Exercices sur les Probabilités

1) On lance une seule fois une pièce équilibrée, puis on effectue des tirages successifs dans une urne, contenant initialement une boule noire et une blanche, selon le protocole suivant (on dispose d'un réservoir suffisant de boules blanches et noires par ailleurs) :

- on tire une boule, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne,

- on rajoute une boule blanche si on a obtenu pile, une noire si on a obtenu face.

Et on recommence (on notera que si on a tiré pile à l'unique lancer de la pièce, on rajoute toujours des boules blanches,et toujours des noires si on a tiré face). Au moment du k-ième tirage, l'urne contient $k+1$ boules.

a) Calculer la probabilité de tirer une boule blanche au k-ième tirage.

b) Sachant que l'on a tiré une boule blanche au k-ième tirage, calculer a probabilité p_k d'avoir obtenu pile au lancer de la pièce.

c) Calculer la probabilité d'obtenir k boules blanches lors des k premiers tirages.

2) Dans une famille donnée, on suppose que la probabilité qu'ikl y ait k enfants est p_k telle que $p_0 = p_1 = \alpha$ et si $k \geqslant 2, p_k = \frac{1-2\alpha}{2^{k-1}}$. On suppose que la probabilité d'avoir un garçon ou une fille est la même.

a) Vérifier qu'on définit ainsi une probabilité sur $\mathbb{N}$.

b) Quelle est la probabilité qu'une famille ait exactement 2 garçons ?

c) Quelle est la probabilité qu'une famille ait deux filles sachant qu'elle a deux garçons ?

3) Loi de succession de Laplace. On dispose de N urnes numérotées de 0 à N. L'urne k contient k boules blanches et $N-k$ noires. On choisit une urne au hasard et, sans connaître son numéro, on en tire n fois de suite une boule, avec remise après chaque tirage.

a) Quelle est la probabilité que le tirage suivant donne encore une boule blanche, sachant qu'au cours des n premires tirages, seules des boules blanches ont été tirées ?

b) Calculer la limite de cette probabilité lorsque $N \to +\infty$.

4) Ruine du joueur. Deux joueurs A et B s'affrontent lors d'une succession de parties de pile ou face. Ils possèdent initalement des montant a et b resp (entiers naturels). A chaque victoire, le gagnant donne un euro au perdant. Le joueur A a une probabilité p de gagner à chaque lancer (et B donc une probabilité $q = 1-p$). Le jeu s'arrête lorsqu'un des joueurs n'a plus d'argent.

On pose $N = a+b$, et pour $n \in \{0, ..., N\}$ on note p_n (resp. q_n) la probabilité que A (resp. B) finisse ruiné s'il commence avec n euros.

a) Montrer que si $0 < a < N, p_a = pp_{a+1} + qp_{a-1}$.

b) En déduire l'expression de p_a.

c) Calculer de même q_a puis $p_a + q_a$. Qu'en déduit-on ?

5) On fixe $s > 1$ et on considère l'espace probabilisé $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), P)$, où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$$

où $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = n\mathbb{N}^*$ (c'est donc l'événement "ω est multiple de n").

a) Justifier que P définit bien une probabilité sur $\mathbb{N}^*$ et calculer $P(A_n)$.

b) Montrer que si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers,les événements $(A_p)_{p\in P}$ sont indépendants.

c) En déduire que $P(\{1\}) = \prod\limits_{p\in\mathcal{P}} (1 - \frac{1}{p^s})$, puis que

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathcal{P}} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$$

.

6) Une urne contient a boules blanches et b boules noires. On en tire successivement n au hasard en remettant chaque fois la boule tirée. Calculer la probabilité pour que le nombre de boules blanches tirées soit pair.

7) Deux joueurs A et B jouent avec des dés non pipés. A gagne s'il obtient un total de 7, et B s'il obtient un total de 6. Les deux joueurs jouent alternativement jusqu'à ce que l'un des deux gagne. A commence. Calculer la probabilité de succès des deux joueurs.

