Exercices de Calcul Différentiel

1)*(C00) Étudier en $(0,0,0)$ continuité, différentiabilité et classe de la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z) = \dfrac{x^3+y^3-xy^2+yz^2+xyz}{x^2+y^2+z^2}$ si $(x,y,z) \neq (0,0,0)$, $f(0,0,0)=0$.

2)*(M04) Étudier la fonction f définie par $f(x,y) = x^2 \sin(\frac{y}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0,y) = 0$ (continuité, différentiabilité, classe $\mathcal{C}^1 \dots$)

3)**(X03) Soit f une fonction réelle définie sur $I \subset \mathbb{R}$, dérivable sur I. On définit une fonction réelle sur I en posant: $g(x,y) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ si $x \neq y$ et $g(x,x) = f'(x)$.

a) Prouver que g est continue sur I^2 si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

b) Prouver que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I^2 si et seulement si f est de classe $\mathcal{C}^2$. *Indication: considérer une expression intégrale de g.*

c) Prouver que g est différentiable sur I^2 si et seulement si f est deux fois dérivable sur I; calculer alors $dg_{(x,y)}$.

4)**(X06) **Sous-groupes à un paramètre.** Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et une fonction $g : \mathbb{R} \times I \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $f_t(x) = g(t,x)$. On suppose que $f_t \circ f_u = f_{t+u}$ et que pour tout $x \in I$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $f_t(x) \neq x$. Montrer qu'il existe une application $\varphi : I \to \mathbb{R}$ bijective (?), de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $f_t(x) = \varphi^{-1}(t+\varphi(x))$.

5)**(X92) **Inversion.** Soit $y \in \mathbb{R}^n$ (euclidien), $r > 0$, et f définie sur $\mathbb{R}^n \backslash \{y\}$ par: $f(x) = y + r\|y-x\|^{-2}(x-y)$. Montrer que df_a est, en tout point a, composée d'une homothétie et d'une isométrie (une similitude donc). *Indication: éviter de calculer la matrice jacobienne! Se ramener à $y=0$ puis, soit étudier directement un accroissement de f entre a et $a+h$, soit différentier l'égalité: $q(x).f(x) = rx$ (où: $q(x) = \|x\|^2$). L'isométrie sera une symétrie hyperplane.*

6)***(L05) Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ une famille finie d'éléments de $\mathcal{C}^0(U,\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\psi = \underset{1 \leqslant i \leqslant k}{\mathrm{Min}} \varphi_i$ est continue.

b) Lorsque les φ_i sont différentiables, donner une condition nécessaire et suffisante pour que ψ soit différentiable en un point x_0. *Indication: considérer l'ensemble des indices i tels que $\varphi_i(x_0) = \psi(x_0)$.*

c) Si les φ_i sont $\mathcal{C}^1$, et que la condition précédente est satisfaite, montrer que ψ est $\mathcal{C}^1$. *Indication: il faut utiliser l'étude précédente à deux reprises.*

7)**(M07) Justifier que le déterminant est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$; calculer sa différentielle en $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

8)**(C08) En quels points de $\mathbb{R}^n$ les normes $\|\|_1$ et $\|\|\infty$ sont elles différentiables ? Calculer en ces points leur différentielle.

9)**(C05) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$; on dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est homogène de degré α, ou α-homogène si et suelement si $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}+^*$, $f(tx) = t^\alpha f(x)$. Montrer que si f est $\mathcal{C}^1$, elle est α-homogène si et seulement si on a : $\forall x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i D_i f(x) = \alpha f(x)$.

10)***(L06) **a**) Soient f, h_1, h_2 des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telles que $h_1 \leqslant f \leqslant h_2$, et un point $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $h_1(a) = h_2(a)$. Montrer que si h_1 et h_2 sont différentiables en a, alors f l'est également.

b) On suppose que $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \|x-y\|$ pour tout (x,y), l'égalité ayant lieu pour au moins un couple (a,b) (la norme est euclidienne). Montrer que f est différentiable sur le segment $]a,b[$.

c) Soit un compact convexe C. Montrer que la fonction $x \mapsto d(x,C)$ est différentiable. On pourra admettre le fait que pour tout x il existe $x_0 \in C$ tel que $d(x,C) = d(x,x_0)$ et que l'on a $< x_0 - y | x_0 - x > \leqslant 0$ pour tout y de C.

11)**(M08) Soit B une boule fermée de centre O et de rayon r dans l'espace $\mathbb{R}^n$ (euclidien sans doute), et S la sphère associée. Soit f une fonction définie sur B, à valeurs réelles, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de B.

a) On suppose que f est constante sur S. Montrer qu'il existe un point a de l'intérieur de B où la différentielle de f s'annule.

b) On suppose que f est constante sur toutes les sphères de centre O, incluses dans B. Montrer que la différentielle de f est nulle en O.

