Exercices sur les Équations Différentielles

1)* Résoudre $xx' = t(x^2+1)$.

2)*(C02) Résoudre $tx' = \sqrt{t^2+x^2} + x$.

3)*(C06) Résoudre l'équation $x^2 = \dfrac{1}{1+x'^2}$.

4)*(X00) **Équation de Bernoulli.** "Résoudre" $tx' - x + \dfrac{x^3}{t^3} = 0$ par un changement d'inconnue.

5)* **Équation de Riccati.** Résoudre $(t^2+t)x' + x^2 + (1-2t)x = 2t$. *Indication: solution particulière* x_0 *puis* $x = x_0 + \frac{1}{u}$.

6)*(M02) Trouver les solutions à valeurs dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ de $x' = \tan x$. Trouver toutes les solutions de cette équation. Trouver la solution maximale x telle que $x(1) = \frac{3\pi}{4}$ ·

7)* $x' = \tan(t+x)$ *Indication: changer d'inconnue pour une fonction affine de* t, x, *ou de repère.*

8)*(M08) Résoudre $tx' - 2|x| = t$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}$.

9)(C04) Soit (I, φ) une solution maximale de l'équation différentielle : $y' = y(y+1)$. Déterminer φ s'il existe x_0 tel que $\varphi(x_0) = 0$. Quelle est l'autre valeur remarquable de φ qui peut intervenir ? Résoudre l'équation différentielle.

10)*(C02) Soit g de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que g n'est intégrable ni sur $\mathbb{R}^-$ ni sur $\mathbb{R}^+$ et que $\forall t * 0,\ tg(t) > 0$. Soit (u, I) une solution maximale de l'équation différentielle $u'' + u' + g(u) = 0$. On définit sur I la fonction V par $V(t) = \int_0^{u(t)} \left(g(v) + \frac{u'(v)^2}{2} \right) \mathrm{d}v$.

a) Calculer la dérivée de V. Montrer que u et u' sont bornées sur $\mathbb{R}^+ \cap I$. Montrer que $\mathbb{R}^+ \subset I$.
b) Montrer que $u'(t)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} u'(t) = 0$ puis que $\lim\limits_{t \to +\infty} u(t) = 0$.

11)*(M05) Résoudre $x - tx^2 - tx' + txx' = 0$. *Indication:* $z = tx$.

12)** Soit l'équation $(\mathcal{E}_2) : x'' + \dfrac{7}{16t^2} x = 0$. Former l'équation $(\mathcal{R})$ (de Riccati) que vérifie $u = \dfrac{x'}{x}$. Rechercher des fonctions rationnelles (complexes !) solutions de $(\mathcal{R})$, en déduire les solutions de $(\mathcal{E}_2)$, et notamment ses solutions *réelles*.

13)* **Équation de Jacobi.** Étudier l'équation $x' = \frac{at+bx}{ct+dx}$ avec $ad - bc \neq 0$. Exemple: $x' = \frac{t+2x+1}{2t+4x+3}$
Indication: changer d'inconnue pour une fonction affine de t, x, *ou de repère.*

14)**(L07) **Équation de Volterra.** Soit le système $(V) : x' = x(1-y),\ y' = y(x-1)$. Montrer que:
a) toute solution est définie sur $\mathbb{R}_+$ (on peut éventuellement passer ceci et le retrouver à la fin);
b) si $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$ alors x et y restent positives;
c) si $x(0) > 1$ et $y(0) > 1$ alors il existe t_1 tel que $x(t_1) = 1$;
d) la solution va "tourner" entre les domaines D_1, D_2, D_3, D_4 définis par: $D_1 = (x > 1, y > 1); D_2 = (0 < x \leqslant 1, y > 1); D_3 = (0 < x \leqslant 1, 0 < y \leqslant 1); D_4 = (x > 1, 0 < y \leqslant 1)$.
e) Soit $H(x,y) = x - \ln x + y - \ln y$. Quel rapport y a-t-il entre l'équation implicite $H(x,y)$ =constante et le support géométrique d'une solution du système (V) ? Vérifier que $(1,\,1)$ est un minimum strict de H;
f) Montrer enfin que toute solution de l'équation est périodique.
Remarque: il s'agit d'une équation modélisant des effectifs de deux populations animales (proies et prédateurs).