8) Un gendarme a pour mission de constater des infractions au code la route. Chaque infraction peut être sanctionnée par une verbalisation ou un avertissement. Il décide qu'il tirera au sort (avec une pièce de monnaie non truquée) la sanction pour la première infraction ; puis, pour $p \in \mathbb{N}^*$:

- si pour la p-ième infraction constatée il a verbalisé, alors la $p+1$-ième fera l'objet d'un avertissement ;

- si pour la p-ième infraction il a averti, alors il tire au sort pour la $p+1$-ième. On note A_p l'événement "la p-ième infraction fait l'objet d'une verbalisation" et a_p sa probabilité. Calculer a_p et en déduire la probabilité que le gendarme ne verbalise jamais.

9) Quelle est la probabilité pour que deux entiers naturels soient premiers entre eux (on précisera ce que signifie cette "probabilité") ?

10) Soit $k_0 \in \{1, ..., 9\}$. Quelle est la probabilité pour qu'une puissance de 2 commence par k_0 en base 10 (on précisera ce que signifie cette "probabilité") ?

11) Jeu des archers. Deux archers A et B tirent alternativement sur une cible jusqu'à ce que l'un des deux la touche. A (resp. B) atteint la cible avec une probabilité $a \in]0, 1[$ (resp. $b \in]0, 1[$). On note $a' = 1 - a$ (resp. $b' = 1 - b$). On note G_A (resp. G_B) l'événement : "A (resp. B) l'emporte".

a) Calculer la probabilité pour que A (resp. B) l'emporte au rang $2n + 1$ (resp. $2n + 2$), où $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire $P(G_A)$ et $P(G_B)$.

c) A quelle condition a-t-on $P(G_A) = P(G_B)$? (On dit alors que le jeu est équitable).

12) Un joueur lance une pièce équilibrée jusqu'à obtention du premier plie. S'il lui a fallu n lancers pour l'obtenir, on lui fait tirer au hasard un billet de loterie parmi n dont un seul est gagnant.

a) Quelle est la probabilité que le joueur gagne ?

b) Sachant que le joueur a gagné, quelle est la probabilité qu'il ait obtenu pile au troisième lancer ?

13) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la probabilité pour qu'une bijection de $\{1, ..., n\}$ possède au moins un point fixe ? Evaluer la limite de cette probbilité lorsque $n \to +\infty$.

14) On dispose de deux pièces de monnaie : la pièce A (resp. B) amène pile avec la probabilité $a \in]0, 1[$ (resp. $b \in]0, 1[$). Au départ, on choisit une des deux pièces de façon équiprobable, et on effectue le lancer avec cette pièce. Si l'on obtient pile, on conserve la même pièce pour la lancer suivant, sinon on change de pièce, et ainsi de suite indéfiniment.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements :

E_n : "on utilise pour la première fois A au n-ième lancer".

U_n "on a obtenu n piles au cours des n premiers lancers".

a) Calculer $P(E_n)$ et $P(U_n)$.

b) Calculer $P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n)$. Qu'en déduit-on ?

c) Calculer $P(\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n)$. Qu'en déuit-on ?

15) On dispose de deux urnes : l'urne I contient une boule blanche et deux noires, l'urne II contient une boule blanche et une noire. Deux joueurs A et B effectuent des tirages successifs d'une boule avec remise de la boule tirée : A tire dans I et B dans II. A commence. Le premier qui obtient la boule blanche a gagné et le jeu s'arrête.

a) Calculer pour $n \in \mathbb{N}$ les probabilités des événements A_n : "A gagne au $2n+1$-ième tirage" et B_n : "B gagne au $2n+2$-ième tirage."

b) En déduire les probabilités des événements G_A : "A gagne", G_B : "B gagne" et F : "le jeu s'arrête".

16) Trois joueurs A,B,C lancent successeivement un dé équilibré à 6 faces. Ils jouent dans l'ordre A,B,C,A,B,C, etc. Le gagnant est le premier qui obtient un 6.

a) Caculer la probabilité pour que A (resp., resp. C) gagne.

b) Le jeu est-il équitable? Interpréter.

17) On lance indéfiniment une pièce amenant pile avec la probabilité $\frac{2}{3}$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*, A_n$ l'événement : "près le n-ième lancer, on a obtenu pour la première fois deux piles consécutifs" et $a_n = P(a_n)$. On définit également les évenements :

P_n : "on obtient pile au n-ième lancer"

F_n : "on obtient face au n-ième lancer"

a) calculer a_1, a_2, a_3.

b) Calculer a_n et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Interpréter.