12)**(E09) Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $|f'(t)| \leqslant k < 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $g(x,y) = (x + f(y), y + f(x))$. Prouver que g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. *Indication: Théorème du point fixe.*

13)**(X02) Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\psi : \begin{cases} U & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (f(x,y), g(x,y) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. Montrer que $f(x,y) = u$, $g(x,y) = v$ admet une unique solution localement en tout point.

14)**(X02) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application telle qu'il existe $k > 0$ tel que $\|f(x) - f(y)\| \geqslant k\|x - y\|$ pour tous x, y de $\mathbb{R}^n$. Montrer que f est un difféomorphisme de classe $\mathbb{C}^1$.

15)*(C04) Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \left(\frac{x+y}{2}, \frac{xy}{x+y}\right)$

a) Déterminer les plus grands ouverts U connexes par arcs de $\mathbb{R}^2$ sur lesquels f est un difféomorphisme de U sur $f(U)$.

b) On définit U_1 par $x + y < 0$ et $y - x < 0$. Déterminer $f(U_1)$.

c) Soit $X_0 \in U_1$. Que peut-on dire de la suite $X_{n+1} = f(X_n)$?

16)**(M04) Soit l'application $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $\psi(x,y) = (x - y, x + y)$.

a) Montrer que ψ est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur lui-même.

b) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer $\partial_1(\varphi \circ \psi)$ et $\partial_2(\varphi \circ \psi)$.

17)**(M06) On considère l'application ϕ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$u = e^{2y} + e^{2z}, v = e^{2x} - e^{2z}, w = x - y.$$

Caractériser l'ensemble $\phi(\mathbb{R}^3)$ et montrer que ϕ est un difféomorphisme $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^3$ sur $\phi(\mathbb{R}^3)$. Soit ψ l'application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par:

$$\alpha = e^{x-y+2z} + e^{-x+y+2z}, \beta = e^{2x} + e^{2y} - 2\lambda e^{x-y}, \gamma = e^{2x} + e^{2y} - 2e^{y-x}.$$

Prouver que ψ s'écrit sous la forme $\psi = F \circ \phi$, déterminer F. Prouver que ψ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}^3$ sur son image si et seulement si $\lambda \geqslant 0$.

18)***(L04) Soit U un ouvert connexe d'un e.v.n. E de dimension finie, et $f : U \to V$ de classe $\mathcal{C}^1$, V étant un ouvert d'un e.v.n. F de dimension finie. On suppose que la différentielle df_x est inversible en tout point $x \in U$, et qu'il existe une application $g : V \to U$ continue, vérifiant $f \circ g = \mathrm{Id}$. Montrer qu'alors f est un difféomorphisme. *Indication: appliquer plusieurs fois le théorème d'inversion locale.*

19)* Étudier les points critiques de des fonctions suivantes, déterminer s'ils donnent des extrémums locaux, globaux, ou des cols.

$f(x,y) = (\alpha x^2 + \beta y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, $f(x,y,z) = xe^y + ye^z + ze^x$, $f(x,y) = x^2 - y^2 + x^4 + y^4$, $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$, $f(x,y) = e^{xy} + x^2 + \lambda y^2$ (selon λ), $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$.

20)*(M00) Extremums de $f(x,y) = 6xy + (4x + 3y)(47 - x - y)$. *Indication: interprétation géométrique.*

21)**(X02) Trouver $\mathrm{Sup}\left\{ \dfrac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\prod_{1=1}^{n} (1-x_i)} \;/\; \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i \geqslant 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}$.

22)**(C02) Extrémums de $(y - x)^3 + 6xy$, sur le domaine (fermé) défini par $-1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$.

23)**(M05) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On note S^{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ euclidien. Étudier les extrémums de l'application f de $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(u,x) = \mathrm{tr}\left((A - xU{}^tU)^2\right)$. *Indication: le théorème spectral est nécessaire.*

24)**(M05) **Moindres carrés.** Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique, et $Z \in \mathbb{R}^n$ une matrice colonne. Déterminer les extrémums sur $\mathbb{R}^n$ de $f(X) = {}^tXAX - {}^tZX$. *Remarque: distinguer selon que A est inversible ou non, et selon la signature. C'est aussi un exercice sur les quadriques.*

25)**(C07) **Extrémum lié.** Extremums locaux et globaux de $x^2 + y^2 + z^2$ avec la condition de liaison: $\dfrac{x^4}{a^4} + \dfrac{y^4}{b^4} + \dfrac{z^4}{c^4} = 1$ *Indication: il y a une méthode algébrique reposant sur l'inégalité de Cauchy-Schwartz.*

26)***(C00) **Fonctions convexes.** Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$.

a) Montrer que pour tous points M, P l'on a $f(M) \geqslant f(P) + \mathrm{d}f_P(M - P)$.

b) Montrer que tout point critique de f est minimum absolu.

c) Montrer que l'ensemble E des points critiques est convexe.

d) On suppose que $U = \mathbb{R}^2$. Montrer que E est fermé.