15)**(M07) Étudier le système: $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x(x^2 - \cos y) \end{cases}$. *Indication: Étudier les solutions dans le domaine* A_1 *défini par* $\cos y > x^2$ *et* $x > 0$, $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$ *et dans le domaine* B_1 *défini par* $\cos y \leqslant x^2$ *et* $x > 0$.

16)**(E01) On considère l'équation différentielle $(\mathcal{E})$: $y''+\omega^2\sin(y)=0$. Montrer que toute solution maximale de cette équation est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

17)**(X08) **Pendule non amorti.** On considère le problème de Cauchy $x''+\sin x=0$, $x(0)=0$, $x'(0)=\alpha>0$.

a) Existence et unicité d'une solution définie sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que si $\alpha>2$ alors x est croissante et $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)=+\infty$.

c) Traiter le cas général ($\alpha>0$).

18)**(X08) Soient f,g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $f\leqslant g$. On considère $x(t)$ telle que $x'=f(x)$ et $y(t)$ telle que $y'=g(y)$, et $x(0)\leqslant y(0)$. Montrer que l'on a $x(t)\leqslant y(t)$ pour tout $t\geqslant 0$.

19)**(C06) **Pendule amorti.** **a**) Soient a,b,m réels et $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tels que $f'+mf$ soit bornée. Montrer que f est bornée. Que dire si $f'+mf$ a une limite finie en b ?

b) Que peut-on en déduire sur les solutions maximales de l'équation $x''+mx'+c\sin x=0$? *Réponse: elles sont définies sur* $\mathbb{R}$.

20)**(X06) **Équation de Riccati.** Soit l'équation $(\mathcal{E})$: $x'=t+x^2$.

a) Étudier les solutions développables en série entière.

b) Soit $(\mathcal{E}')$: $x'=-tx^2-1$ et g la solution maximale de $(\mathcal{E}')$ telle que $g(0)=0$. Montrer qu'il existe un voisinage I de 0 sur lequel g ne s'annule qu'en 0.

c) Soient $f_1=\frac{1}{g}$ sur $I\cap\mathbb{R}_+^*$ et $f_2=\frac{1}{g}$ sur $I\cap\mathbb{R}_-^*$. Montrer que f_1 est la seule solution de (E) définie sur un voisinage de 0 à droite et ayant une limite $-\infty$ en 0. Mener une étude analogue pour f_2.

d) Donner des équivalents de f_1 et f_2 en 0.

e) Montrer qu'il existe une solution f de $(\mathcal{E})$ prolongeant f_1 et f_2 et telle que $tf(t)$ soit développable en série entière. Calculer si possible des (les) coefficients de cette série entière.

21)**(E08) **Équation stable.** Soit une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $f(0)=0$ et $f'(0)<0$. Soit x telle que $x'(t)=f(x(t))$; on pose $x_0=x(0)$. Montrer que si x_0 est assez petit alors x est définie sur $\mathbb{R}_+$ et a une limite nulle vers l'infini.

22)** **Étude de $x'=\exp(-tx)$.** **a**) Étude de la solution x_0 telle que $x_0(0)=0$ (parité, croissance, domaine de définition, asymptote horizontale). Considérant les équations différentielles $x'=1-tx$ (avec $x(0)=0$) et $x'=\exp(-x)$ (avec $x(1)=x_1(1)$), situer $x(1)$ et $\lim\limits_{+\infty} x$.

b) Étude sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$.

c) Soit x_n la solution telle que $x_n(0)=n$. Montrer que son domaine de définition est $\mathbb{R}$, et qu'il existe (γ_n) telle que $x_n(\gamma_n)=0$, que (γ_n) décroî t et est minorée (voir en $t=-2$).

d) Montrer que $x_\infty=\lim x_n$ existe et est une solution sur $\mathbb{R}_-^*$.

e) Étudier les solutions supérieures à x_∞.

23)***(U05) **Méthode d'Euler.** Soit $F\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$, bornée et le problème de Cauchy $(\mathcal{E})$: $x'=F(x)$, $x(0)=0$.

a) Quelle condition supplémentaire peut-on imposer pour avoir existence et unicité d'une solution locale ?

b) Montrer que si $F(x)=\sqrt{|x|}$, il y a une infinité de solutions.

c) *Existence d'une solution sur* $[0,1]$*:* Soient $h>0$, $(t_0^h,t_1^h,\dots,t_n^h)$ une subdivision de $[0,1]$ de pas $\leqslant h$. On définit $x^h(t)$ par la méthode d'Euler, i.e. en posant $x^h(0)=0$, puis successivement $x^h(t)=x^h(t_k^h)+(t-t_k^h)F(x^h(t_k^h))$ sur $[t_k^h,t_{k+1}^h]$.