18) On lance indéfiniment une pièce équilibrée. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_n : "On obtient au moins une fois la séquence pile-pile-face" lors des n premiers lancers.

a) Calculer $P(A_n)$.

b) Evaluer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(A_n)$. Interpréter.

c) A-t-on le même résultat pour une séquence fixée (finie) quelconque?

19) Une urne contient 10 boules : une numérotée 1, deux numérotées 2, 3 numérotées 3 et 4 numérotées 4. On effectue des tirages avec remise jusqu'à obtenir une boule numérotée 2 ou 3, puis on s'arrête.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'événement : "on obtient une boule numérotée 2 au n-ième tirage" (on notera que cela implique qu'on n'ait pas obtenu 2 ou 3 avant).

a) Calculer $P(E_n)$.

b) Calculer la probabilité pour que l'on s'arrête après avoir tiré une boule numérotée 2.

c) Calculer de même la probabilité pour que l'on s'arrête après avoir tiré un 3.

d) Quelle est la probabilité pour que l'on s'arrête?

20) Soit $N \in \mathbb{N}^*, p \in]0, 1[, p \neq \frac{1}{2}$ et $q = 1 - p$. On joue à pile ou face : à chaque coup, on a la probabilité p d'obtenir pile, et dans ce cas on gane 1 euro, et q d'obtenir face, et on perd dans ce cas 1 euro.

Le jeu s'arrête lorsque l'on possède N euros (on gagne la partie) ou lorsqu'on est ruiné. Au départ, on dispose de$n$ euros (avec $0 \leqslant n \leqslant N$), et on note $p_N(n)$ la probabilité de gagner la partie.

a) Calculer $P_N(0)$ et $P_N(N)$.

b) Calculer $p_N(n)$ et $\lim\limits_{N \to +\infty} p_N(n)$ (n étant fixé).

21) Soit $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$. Une bactérie vit un seul jour ; à l'issue de cette journée elle peut se diviser en deux et avoir deux descendants avec la probabilité p, ou bien ne pas se diviser et mourir sans descendance avec la probabilité $q = 1 - p$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note U_n l'évenement : "la lignée d'une bactérie donnée s'éteint au n-ième jour", et $u_n = P(U_n)$. (On observera que u_n ne dépend pas de la bactérie).

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\mathrm{Min}(1, \frac{q}{p})$ et interpréter ce résultat.

22) Pour $n \in \mathbb{N}$, on postule que la probabilité qu'une famille ait n enfants est $\frac{1}{en!}$, et celle qu'un enfant soit une fille ou un garçon vaut $\frac{1}{2}$.

a) Calculer la probabilité qu'une famille n'ait aucun enfant.

b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer la probabilité pour qu'une famille ait k filles.

23) Soit $c \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une noire. Après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne avec c autres boules de la même couleur que celle que l'on vient de tirer.

On note p_n la probabilité pour que la première boule blanche soit obtenue au n-ième tirage.

a) On suppose dans cette question que $c = 1$. Calculer p_n et $\sum\limits_{n \geqslant 1} p_n$. Interpréter.

b) Calculer $\sum\limits_{n\geqslant 1} p_n$ dans le cas général.

24) On dispose de N pièces de monnaie, dont chacune amène pile avec la probabilité p avec $p\in]0,1[$. Au départ, on lance les N pièces. On laisse de côté les pièces qui ont donné pile, on relance et ainsi de suite. On s'arrête lorsque toutes les pièces donnent pile.

a) Pour $i\in\{1,...,N\}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, calculer la probabilité de l'événement $A_{i,n}$: "La pièce numéro i est lancée au plus n fois."

b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement : "on effectue au plus n relances." Calculer $P(B_n)$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(B_n)$. Interpréter.

d) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer la probabilité d'effectuer exactement n relances.

25) Peut-on définir une probabilité sur $\mathbb{N}$ par : pour des parties à préciser $A\subset\mathbb{N}, P(A)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{|A\cap\{0,...,n\}|}{n+1}$?

