbb{C}$ est analytique (sur U) lorsqu'elle est développable en série entière au voisinage de tout point de U.

1)**(M07) **Rayons de convergence.** Calculer le rayon R_a lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, a_n$ vaut :

a) $(ch\,\frac{1}{n})^{n^\alpha}$
b) $(\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k})^{ln(n)}$
c) $\sum\limits_{k=1}^{n} n^\alpha$
d) $\int_1^{+\infty} e\text{G}{-t^2}dt$
e) $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$
f) $(1+\frac{(-1)^n}{n^2})^{n^3}$
g) le nombre de chiffres en base 10 de 2^n
h) le nombre de diviseurs de n
i) a^p si $n = p!$, 0 sinon.

2)***(X06) Soit $a \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, et $a_n = \frac{1}{sin(n\pi a)}$
a) Montrer que $R_a \leqslant 1$.
b) Evaluer R_a lorsque $a = \sqrt{2}$.
c) De même si a est un irrationnel algébrique.
d) Existe-t-il a tel que $R_a = 0$?

3)**(L08) **a**) Soient $(\theta_1, ..., \theta_p)$ des réels ; montrer que la suite $u_n = \sum\limits_{k=1}^{p} e^{in\theta_k}$ ne tend pas vers 0.
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et $a_n = tr(A^n)$; évaluer R_a et calculer $\sum a_n z^n$ sur le disque ouvert de convergence.

4)*(C05) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes, et $\forall n \in \mathbb{N}, c_n = a_n b_n$. Donner une relation entre R_a, R_b, R_c.

5)*(M04) Soit une suite réelle strictement positive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n-1}a_{n+1}}{a_n^2} = l \in \mathbb{R} = \setminus\{1\}$. Evaluer R_a.

6)**(C07) Calculer le rayon de convergence et la somme dans le disque ou intervalle ouvert de convergence de $\sum a_n z^n$ (ou $\sum a_n t^n$ lorsque a_n vaut :
a) $\frac{1}{4n+1}$
b) $\int_0^1 \frac{t^n}{1+t+t^2}\,dt$
c) $\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2}$.

7)*(M05) Soit, pour $|z| < 1, \phi(z) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$; que vaut $exp(\phi(z))$?

8)**(C08) Soit $a > -1$; donner un équivalent, lorsque $x \to 1^-$, de $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^\alpha x^n$.

9)***(X07) **Analyticité : zéros isolés.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$, et f analytique sur U.
a) Soit $z_0 \in U$; on suppose que $f(z_0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\forall z \in U$, si $|z - z_0| < r$ et $z \neq z_0$, alors $f(z) \neq 0$.

b) On suppose de plus que U est connexe par arcs ; montrer que si f s'annule sur une suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de points de U qui converge vers $a \in U$, alors $f = 0$.

c) Ce résultat reste-t-il vrai si on ne suppose plus la suite $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ convergente ?

10)***(L03) **Analyticité : différentiabilité et harmonicité.** Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f définie sur U à valeurs dans $\mathbb{C}$; on dit que f est dérivable *au sens complexe* en $z_0 \in U$ si et suelement si il existe $\lim_{z\to z_0 f(z)-f(z_0)/z-z_0} = f'(z_0) \in \mathbb{C}$. On dit que f est $\mathcal{C}^1$ *au sens complexe* sur U si et seulement si elle est dérivable *au sens complexe* sur U et f' y est continue (de même, par récurrence, pour la classe $\mathcal{C}^k$ *au sens complexe*).

a) Montrer que f est dérivable *au sens complexe* en $z_0 = x_0 + iy_0$ si et seulement si la fonction f_1, définie sur U en tant qu'ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans Cidentifié à $\mathrm{R}^2, ettellequef_1(x, y = f(x+iy)$ est différentiable en (x_0, y_0) et vérifie $df_{(x_0,y_0)}$ est une similitude directe.

b) Montrer que si f est $\mathcal{C}^2$ *au sens complexe* sur U, alors $Re(f_1)$ et $Im(f_1)$ sont harmoniques (i.e. de laplacien nul) sur U.

c) Etablir que si f est analytique sur U, alors elle y est $\mathcal{C}^\infty$.