Montrer que si $(x^{h_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction x, alors x est $\mathcal{C}^1$ et solution de (E). *Indication: considérer* $x^{h_p}(t')-x^{h_p}(t)$ *pour* t *et* t' *assez proches; un certain nombre de points de la subdivision associée vont tomber entre* t *et* t'.

d) Montrer que si (g_n) est une suite équilipschitzienne d'applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $(g_n(0))$ soit bornée, on peut extraire de (g_n) une sous-suite convergeant uniformément. *Indication: ici on peut faire converger sur les rationnels d'abord au moyen d'un procédé diagonal.*

e) Montrer qu'il existe une suite (h_p) tendant vers zéro telle que $(x^{h_p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une solution x de (E).

24)**(X01) Soit $q \in \mathcal{C}^0([a,+\infty[,\mathbb{R})$, $p \in \mathcal{C}^1([a,+\infty[,\mathbb{R}_+^*)$. On veut étudier l'équation (E) $px'' + p'x' + qx = 0$ où $x \in \mathcal{C}^2([a,+\infty[,\mathbb{R})$ est une fonction inconnue. Posant $px' = r\cos\theta$ et $x = r\sin\theta$ (à justifier) ramener (E) à un système (S): $r'(t) = f(r,\theta,t)$, $\theta'(t) = g(r,\theta,t)$. Discuter le problème de Cauchy relatif à (S). Dans le cas particulier où $p = 1$, $q > 0$ et $\int_a^{+\infty} q(t)dt$ n'existe pas, montrer que x s'annule une infinité de fois.

25)**(X03) Soit (I,φ) une solution maximale de (E): $x' = x^2 - t$ définie en 0. **a**) Montrer que $\varphi(0) > 1 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+ \cap I\ \varphi(t) > \sqrt{t+1}$ et $\varphi(0) < 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}_+ \cap I\ \varphi(t) < 0$.

b) Soit $s > 0$, (I,φ_s) et (J,θ_s) les solutions maximales de (E) telles que $\varphi_s(s) = \sqrt{s+1}$, $\theta_s(s) = \sqrt{s}$. Montrer que $0 \in I \cap J$. Étudier les variations de $s \to \varphi_s(0)$ et de $s \to \theta_s(0)$.

26)**(L08) Soit un vecteur e non nul de $\mathbb{R}^3$ euclidien. Étudier l'équation différentielle $X' = X \wedge e - X \wedge (X \wedge e)$, avec $X(0) = x_0$ et $\|x_0\| = 1$: existence de solutions, domaine de définition des solutions maximales, limite vers l'infini, allure générale.

27)** Tracer les trajectoires solutions de $\begin{cases} x' = y \\ y' = 1 - x^2 - y^2 \end{cases}$ *Indication: on peut résoudre explicitement en cherchant x en fonction de y. L'étude qualitative est tout aussi directe.*

28)*(C) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $x'' = |x|$ avec une condition initiale $x(0) = a$, $x'(0) = b$. Interpréter dans l'espace des phases.

29)***(X05) Étudier le système: $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x(x^2 - \cos y) \end{cases}$. *Indication: Étudier les solutions dans les domaines* $A_1 = \{(x,y)\ x > 0, 0 < y < \frac{\pi}{2}, \cos y > x^2\}$ *et* $B_1 = \{x > 0,\ \cos y \leqslant x^2\}$.

30)***(U07) Soit le système (S) : $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$. On donne une solution maximale (φ,ψ) de (S) définie sur J. Soit $u = 1 - \varphi^2 - \psi^2$.

a) Exprimer u à l'aide d'une primitive de ψ^2.

b) On suppose que $\exists t_0 \in J\ /\ u(t_0) > 0$. Prouver que $J = \mathbb{R}$.

c) Discuter l'existence d'un $T > 0$ tel que φ et ψ soient T-périodiques.

d) On suppose qu'il existe $t_0 \in J$ tel que $0 < u(t_0) < 1$. Prouver que: $\lim\limits_{+\infty} u(t) = 0; \forall t,\ 0 < u(t) < 1; \lim\limits_{-\infty} u(t) = 1$; les zéros de φ (resp. ψ) forment une partie fermée discrète de $\mathbb{R}$ ni majorée ni minorée.