27)**(X00) **Extrémums liés d'Hilbert.** On pose pour tout $X = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ $f(X) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{x_i x_j}{i+j+1}$.

On note H l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Étudier les extrémums de la restriction de f à H.

28)**(X05) **Un problème de calcul des variations.**

Étant donnés deux points A et B du plan euclidien P, soit $\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathcal{P})| \ / \ \gamma(0) = A,\ \gamma(1) = B\}$. Pour $\gamma \in \Gamma$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, on pose

$$E_\gamma = \int_0^1 \left((x'(t))^2 + e^{2x(t)}(y'(t))^2\right) \mathrm{d}t.$$

Déterminer une condition *nécessaire* sur γ pour que γ réalise le minimum de E sur Γ. *Indication: la fonction E est définie sur un espace de fonctions mais rien n'empêche d'écrire ses dérivées directionnelles.*

29)**(X09)

a) Soit $h : [0,1] \to \mathbb{R}, \mathcal{C}^2$, telle que : $\exists b \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1], h''(t) \leqslant b$. Montrer que $h(0) + h(1) - 2h(\frac{1}{2}) \leqslant \frac{b}{4}$.

b) Soit $\mathcal{A}$ une boule ouverte de $\substack{n\\R}$, et $f : \mathcal{A} \to \mathbb{R}, \mathcal{C}^2$, telle que :

(i) $\exists c > 0, (x,t) \in \mathcal{A} \times \mathbb{R}^n, d^2f_x(t,t) \leqslant -c\|t\|^2$ (où d^2f_x désigne la forme quadratique différentielle seconde de f au point x).

(ii) $\exists a \in \mathbb{R}, \{x \in \mathcal{A}, f(x) \geqslant a\}$ est fermé non vide.

(iii) f est bornée sur $\mathcal{A}$.

Montrer que f atteint son maximum sur $\mathcal{A}$ en un point unique.

30)***(X07) Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = (\mathrm{tr}(M), \mathrm{tr}(M^2), \ldots \mathrm{tr}(M^n))$.

a) Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$; calculer sa différentielle en $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Quel est le rang de $df(M)$?

c) Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le polynôme mnimal est égal au polynôme caractéristique est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

31)**(C06) Soit ABC un riangle méplat (non plat) du plan ; déterminer le maximum de la fonction qui à un point M intérieur au triangle associe $f(M) = d(M,(AB))d(M,(BC))d(M,(AC))$.

32)***(E04) Quels sont les triangles d'aire maximale circonscrits à une ellipse (c'est-à-dire que les trois points du triangle appartiennent à l'ellipse) ?

33)***(U00) **Principe variationnel.** Soit E l'ensemble des fonctions $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$, telles que $u(0) = a$ et $u(1) = b$ fixés. Soit une fonction K de classe infinie sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives, et $F(u) = \int_0^1 \|u'(t)\|^2 K(u(t))\,\mathrm{d}t$. On suppose qu'une certaine fonction u_0 minimise F. Quelle équation différentielle vérifie u_0 ? *Indication: E est un espace affine; soit E_0 l'espace vectoriel associé (préciser). Si u minimise et si $h \in E_0$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $F(u + \lambda h) \geqslant F(u)$.*

34)***(U02) Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^2$ et telle que

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^2\ f(x) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)(x) \neq \vec{0} \\ \lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty \end{cases}.$$

On note $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ f(x) > 0\}$ et $\partial D = \bar{D} \setminus D$.

Montrer qu'il existe un voisinage V de ∂D tel que

$$\forall y \in V \ \exists! x \in \partial D \ / \ \|x - y\| = \operatorname*{Inf}_{z \in \partial D} \|y - z\|$$

Indication: commencer par montrer que

$$\forall p \in \partial D \ \exists \varepsilon > 0 \ / \ \forall y \in V \|y - p\| < \varepsilon \\ \Longrightarrow \exists! x \in \partial D \ / \ \|x - y\| = \operatorname*{Inf}_{z \in \partial D} \|y - z\|$$

puis utiliser la propriété de Borel-Lebesgue.

35)*(M06) Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $g(x, y) = f(\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{ch} 2y})$. Déterminer f pour que g soit harmonique (laplacien nul).