11)***(X03) **Principe du maximum.** Soit U un ouvert borné de $\mathbb{C}$, et f définie sur $\overline{U}$, analytique sur U et continue sur $\overline{U}$.

a) Soit $z_0 \in U$, et $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$; prouver que $f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})dt$.

b) En déduire que $|f|$ atteint son maximum sur la frontière de U que peut-on dire si $f = 0$ sur cette frontière ?

12)***(U02) **Holomorphie.** (*Je regroupe ici plusieurs exercices posés aux E.N.S.*) Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et f $\mathcal{C}^1$ *au sens complexe* sur U.

a) On suppose dans les a) et b) seulement que $0 \in U$; soit $R > 0$ tel que $D(0, R) \subset U, z \in D(0, R)$ et $r \in]|z|, R[$. Montrer que $g(\lambda) = \int_0^{2\pi} \frac{f((1-\lambda)z+\lambda re^{it})-f(z)}{re^{it}-z}\, dt$ est constante sur $[0, 1]$.

b) En déduire que $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, avec $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt$. Les coefficients a_n dépendent-ils de r ?

c) En déduire que f est analytique sur U, puis qu'elle y est $\mathcal{C}^\infty$ *au sens complexe.*

d) On suppose que $U = \mathbb{C}$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.

e) En déduire le théorème de D'Alembert-Gauss.

13)***(X05) Soit $p \geqslant 1$ et $(a_1, ..., a_p) \in \mathbb{N}^p$ premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note c_n lenomnre de p-uplets d'entiers $(b_1, ..., b_p)$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k = n$. Donner un équivalent de c_n lorsque $n \to +\infty$.

14)*(M00) Soit $v_n = (-1)^{E(n/2)}n$ et $u_n(x) = 2^{v_n}\frac{x^n}{n}$.

a) Domaine de définition de $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

b) Calculer $f(x)$.

15)**(C04) Soit la suite de terme général a_n définie par $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ et $\forall n \geqslant 3$, $2na_n = 2na_{n-1} - a_{n-3}$. Avec Maple, étudier la suite de terme général $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Déterminer le rayon de convergence de la série de terme général $a_n x^n$. Soit f la somme de cette série ; montrer qu'il existe un polynôme P tel que $\forall x \in]-R, R[$, $(1-x)f'(x) = P(x)f(x)$. Montrer que $1 - \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$ et retrouver le premier résultat établi.

16)*(M04) Déterminer le domaine de convergence de $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{\cos 2n\pi/3}$ puis calculer la somme.

17)*(C02) Convergence et calcul de $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$.

18)*(C02) Soit $a \in]0, 1[$. On pose $\alpha_0 = 1$ puis $\alpha_n = (1 - \frac{a}{n})\alpha_{n-1}$ ainsi que $u_n = \frac{a}{n}\, u_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$.

a) Montrer que la suite (α_n) décroît et tend vers 0.

b) Déterminer le domaine de convergence et la somme de $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n x^n$.

19)*(M08) Soit $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,x^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,(1-x)^n$.

a) Définition et continuité de f.

b) Étude de la classe $\mathcal{C}^1$; calculer f' puis f.

20)**(M09) Soit $u_n=\dfrac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$. Déterminer le rayon de convergence de $f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nx^n$. Montrer que $f(x)$ est équivalent à $\exp(ex-\frac{1}{2})$ lorsque x tend vers $+\infty$. *Indication: une inégalité du genre* $e^x\leqslant 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3e^x}{6}$

21)* Calculer $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$.

22)* Calculer: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{(2n+2)(2n+4)(2n)!}$

23)** Étudier la convergence et calculer: $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{4n^2-5n+1}$

24)*(X06) Soient les suites (u_n) et (v_n) définies par u_0 et v_0, et les relations $u_{n+1}=u_n-v_n$ et $v_{n+1}=u_n-2v_n$. Étudier les séries entières $\sum u_nz^n$ et $\sum v_nz^n$.

25)*(C05) On pose $a_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n t\sin nt\,\mathrm{d}t$.

a) Calculer a_1 et a_2. Montrer que la série entière $g(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ a un rayon de convergence R supérieur ou égal à 1.

b) Montrer que $g(x)=-\frac{\ln(1-x)}{2-x}$.

c) Établir que $R=1$.

d) Prouver que $a_n\sim\frac{1}{n}$ (n tendant vers l'infini).