Indication: Poser $r = \sqrt{\varphi^2 + \psi^2}$. *Considérer* $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *telle que* $\varphi = r\cos\theta, \psi = r\sin\theta$, *calculer* θ' *et* r' *en fonction de* r,θ,φ.

e) Entamer l'étude de (φ,ψ) lorsqu'il existe t_0 tel que $u(t_0) < 0$. A-t-on alors nécessairement $J = \mathbb{R}$? ($\operatorname{Max} J = +\infty$ et $\operatorname{Min} J \in \mathbb{R}$).

31)***(U05) Soit E un sous-espace du $\mathbb{C}$-espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$;

a) On suppose que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$; montrer l'équivalence des trois assertions suivantes :

i) E est stable par dérivation (i.e. $\forall f \in E, f' \in E$)

ii) E est l'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène scalaire d'ordre n : $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + ... + a_0 y = 0$.

iii) E est satble par translations (i.e. $\forall (a,f) \in \mathbb{R} \times E$, l'application $\tau_a(f) : x \to f(x+a)$ appartient à E.

32)***(U09) Soit $A : [0,1] \to \mathcal{M}_n(_R)$, de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\forall t \in [0,1] : A(t)^3 - 2A(t)^2 - A(t) - I_n = 0$. Montrer qu'il existe $P[0,1] \to GL_n(\mathbb{R}), \mathcal{C}^1$, telle que $\forall t \in [0,1], P(t)^{-1}A(t)P(t) = A(0)$.

Rem : exercice posé avec $A(t)^2 = A(t)$ les années précédentes : cet examninateur semble avoir de la suite dans les idées...

33)**(C09) Soit le problème de Cauchy : $y' = y^2 + x, y(1) = 0$.

a) Justifier qu'il existe une unique solution maximale φ, et qu'elle est définie sur un intervalle $]a,b[$ avec $a < 1 < b$.

b) Montrer que $b \geqslant \frac{\pi}{2}$.

c) Donner un équivalent de φ en b.

34)(M) $y'' + |x|y' = x^2 + 2$

35)(M) $x(1+x^2)^2 y'' - (1-x^4)y' - 4x^3 y = 12x^2(1+x^2)$ *Indication: il y a une solution polynomiale; s'occuper de la parité.*

36)(M) Soit u de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I, ne s'y annulant pas, et u' de même. Résoudre:

$$y'' + \left(\frac{u'}{u} - \frac{u''}{u'}\right)y' - \frac{u'^2}{u^2}y = 3u'^2$$

37)(M) $y'' + y' + e^{-2x}y = 0$ *Indication: changement de variable.*

38)(M) $y'' + y = |\sin x|$

39) $y'' + 2y'x + y = 0$ *Indication: poser: $v(y)(x) = y''(x) + 2y'x + y$, chercher $\varphi(x)$ telle que $u(y)(x) = y'(x) + \varphi(x)y(x)$ vérifie: $v = u \circ u$)*

40)(M05) Résoudre $y'' - y = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.

41)(M05) Étudier l'équation différentielle $y'' + ay' + y\sin x = 0$. *Remarque: l'examinateur demande les solutions maxi ?*

42) Résoudre $X' = AX$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 & -3 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Indication: le polynôme caractéristique vaut $(X-1)^3(X-2)^2$. On aura intérêt à déterminer les sous-espaces $\operatorname{Ker}(A-I)$, $\operatorname{Im}(A-I)$ *ainsi que leur intersection, puis* $\operatorname{Ker}(A-I)^2$.

43) Résoudre: $\begin{cases} x' = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^t - 1} \\ y' = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^t - 1} \end{cases}$

44)(L) À résoudre: $\begin{cases} tx' = x - 3y + 3z \\ ty' = -2x - 6y + 13z \\ tz' = -x - 4y + 8z \end{cases}$

45)**(X08) Soit A une matrice antisymétrique. Soit l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^n$ $(E) : V'(x) = AV(x)$.

a) Pour un vecteur u donné, déterminer une solution V de (E) telle que $V(0) = u$.

b) Soient $V_1, \ldots, V_n$ solutions de (E). Comparer $\det(V_1, \ldots, V_n)$ avec $\det(V_1(x), \ldots, V_n(x))$ (à préciser), puis $\|V(x)\|$ avec $\|V\|$ (à préciser).

c) À quelle condition existe-t-il V tel que $(u, V(x))$ soit lié pour tout x ?