36)**(X04) Soit le fermé $D \in \mathbb{R}^2$ défini par les inéquations $a \leqslant \rho \leqslant b$ et $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}$, avec $b > a > 0$ donnés. Chercher R et Φ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que $(x, y) \in D \longmapsto V(x, y) = R(\rho)\Phi(\theta)$ vérifie sur D l'équation aux dérivées partielles $\rho^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \rho \frac{\partial V}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$, avec pour conditions au bord $V(\rho, 0) = V(\rho, \frac{\pi}{4}) = 0\,; V(a, \theta) = V(b, \theta) = 0$.

37)*(C08) Chercher une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)$ soit de laplacien nul.

38)* Résoudre: $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4f$ d'abord pour f polynomiale, puis la solution générale. *Indication: fonctions homogènes; passage en polaires...)*

39)* Rechercher des solutions de $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} + x^2 + y^2 = 0$, soit en passant en polaires, soit avec le changement de variables et de fonction inconnue $u = y/x, v = x^2 + y^2, \phi = f^2$.

40)*(C) Résoudre en passant en polaires: $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{x^2}$ et traiter de même:

$x^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{1}{x^4 + y^4}$ puis généraliser au cas d'un second membre "quelconque".

41)*(M02) Résoudre l'e.d.p. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{y}{x^3}$ en supposant f homogène (exclusivement).

42)**(U05) **Équation de la chaleur.** On cherche les applications u continues sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ et suffisamment régulières (à préciser) sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, vérifiant:

a) • $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$,

b) • $u(0, x) = f(x)$,

c) • u 1-périodique par rapport à x.

a) f 1-périodique et $\mathcal{C}^1$ étant donnée, existence et unicité d'une solution ?

b) Régularité (en particulier D.S.E.) de u.

43)**(E04) Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support compact, et pour $t > 0$:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{i(x-y)^2/2t} \, \mathrm{d}y \, .$$

a) Examiner l'existence des dérivées partielles de u, calculer $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial t}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

b) Trouver $\lim\limits_{t \to 0} u(x, t)$.

c) Montrer que u est développable en série entière (à préciser).

d) Montrer que f est limite d'une suite de fonctions développables en série entière (convergence à préciser).

44)**(L04) Soit f différentiable sur $\mathbb{R}^2$, telle que $f(0,0) = 0$, et qu'en tout point $\frac{\partial f}{\partial y} > \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|$. Montrer qu'il existe une unique fonction ϕ dérivable telle que $y = \phi(x) \Leftrightarrow f(x,y) = 0$.

45)**(E08) Tracer l'ensemble $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \sin y = y \sin x\}$

46)*(C00) Soit $f(x,y) = \sin x - \sin y + 2x - y$.

a) Existence d'une fonction implicite φ définie par $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = \varphi(x)$ au voisinage de l'origine (à préciser).

b) DL de φ en 0 à l'ordre 3 ?

c) Allure du graphe de φ en 0 ?

47)**(M04) Au voisinage de (0, 0) quelle est l'allure de la courbe d'équation: dans un repère orthonormé: $\cos(x+y) - \sin(x-y) - 1 = 0$.

48)** Construire les courbes d'équation implicite dans le plan euclidien:

$$x^2y^2 + x^2y + xy = 1; y^4 + (x+y)^3 + x^2 - y^2 = 0; x^4 + y^4 + 2x^3 + x(x+y) = 0$$

$$x(xy + y^2 + 1) = y^2; (y-x)(x^2+y^2-1) = (x+1)(x+y+1) = 0.$$

49)**(X08) Montrer que l'ensemble $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2(2-y^2) - x^2(x-1)(x-2) = 0$ est un compact. Peut-on donner d'autres renseignements sur C ?

50)*** On dispose d'un ordinateur avec un programme pour tracer une courbe définie par $f(x,y) = 0$, et un programme pour tracer une courbe définie par $x = f(t), y = g(t)$. On considère la courbe C_a définie par: $x(x-y) + x^3 + y^4 = a$.

a) Trouver les valeurs de a pour lesquelles C_a a un point multiple. *Réponse: a priori 0 et a_0, par inapplicabilité du théorème des fonctions implicites; mais a_0 donne un point isolé.*

b) Déterminer les tangentes en ce point multiple. *Indication: poser $y = tx$.*

c) Trouver la position de la courbe en ce point multiple. *Indication: DL.*

d) Étudier les branches infinies de C_a.

51)**(X05) **Ouvert convexe à bord.** Soit A un ouvert du plan, de classe $\mathcal{C}^2$ au sens suivant: il existe une application p de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que $A = \{M \ / \ p(M) < 0\}$ et que $p(M) = 0 \Rightarrow dp_M \neq 0$. Montrer que A est convexe si, et seulement si on a sur la frontière de A:

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial p}{\partial x} & \dfrac{\partial p}{\partial y} \\ \dfrac{\partial p}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2} \end{vmatrix} \leqslant 0 \, .$$