26) Une puce se déplace sur une droite : à chaque seconde, elle peut sauter d'un centimètre en avant avec une probabilité $p\in]0,1[$ ou d'un centimètre en arrière avec la probabilité $q=1-p$.
a) Quelle est la probabilité pour qu'au bout d'un nombre >0 de secondes la puce repasse par sa position initiale?
b) Soit, pour $n\in\mathbb{N}, X(n)\in\mathbb{Z}$ l'abscisse en centimètres de la puce à la n-ième seconde, mesurée à prtir de la position initiale. Calculer la loi et l'espérance de X.

27) Durant une année, A écrit à B avcec la probabilité p_1 s'il lui a écrit la veille, et p_2 s'il ne lui a pas écrit la veille. Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*, X_n=1$ si A a écrit à B la jour $n-1$, $X_n=0$ sinon. Déterminer la loi et l'espérance de X_n.

28) Un veilleur de nuit doit ouvrir une porte. Il dispose d'un trousseau de 10 clés indicernables, dont une seule ouvre la porte. S'il est sobre, après chaque échec il met de côté la mauvaise clé et poursuit avec les autres ; s'il est ivre il remet au contraire cette clé dns le trousseau. Soit X (resp. Y) le nombe d'essais au bout desquels il ouvre la première porte s'il est sobre (resp. ivre).
a) Déterminer les lois de X, de Y et (sous réserve d'existence), leurs espérances et leurs variances.
b) Sachant que le gardien est ivre un jour sur trois et qu'un jour il a essayé au moins neuf clés, quelle est la probabilité qu'il ait été sobre ce jour-là?

29) On lance deux dés non pipés ; on note D_1 le résultat du premier dé, D_2 celui du second, $X=\text{Max}(D_1,D_2), Y=\text{Min}(D_1,D_2)$.
a) Déterminer, pour $k\in\{1,...,6\}, P(Xk)$ et $P(Y\leqslant k)$.
b) En déduire les lois de X et Y, ainsi que (sous réserve d'existence) leurs espérances et leurs variances.
c) X et Y sont-elles indépendantes?

30) On effectue deux tirages sans remise dans une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n. Soit X_1 (resp. X_2) le premier (resp. second) numéro tiré.
a) Déterminer la loi conjointe de (X_1,X_2).
b) En déduire la loi de X_2, puis celle de X_1 sachant $X_2=j$ (où $j\in\{1,...,n\}$).
c) X_1 et X_2 sont-elles indépendantes?

31) Le nombre N de clients arrivant dans un magasin en une journée est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Ces clients se répartissent entre les m caisses du magasin de manière équiprobable et indépendante. Soit X_1 le nombre de clients qui passent à la caisse 1 au cours d'une journée.
a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant que $N=n$.
b) Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance (sous réserve d'existence).

32) X et Y sont deux v.a.d.i. suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $U=X+Y, V=X-Y$.
a) Quelle est la loi conjointe de U,V?
b) Calculer la covariance de U,V.
c) U et V sont-elels indépendantes?

33) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.i. suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $Y_n=X_n+X_{n+1}$ et $T_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.
a) Calculer l'espérance et la variance de T_n.
b) Montrer que $\forall\epsilon>0, \lim\limits_{\to+\infty} P(|T_n-2p|\geqslant\epsilon)=0$.

34) Soit $(n,N)\in\mathbb{N}^*$. Une urne contient N jetons à deux faces. L'une des faces porte un numéro bleu, l'autre un numéro rouge. Pour tout $i\{1,...,n\}$ et $j\in\{1,...,i\}$ un seul jeton porte les numéros i bleu et j rouge. On tire au hasard un jeton de l'urne. On note B le numéro bleu tiré, R le numéro rouge et G = B-R. **a)** Déterminer N en fonction de n.
b) Déterminer les lois conjointe et marginales de (B,R).
c) Déterminer l'espérance et la variance de B,R,G.

35) On tire indéfiniment à pile ou face, avec une probabilité p d'obtenir pile, $q = 1 - p$ d'obtenir face. On note P (resp. F)le rang d'apparition du premier pile (resp. face). On note x (resp. Y) la longueur de la première suite consécutive de tirages égaux (resp. de la deuxième suite). Par exemple, si les tirages sont $(P, P, P, F, P, P,$ on aura : $X = 3, Y = 1$.
a) Déterminer les lois de P et F, leurs espérances et variances.
b) Sont-elles indépendantes ?
c) Déterminer la loi conjointe de (X, Y). X et Y sont-elles indépendantes ?
d) Déterminer la loi de X, son espérance, et montrer que $E(X) \geqslant 2$.
e) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
f) Calculer $P(X = Y)$.
g) Déterminer la loi de $X + Y$ dans le cas $p = \frac{1}{2}$.