46)**(X06) **Mouvement d'un solide.** Soit $t \mapsto A(t)$ une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A(t)$ soit toujours une matrice antisymétrique. On choisit $X_0 \in O_n(\mathbb{R})$. Montrer que toute solution X du problème de Cauchy $X' = AX,\ X(0) = X_0$ est telle que $X(t) \in O_n(\mathbb{R})$ pour tout t.

47) Soit A une matrice carrée réelle de taille n, et de valeurs propres de partie réelle strictement négative. Montrer que: $\lim\limits_{t\to\infty} \exp(tA) = 0$ *Indication: on peut trigonaliser, ou considérer un système différentiel $X' = AX$: comment se comportent les solutions ?*

48)***(X04) Soient $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions continues sur $[a, b]$ et de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a, b[$. Montrer que

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \ldots & \ldots & f_j^{(i-1)} & \ldots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

est non nul sur $]a,b[$ si, et seulement si les f_i constituent n solutions indépendantes d'une équation différentielle linéaire de la forme

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

les a_i étant des fonctions continues.

49)**(U02) Soit une application A de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, telle que les valeurs propres de $A(0)$ aient toutes une partie réelle strictement positive. Soit F de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe X de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ telle que $tX'(t) + A(t)X(t) = F(t)$. *Indication: commencer par A constante et $n = 1$.*

- **a**) À quelle condition une solution y est-elle polynomiale ?
- **b**) On prend $p = q = 1, r = t = 0, s = 2, u = -2$. Résoudre.

50)*(M02) Soit f continue, périodique de période a montrer que $g(x) = \int_0^x \frac{f(t)\sin\omega(x-t)}{\omega}\,dt$ est solution de $y'' + \omega^2 y = f$.

À quelle condition a-t-on une solution périodique de période a ?

51)*(M02) Montrer que $y'' - 4y = a|x| + b$ où a et b sont des réels, admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ admettant des asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$.

52)***(U05) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et A l'ensemble des opérateurs différentiels linéaires à coefficients polynômiaux sur E; c'est-à-dire: un élément D de A est déterminé par la donnée d'un entier n et de polynômes $a_0, \ldots, a_n$, et par l'action $D(f) = g$ avec $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i(x) f^{(i)}(x)$.

- **a**) Établir une structure d'anneau sur A (le produit étant la composition). Quelle en est l'unité ?
- **b**) On note X l'élément de A tel que $X(f)(t) = tf(t)$. Soit $D \in A$. Étudier $XD - DX = [X, D]$.
- **c**) Déterminer les idéaux de A.

53)(M04) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(t+1)}\,dt$. Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre 2 dont f est solution et la résoudre.

54)(X04) Déterminer les solutions de l'équation différentielle $xf'(x) + \lambda f(x) = \frac{1}{x+1}$, les solutions qui ont une limite finie en 0, les solutions développables en série entière. Calculer $S = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{3n}(1+3n)}$.

55)(C05) Soit $E_n : xy'' + (1-x)y' + ny = 0$. Dimension de l'espace des solutions de E_n sur $\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_+^*$).

56)*(M02) Trouver les solutions développables en série entière de l'équation différentielle $2xy'' + y' - y = 0$.

57) Résoudre $x^2y'' - 2x(1+x)y' + 2(1+x)y = 0$. *Indication: chercher une solution polynômiale.*

58) Résoudre $(1-x^2)y'' - xy' - y = 0$ sur $]-1,1[$ en posant $x = \sin t$.

59) $(x^2-1)y'' - ay = 0$ dans le cas où il y a des solutions polynomiales.

60) $2x(1-x)y'' + (4-6x)y' - y = 0$ *Indication: ceci est la dérivée d'une expression du type:* $g(x)y' + h(x)y$

61)(C04) Résoudre $(t^2+1)y''(t) - 2y(t) = 0$ en commençant par trouver une solution sous forme polynômiale.

Résoudre en considérant la solution développable en série entière au voisinage de 0.

62)(C04) Soient $f, g \in \mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$, deux fonctions linéairement indépendantes qui forment une base de solutions d'une équation différentielle linéaire (E). Déterminer (E).

63)(C04) Montrer que $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{ixt}\,dt$ est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer f' à l'aide d'une intégrale.