26)* Convergence et calcul de $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\frac{x^n}{n}$. Étudier notamment le cas $x=\pm1$.

27)*(M01) Soit $a_n=\displaystyle\int_0^1\frac{t^n}{1+t^n}\,\mathrm{d}t$.

a) DL_2 de a_n dans l'échelle des $1/n$.

b) Rayon de convergence de $\sum a_nz^n$ et étude de la convergence sur le cercle de convergence.

28)* Convergence et somme de $\sum a_nx^n$, avec $a_n=\displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$.

29)**(C08) Soit une suite (u_n) de réels vérifiant $u_n=\frac{-1}{3}\left(5u_{n-1}+u_{n-2}-u_{n-3}\right)$ pour tout $n\geqslant 3$.

a) Rayon de convergence de la série entière $\sum u_nz^n$? *Indication: ceci revient à majorer* u_n.

b) Somme de ladite série ? *Indication: équation différentielle ?*

c) En déduire u_n.

30)* Développer au voisinage de 0 les fonctions: $(\operatorname{Arcsin}x)^2$ et $\exp(\operatorname{Arcsin}x)$. Peut-on prendre $x=1$?

31)* Développer en 0 la fonction $\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^\alpha$.

32)**(L06) Soit $a\geqslant 0$ et la suite: $u_0=1$ $u_{n+1}=\frac{n+a}{n+2}\,u_n$. Étudier la série entière $\sum\limits_{0}^{\infty}u_nx^n$ (convergence et somme).

33)*(M04) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{3k+1}$.

34)***(M07) Soit $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$.

a) Étudier le graphe (reconnaitre), DL en 0 à l'ordre 5.

b) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0. *Indication: équation différentielle.*

c) Montrer que le rayon de convergence R du développement précédent vaut au moins 1. *Indication: ici il est utile d'introduire des cubes.*

d) Montrer que $R = 1$. *Indication: Soit S la série de Taylor de f. Montrer que $S(x)^2 = 1 + x + x^2$ pour tout x tel que $|x| < R$, dériver et passer dans $\mathbb{C}$.*

e) Soit $B_n = \operatorname*{Sup}_x |f^{(n)}(x)|$. Montrer que B_n existe; la suite (B_n) est-elle bornée ?

35)** Montrer que $(1-x)^{-x}$ a un D.S.E. au voisinage de 0, de rayon 1. *Indication: si l'équation différentielle a une solution du type $\sum a_n x^n$, montrer que: $\frac{1}{2} \leqslant a_n \leqslant n$ pour $n \geqslant 5$ par récurrence et en déduire que la somme de cette série doit coïncider avec f.*

36)**(C05) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a^n}{n+x}$.

a) Domaine de définition, caractère $\mathcal{C}^\infty$.

b) Limite quand x tend vers $n_0 \in \mathbb{Z}^-$.

c) Équivalent en $+\infty$.

d) Développement en série entière de $f(x) - \frac{1}{x}$.

37)*(M08) DSE en 0 de $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\ln(1 + x \sin t)}{\sin t}\,dt$.

38)*(M07) DSE en 0 de $f(x) = \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)$ (où $\theta \in]0, \pi[$). Qu'en déduit-on relativement à $\sum_{n \geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n}$? Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos\theta + x^2)\,d\theta$ (faire attention au rôle des variables).

39)**(C04) On définit la fonction f par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. Montrer que l'ensemble de définition de f est $]-1, 1[$. Montrer que f est strictement croissante sur $[0, 1[$. Quelle est sa limite en 1 ? Montrer que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$. Calculer le coefficient de x^7 à l'aide de Maple.

40)*(M04) Développement en série entière de $f(z) = \frac{\sin x}{z^2 - 2z\cos x + 1}$.

