MP*1

Problème

Séries à signes aléatoires

Le but des trois premières parties de ce problème est de démontrer le théorème ci-après, dû à Kolmogorov et Khintchine :

« Soit $(a_k)_{k\geq 1}$ une suite réelle. La série aléatoire $\sum \pm a_k$ où les signes $\pm$ sont mutuellement indépendants et équiprobables converge presque sûrement si et seulement si $\sum {a_k}^2 < +\infty$. »

Dans la partie **IV**, on établit la loi du zéro-un de Kolmogorov, qui entraîne que, si $\sum {a_k}^2 = +\infty$, alors la série aléatoire $\sum \pm a_k$ diverge presque sûrement.

I. L'inégalité maximale de Kolmogorov

Soient $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, centrées, admettant chacune un moment d'ordre 2. Pour k dans $\{1, \dots, n\}$, soit

$$U_k = \sum_{i=1}^{k} Y_i.$$

On fixe α dans $\mathbb{R}^{+*}$. Pour k dans $\mathbb{N}^*$, soient A_k et B_k les événements

$$A_k = \{|U_k| \geq \alpha\}, \qquad B_k = A_k \bigcap \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \overline{A_j} \right).$$

1. Soit k un élément de $\{1, \dots, n\}$. Justifier que les variables aléatoires
$$1_{B_k}, Y_{k+1}, \dots, Y_n$$
sont mutuellement indépendantes.
2. Soit k un élément de $\{1, \dots, n\}$. En écrivant
$$U_n^2 = ((U_n - U_k) + U_k)^2,$$
démontrer
$$E(U_n^2 1_{B_k}) \geq E(U_k^2 1_{B_k}) \geq \alpha^2 P(B_k).$$
3. Soit
$$B = (\max(|U_1|, \dots, |U_n|) \geq \alpha).$$
Exprimer B à l'aide de $B_1, \dots, B_k$. Conclure :
$$P(B) \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} V(Y_i)}{\alpha^2}.$$
En quoi ce résultat améliore-t-il l'inégalité de Tchebychev ?

II. Convergence presque sûre d'une série de variables aléatoires

4. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, centrées et admettant un moment d'ordre 2. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, soit

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

On se donne un élément α de $\mathbb{R}^{+*}$. Pour p et k dans $\mathbb{N}^*$, soient $D_{p,k}$ et E_p les événements :

$$D_{k,p} = \{\max\{|S_{p+i} - S_p|, 1 \leq i \leq k\} \geq \alpha\}, \qquad E_p = \bigcup_{k=1}^{+\infty} D_{k,p}.$$

a) Établir l'inégalité

$$P(D_{k,p}) \leq \frac{1}{\alpha^2}\left(\sum_{j=p+1}^{p+k} V(X_j)\right).$$

Dans la suite de cette question, on suppose

$$\sum_{j=1}^{+\infty} V(X_j) < +\infty.$$

b) Pour p dans $\mathbb{N}^*$, démontrer

$$P(E_p) \leq \frac{1}{\alpha^2}\left(\sum_{j=p+1}^{+\infty} V(X_j)\right).$$

c) Montrer que la série

$$\sum X_k$$

converge presque sûrement.

On utilisera le fait qu'une suite numérique converge si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.

5. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, admettant un moment d'ordre 2, telles que les séries

$$\sum E(X_k), \qquad \sum V(X_k)$$

convergent. Montrer que la série

$$\sum X_k$$

converge presque sûrement.

Ce résultat peut être amélioré en une condition nécessaire et suffisante de convergence presque sûre pour une série de variables aléatoires mutuellement indépendantes, le théorème des trois séries de Kolmogorov. L'énoncé précédent en est l'étape l'essentielle.

III. Le théorème des signes aléatoires

Soient $(a_k)_{k\geq 1}$ une suite réelle, $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Rademacher

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} a_k X_k.$$

6. On suppose que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 < +\infty.$$
Démontrer que $(U_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement.

On se propose d'établir la réciproque de cette propriété. Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$, on pose
$$F_n(x) = E(e^{ixU_n}).$$

7. a) Pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$, justifier l'égalité :
$$F_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(a_k x\right).$$

b) On suppose que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0 et qu'il existe x_0 dans $\mathbb{R}^*$ tel que la suite $(F_n(x_0))_{n\geq 1}$ converge vers une limite strictement positive. En considérant éventuellement $\ln\left(\dfrac{F_n(x_0)}{F_{n-1}(x_0)}\right)$, montrer que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 < +\infty.$$

8. On suppose que $(U_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement.

a) Soient a un nombre réel strictement positif. Si p et q sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$, x un nombre réel de module inférieur ou égal à a, α un nombre réel strictement positif, montrer,
$$|F_{p+q}(x) - F_p(x)| \leq 2\, P\left(|U_{p+q} - U_p| > \alpha\right) + a\alpha.$$

b) Soit α un élément de $\mathbb{R}^{+*}$. Montrer que, pour tout nombre réel strictement positif ε, il existe N tel que
$$\forall (p,q) \in {\mathbb{N}^*}^2,\ p \geq N \Longrightarrow P(|U_{p+q} - U_p| > \alpha) \leq \varepsilon.$$

c) En déduire que la suite de fonctions $(F_n)_{n\geq 1}$ converge simplement, puis que la convergence est uniforme sur $[-a, a]$.

On utilisera le fait qu'une série de fonctions numériques converge uniformément si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy uniforme.

9. Conclure : si $(U_n)_{n\geq 1}$ converge presque sûrement, alors :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 < +\infty.$$

IV. La loi du zéro-un de Kolmogorov

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On note $\mathcal{F}_n$ et $\mathcal{F}'_n$ les tribus engendrées respectivement par les X_k pour $k \leq n$ et par les X_k pour $k > n$. Le but des questions est d'établir qu'un événement appartenant à $\bigcap_{k\geq 1} \mathcal{F}'_k$ est de probabilité 0 ou 1.

On pourra se servir librement du théorème des classes monotones.

10. Montrer que, si A est un événement de $\mathcal{F}_n$ et B un événement de $\mathcal{F}'_n$, alors A et B sont indépendants.
11. Montrer qu'un événement appartenant à $\bigcap_{k\geq 1} \mathcal{F}'_k$ est indépendant de tout événement de la tribu engendrée par $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{F}_n$.
12. Conclure que si A appartient à $\bigcap_{k\geq 1} \mathcal{F}'_k$, alors

$$P(A) \in \{0, 1\}.$$

13. Les notations sont celles du début de la partie **III**. Montrer que, si

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 = +\infty,$$

alors $(U_n)_{n\geq 1}$ est presque sûrement divergente.