36) Soit $(,b) \in]0,1[\times]0,+\infty[$ et X, Y deux v.a.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, dont la loi conjointe est donnée par : $p_{i,j} = 0$ si $i < j$, $p_{i,j} = \frac{b^i e^{-b} a^j (1-a)^{i-j}}{j!(i-j)!}$.
a) Déterminer les lois marginales ainsi que les espérances et variances de X et Y. X et Y sont-elles indépendantes ?
b) Déterminer la loi de $Z = X - Y$. Y et Z sont-elles indépendantes ?

37) Dans un village, les couples font des enfants avec une équiprobabilité de filles et de graçons à cahque naissance, et s'arrêtent au premier garçon. Soit X le nombre d'enfants d'un couple donné, et G la proportion de garçons issus de ce même couple.
a) Donner les lois de X, G et calculer $E(G)$.

38) Au cours de sa vie une poule pond N oeufs, où N suit une loi de Poisson de paramètre λ. Chaque oeuf éclot avec une probabilité p, et les éclosions sont des événements indépendants. On note K le nombre de poussins. Donner la loi de K.

39) Dans une usine, une machine donnée a chaque jour une probabilité p de tomber en panne. Cahque fois qu'elle tombe en panne, un technicien vient la réparer dans la soirée. On note $q = 1 - p, X_n$ la variable aléatoire qui vaut 1 si la machine est tombée en panne le n-ième jour, 0 sinon. Pour $i \in \mathbb{N}^*$, on note T_i le jour où la machine est tomée en panne pour la i-ème fois. Les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supposées indépendantes. On pose $\tau_1 = T_1$, et pour $i \geqslant 2 : \tau_i = T_i - T_{i-1}$, et N_n le nombre de pannes survenues entre les jours 0 et n.
a) Déterminer la loi de τ_1 et montrer que les $(\tau_k)\{k \in \mathbb{N}^*$ sont indépendantes et de même loi que τ_1.
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi conjointe de $(T_1, ..., T_n)$.
c) Un inspecteur vient le n-ième jour et reste jusqu'à la prochaine panne. Calculer la loi des variables $V_n = T_{N_n+1} - n$ et $U_n = n - T_{N_n}$, et interpréter.

40) Un joueur arrive au casino avec une fortune $k \in \{0, ..., N\}$ et joue à la roulette. A chaque partie, il a une probabilité p de gagner 1 euro en misant 1 euro. On note $q = 1 - p$. Il décide de s'arrêter s'il obtient à un moment donné N euros ou s'il est ruiné. On note t_k la v.a. représentant le temps de jeu du joueur (i.e. le nombre de fois qu'il joue avant de s'arrêter).
a) Montrer que l'arrêt est presque sûr.
b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}, P(t_k > N(n+1)) \leqslant P(t_k > Nn)) \times (1 - P^N)$. En déduire que t_k possède une espérance qu'on notera T_k par la suite.
c) Justifier que

$$\forall k \in \{1, ..., N-1\} T_k = p(1 + T_{k+1}) + q(1 + T_{k-1}).$$

d) En déduire que $T_k = \frac{1}{q-p}\left[k - N\left(\frac{1-(q/p)^k}{1-(q/p)^N}\right)\right]$ si $p \neq \frac{1}{2}$,et $T_k = k(N-k)$ si $p = \frac{1}{2}$.

41) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a.d. i. de même loi, centrées, à valeurs dans $[-1, 1]$.
a) Montrer que pour $\lambda \in \mathbb{R}+$ et $x \in [-1,1], e^{\lambda x} \leqslant e^{\lambda^2/2} + xsh(\lambda)$.
b) En déduire que si X est une v.a.d. centrée à valeurs dans $[-1, 1]$, on a :

$$\forall \lambda \geqslant 0, E(e^{\lambda X}) \leqslant e^{\lambda^2/2}, E(e^{-\lambda X} \leqslant e^{\lambda^2/2}.$$

c) Montrer que pour $a \in \mathbb{R}, \lambda > 0 : P(X \leqslant a) \geqslant e^{-\lambda a} E(e^{\lambda X})$.
d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a \in \mathbb{R}+$:

$$P(|\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i| \geqslant a) \leqslant 2e^{-a^2/2}.$$

42) Un mobile se déplace sur les points à coordonnée entières d'un axe d'origine O. Au déprt, le mobile est à l'origine. Il se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse k à l'instant n, alors à l'instant $n+1$ il sera au point d'abscisse $k+1$ avec une probabilité $\frac{k+1}{k+2}$ ou au point O avec la probabilité $\frac{1}{k+2}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n et $u_n = P(X_n = 0)$.
a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{1, ..., n+1\}$:

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{k}{k+1} P(X_n = k-1).$$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \{0, ..., n\} P(X_n = k) = \frac{1}{k+1} u_{n-k}$.
c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{j=0}^{n} \frac{u_j}{n-j+1} = 1$. En déduire u_0, u_1, u_2, u_3.
d) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, E(X_{n+1}) = E(X_n) + u_{n+1}$. En déduire une expression de $E(X_n)$ en fonction des (u_k).
e) On note T l'instant auquel le mobile revient pour la première fois à l'origine, et on convient que $T = 0$ si le mobile ne repasse pas par O. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, P(T = n) = \frac{1}{n(n+1)}$. En déduire la valeur de $P(T = 0)$.

f) T admet-elle une espérance ?

43) Soit X une v.a.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que X admet une espérance si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{N}} P(X > n)$ converge, et qu'on a alors :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X > n).$$

44) On répète indéfiniment une expérience alétoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On note X le rang du premier succès, Y le rang du deuxième succès.

a) Déterminer la loi conjointe de (X, Y), puis les lois marginales.

b) Montrer que X et Y admettent une espérance et une variance et les calculer. Calculer également $\text{cov}(X, Y)$.

c) Donner la loi conditionnelle de X sachant $Y = n$.

45) Soit $x \in]0, 1[$. Dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même probabilité d'échec x, on définit deux suites variables aléatoires $(S_n, T_n)_{n\geqslant 1}$, de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*, S_n$ est le nombre d'épreuves nécessaire pour obtenir le n-ième succès ; $T_1 = S_1$ et pour tout $n \geqslant 2, T_n$ est le nomber d'épreuves séparant le n-ième succès du $(n-1)$-ième.

a) Exprimer pour $n \in \mathbb{N}^*, S_n$ en fonction des T_i.

b) Donner la loi, l'espérance et la variance de T_n.

c) De même pour S_n.

d) En déduire $\forall x \in]0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^n}$.

46) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère des variables aléatoires $X_1, ..., X_n$ indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. On note $q = 1 - p$, et on pose $U = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Min}}\ X_i$ et $V = \underset{1\leqslant i\leqslant n}{\text{Max}}\ X_i$.

a) Déterminer la loi de U et son espérance (dont on prouvera l'existence).

b) Déterminer la loi de V. Montrer que V admet une espérance, et que $E(V) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} (-1)^{i+1} \frac{1}{1-q^i}$.

47) Soit X une v.a. de loi de Poisson de paramètre λ. Quelle est la valeur que X prend avec la plus grande probabilité ?

48) Soient X et Y deux v.a.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant une espérance finie. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $E_{(X=k)}(Y)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant $(X = k)$, i.e. $E_{(X=k)}(Y) = \sum_{l=0}^{+\infty} lP(Y = l|X = k)$.

Montrer que $E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} E_{(X=k)}(Y)P(X = k)$.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}+$. On considère N poules. On suppose que le nombre de descendants poules de première génération de chacune suit une loi de Posson de paramètre λ. Déterminer l'espérance du nombre X_n de poules à la n-ième génération.

49) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements indépendants d'un espace probabilisé, tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P(A_n) = \frac{1}{n}$. On pose $R_n = \sum_{k=1}^{n} \chi_{A_k}$.

a) Déterminer l'espérance et la variance de R_n, et en donner des équivalents lorsque $n \to +\infty$.

b) Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} P(|\dfrac{R_n}{\ln(n)} - 1| \geqslant \epsilon) = 0$.