41)**(X06) **Formule améliorée de Stirling.** On se propose d'évaluer précisément $n!$. Soit: $d_n = \ln n! + n - (n + \frac{1}{2}) \ln n$. On "sait" que d_n tend vers: $d = \ln\sqrt{2\pi}$. Simplifier $e_n = d_n - d_{n+1}$ et vérifier que e_n s'exprime entièrement en fonction de $t = \frac{1}{2n+1}$. Obtenir un développement en série de e_n (en fonction de t). Montrer que $e_n > \frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12(n+1)+1}$ puis que: $d_n > d + \frac{1}{12n+1}$. Montrer que $e_n < \frac{1}{12n} - \frac{1}{12(n+1)}$ et en déduire que $d_n < d + \frac{1}{12n}$. Établir à partir de l'encadrement de d un encadrement de $n!$; examiner la qualité numérique de cet encadrement pour $1 \leqslant n \leqslant 10$.

42)**(U05) Soit $q \in \mathbb{C}$, $|q| < 1$.Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$f(z) = (1 - qz)(1 - q^2 z) \cdots (1 - q^n z) \cdots$$

a) Justifier la convergence de f. *Remarque: le logarithme n'est pas utilisable ici. Utiliser le critère de Cauchy.*

b) Trouver les coefficients d'un éventuel développement en série entière de f et $1/f$. *Indication: f vérifie une équation fonctionnelle.*

c) Justifier enfin le fait que f et $1/f$ sont développables en série entière (préciser les rayons de convergence).

43)**(M07) **Développement de la tangente.** **a)** Examiner le développement en série entière de la fonction: $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ au voisinage de l'origine. *Indication: on cherche une série entière $g(x) = \sum a_n x^n$, avec un rayon de convergence non nul, telle que $g(x)\cos x = 1$; une relation de récurrence apparait...*

b) Soit R le rayon du développement précédent. Étudier la développabilité de $\tan x$ et $x \operatorname{cotan} x$ au voisinage de 0; quels rayons de convergence trouve-t-on ?

c) En examinant les polynômes de Taylor de la fonction tangente, montrer que $R = \dfrac{\pi}{2}$.

44)**(M) Soit f telle que $f(0) = 1$ et $f(t) = \dfrac{t}{\ln(1+t)}$ pour $t \neq 0$. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$, développable en série entière au voisinage de 0, préciser le rayon de convergence, montrer la convergence normale dans $[-1,1]$. *Indication: considérer* $\int_0^1 (1+x)^t dt$; *pour la convergence normale, examiner* $J_n = \int_0^1 \frac{(1-u)\cdots(n-u)}{n!} du$

45)**(X02) Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, DSE avec un rayon de convergence infini, ne s'annulant en aucun point. Montrer qu'il existe $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, DSE avec un rayon de convergence $R > 0$, et $\varepsilon \in]0, R[$ tels que $\forall z,\ |z| < \varepsilon \Rightarrow f(z) = \exp(T(z))$.

46)*(C02) Soit deux suites réelles (a_n) et (b_n), avec $b_n \geqslant 0$. On suppose que le rayon de convergence de $(\sum b_n x^n)$ est 1, que la série $(\sum b_n)$ diverge, et que $a_n \sim b_n$. On étudie $f(x) = \sum a_n x^n$ et $g(x) = \sum b_n x^n$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = +\infty$.

b) Montrer que $f \sim g$ au voisinage de 1 à gauche.

c) Trouver un équivalent simple pour $h_p(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^p x^n$.

47)*(C07) Soit $\{a_n z^n\}$ une série entière convergeant uniformément sur le disque-unité fermé $D = D'(0,1)$; on pose $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n z^n$ et $P_{r,n}(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} r^{|k|} \exp(kix)$

a) Montrer que $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{r,n}(t) f\Big(\exp\big(i(x-t)\big)\Big) t = \sum\limits_{k=0}^{n} a_n r^n e^{nix}$.

b) Quel est le signe de $P_{r,n}(x)$ pour $r \in [0, \frac{1}{2}]$ et $x \in \mathbb{R}$?

c) Qu'en conclut-on si f envoie le cercle-unité U dans lui-même ?

48)**(C08) Soit (a_n) une suite de réels, $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k$, et $T_n = \frac{A_n}{n}$. On suppose que le rayon de convergence de $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est 1.

a) Rayon de convergence de $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n x^n$? Quelle relation entre f et g ?

b) Rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n x^n$?

c) On suppose désormais que $a_n \geqslant 0$ et que $a_n \in o(A_n)$, et que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est $R > 0$. Quel est le rayon de convergence de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n x^n$?

49)***(X05) **Théorème de Tauber.** Soit $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence 1. On suppose que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = S$ existe, et que na_n tend vers 0. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$. A-t-on $\lim S_n = S$? *Indication: utiliser* $c_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{p=0}^{n} pa_p$ $A_n = \sum\limits_{p=0}^{n} a_p$ $b_n = \frac{c_n}{n+1}$ $B_n = \sum\limits_{p=0}^{n} b_p$. *On peut aussi se servir de* $f(1-\frac{1}{n})$.

50)** Soit une série entière $f(z) = \sum a_n z^n$ de rayon infini telle que $f(z) \in \mathbb{R} \iff z \in \mathbb{R}$. Montrer que les a_n sont réels; soit $v(z) = \mathrm{Im}(f(z))$. Montrer que $\pi r^m a_m = 2 \int_0^{\pi} v(re^{i\theta}) \sin(m\theta)\, d\theta$ pour $m \geqslant 1$ et $r > 0$ et que $|r^m a_m| \leqslant mr|a_1|$. En déduire que f est affine.

51)** Soit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ les a_n étant complexes, tels que $a_0 = 1$, $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge et $0 < S \leqslant 1$. Montrer que $1/f(z)$ existe pour $|z| < 1$ et possède un D.S.E. de rayon au moins 1.

52)**(M06) Soit E l'ensemble des suites complexes (a_n) telles qu'il existe k et α strictement positifs, vérifiant $|a_n| \leqslant \dfrac{k}{\alpha^n}$ pour tout n. Soit F l'espace des fonctions définies sur un voisinage de 0 et développables en série entière en 0 avec un rayon de convergence non nul.

a) Montrer que E et F sont des espaces vectoriels. *Remarque: pour F il faut interpréter car le domaine de définition dépend du domaine de convergence.*

b) On définit l'application u de E dans F qui à toute suite (a_n) associe la série entière $\sum a_n x^n$. Que dire de u (linéarité, injectivité, surjectivité) ?

c) Exemple: $a_n = \dfrac{n}{3^n}$.

d) Soit $a = (a_n)$ appartenant à E. On pose $c_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}(c_n + a_n)$ avec c_0 quelconque. Montrer que (c_n) appartient à E. Peut-on exprimer c_n en fonction de $a_0, \ldots, a_n$.

53)***(X05) **Théorème de Bernstein.** Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(]-a,a[,\mathbb{R})$, montrer que si $f^{(2n)} \geqslant 0$ pour tout n, alors f est développable en série entière. *Indication: formule de Taylor à reste intégral.*

54)** Équivalent de $f(x) = 1 + \sum\limits_{n\geqslant 1}(1+\frac{1}{n})^n x^n$ au voisinage de 1.

55)** Soit $(\ell^\infty, \|\cdot\|_\infty$ l'espace des suites réelles bornées.

a) On pose pour $x = (x_n) \in \ell^\infty$ et $t \in [0,1]$: $g_x(t) = \sum\limits_{n\geqslant 0} x_n t^n(1-t)$. Justifier la convergence et démontrer que g_x est bornée sur $[0,1]$. On pose $\nu(x) = \sup\limits_{t\in[0,1]} |g_x(t)|$. Montrer que ν est une norme sur ℓ^∞. Est-elle équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$?

b) Soit $x \in \ell^\infty$; on pose $y = f(x)$ définie par: $y_n = \dfrac{1}{2^n}\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n}\dfrac{n!}{k!(n-k)!}x_k$. Montrer que $y \in \ell^\infty$; f est-elle continue ?

c) Trouver une relation simple entre g_x et g_y. Pour la norme ν, f est-elle continue ?

56)**(C05) Soit (a_n) une suite de limite ℓ et $f(x) = \sum\limits_0^\infty a_n \dfrac{x^n}{(n!)^2}$, $g(x) = \sum\limits_0^\infty \dfrac{x^n}{(n!)^2}$. Étudier la limite de $\frac{f}{g}$ en $\pm\infty$.

57)** **Une CNS très attendue.** Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(]-a,a[)$. Montrer que f possède un DSE au voisinage de 0 si, et seulement s'il existe des constantes ε, B, C strictement positives et telles que $\sup\limits_{|x|\leqslant\varepsilon}|f^{(n)}(x)| \leqslant BC^n n!$ pour tout n. *Indication: dans un sens, c'est Taylor-Lagrange. Réciproquement, si f a un DSE de rayon de convergence R, on peut le dériver p fois; prendre $|x| < R' < R'' < R$ et se ramener au DSE de $(R''-y)^{-p-1}$.*

58)** **Série lacunaire.** Soit (p_n) une suite strictement croissante d'entiers positifs. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^{p_n}$ de somme $f(x)$ si elle converge.

a) On suppose que $n \in o(p_n)$. Montrer que $\lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)f(x) = 0$.

b) Démontrer la réciproque. *Indication: minorer une tranche convenable de la série pour $x = 1 - \frac{1}{n}$.*

59)(X04) **Principe du maximum.** On considère la somme f d'une série entière à coefficients complexes a_n et de rayon de convergence $R > 0$.

a) Montrer que $\exists z \in \mathbb{C}, \backslash|f(z)| > |f(0)|$. *Indication: on pourra supposer au début que $f(z) = a_0 + a_p z^p$.*

b) Soit $r < R$. Montrer que $\sup\limits_{|z|\leqslant r}|f(z)| = \sup\limits_{|z|=r}|f(z)|$. *Indication: intégrer le long d'un cercle.*

60)**(M09) On fixe un entier $\mu > 0$. Soit une série entière $S(x) = \sum\limits_{n=0}^\infty a_n x^n$ de rayon de convergence infini et telle que

$$a_0 = 0, \quad \forall n,\ a_n \geqslant 0, \quad \sum_{n=0}^\infty a_n = 1\,.$$

a) Déterminer S si on suppose que $S(x) \leqslant x^\mu$ pour tout $x > 0$.

b) Déterminer S si on suppose que $S(x) \geqslant x^\mu$ pour tout $x > 0$.

61)**(U05) **Partitions d'un entier.** On appelle "partition" d'un entier positif n toute suite décroissante $(t_i)_{i\geqslant 1}$ d'entiers tels que $\sum\limits_{k\geqslant 1} t_k = n$. Soit p_n le nombre de partitions de n. (Par exemple $p_2 = 2$ car $2 = 2+0+\cdots = 1+1+0+\cdots$). Montrer que la série $\sum p_n z^n$ a un rayon de convergence strictement positif. On pose $p_0 = 1$. Vérifier que $\sum p_n z^n = \prod\limits_{k=1}^\infty \dfrac{1}{1-x^k}$.

62)***(X08) **Points entiers dans ou sur un cercle.** Soit $a_n = 1$ si n est un carré parfait, 0 sinon et b_n le nombre de couples d'entiers (p, q) tels que $p^2 + q^2 = n$. On étudie $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ et $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

a) Équivalent de $A(x)$ quand x tend vers 1 ? *Indication: une intégrale ?*

b) Relation entre A et B ? En déduire un équivalent de $B(x)$ en 1.

c) Soit c_n le nombre de couples d'entiers (p, q) tels que $p^2 + q^2 \leqslant n$ et $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$. Trouver un équivalent de $C(x)$ quand x tend vers 1.

63)** **Nombres de Bell.** On pose $\omega_0 = 1$ et pour $n \geqslant 1$ on note ω_n le nombre de relations d'équivalence sur $\{1, 2, \ldots n\}$. On considère la série entière $\sum_{n \geqslant 0} \frac{\omega_n}{n!} x^n$, de rayon R et de somme $f(x)$ en cas de convergence.

a) Montrer (par raisonnement combinatoire) que $\omega_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega_k$; puis que $\omega_n \leqslant n^n$ et enfin que $R \geqslant e^{-1}$.

b) Soit $r > 0$ et $n_0 = E(re^r)$. On pose $A = \operatorname*{Max}_{k \leqslant n_0} \frac{\omega_k r^k}{k!}$; vérifier que, pour tout n, $\frac{\omega_n r^n}{n!} \leqslant A$. En déduire R.

c) Montrer que f est solution de $y' = e^x y$, puis la déterminer. En déduire une expression de ω_n.