Montrer que f est solution d'une équation différentielle que l'on précisera et calculer f. Existe-t-il des solutions de cette équation développables en série entière ? Quel est alors le rayon de convergence ? à quelle(s) condition(s) sur les coefficients cette solution est-elle égale à f ? Quelle est la limite de f en $+\infty$?

64) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on pose $[A,B] = AB - BA$. ("crochet de A et B"). On pose $X_1(t) = \exp(tA); X_2(t) = \exp(tB)X_1(t); X_3(t) = \exp(-t(A+B))X_2(t)$.

a) On pose $X_3'(t) = \exp(-t(A+B))\varphi(t)\exp(tB)\exp(tA)$. Calculer $\varphi'(t)$.

b) On suppose que $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$. Calculer $\varphi(t)$ puis $X_3(t)$. Prouver enfin que:

$$\exp(A+B) = \exp A \exp B \exp(-\frac{1}{2}[B,A])$$

65)*(C02) **a**) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient a_{ij}; montrer l'équivalence des deux propiétés suivantes:

(1) $\forall (i,j) \in [1,n]^2$, $i \neq j \Rightarrow a_{ij} \geqslant 0$

(2) $\forall t \in \mathbb{R}_+$, tous les coefficients de e^{tA} sont positifs.

b) Soit f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+^n$. On se place dans l'hypothèse (1). Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^n$; montrer que la solution au problème de Cauchy $\begin{cases} x(0) = x_0 \\ x'(t) = Ax(t) + f(t) \end{cases}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^n$.

66)**(E04) Soit une équation différentielle (E) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, avec a et b réelles continues sur l'intervalle I.

a) Montrer qu'aucune solution non nulle n'a de zéro commun avec sa dérivée. Soit y une solution de (E) qui s'annule en t_0. Montrer qu'il existe un intervalle centré en t_0 où y ne s'annule pas.

b) Soit $\{f,g\}$ une famille libre de solutions de (E). Montrer qu'entre deux zéros de f se trouve un zéro de g.

c) Si $a = \underline{0}$ et $b \leqslant 0$, montrer que toute solution non nulle de (E) s'annule au plus une fois.

d) Soit $b_1 \leqslant b_2$ deux fonctions réelles continues sur l'intervalle I, f_1 et f_2 non nulles vérifiant respectivement $f_1'' + b_1 f_1 = 0$ et $f_2'' + b_2 f_2 = 0$. Montrer qu'entre deux zéros de f_1 se trouve un zéro de f_2.

67)(C04) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}^+$. On note (E) l'équation différentielle : $y' + y = f$.

a) Résoudre (E).

b) On suppose que f a une limite nulle en $+\infty$. Montrer qu'il en est de même des solutions de (E).

c) On suppose que f est T-périodique. étudier l'existence et l'unicité de solutions T-périodiques de (E). Donner alors les coefficients de Fourier d'une solution T-périodique en fonction de ceux de f.

68)(M04) Soit f de classe $\mathcal{C}^1$, monotone sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et ayant une limite finie en $+\infty$. Montrer que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + y = f(x)$ sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

69)**(X06) On considère l'équation différentielle (E) $y'' + p(x)y = 0$ où p est une application continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

a) Soit y une solution non nulle de (E). Montrer que l'ensemble X des zéros de y est formé de points isolés.

b) Que peut-on dire de plus si I est compact ?

c) On suppose que $I = \mathbb{R}_+$. Montrer que l'on peut ordonner les éléments de X en une suite strictement croissante.

70)***(U00) Soit E l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, telles que $f(0) = f(1) = 0$, et Δ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, à valeurs strictement positives. Soit v l'endomorphisme de E défini par $v(f) = \frac{1}{\Delta} f''$.

a) Montrer que les valeurs propres de v sont strictement négatives, et trouver un produit scalaire sur E tel que si f et g sont deux fonctions propres de v associées à des valeurs propres distinctes alors f et g sont orthogonale spour ce produit scalaire.

b) On prolonge Δ en une fonction de classe infinie sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement positive, telle que $\Delta(x) = 1$ pour $x \geqslant 2$. Montrer que pour tout $\gamma < 0$ il existe une unique fonction f telle que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ et $v(f) = \gamma f$.

c) Montrer que la fonction précédente admet une infinité de zéros simples, formant une suite croissante notée $x_0(\gamma) = 0 < x_1(\gamma) < \ldots < x_n(\gamma) < \ldots$, et de limite infinie.

d) Montrer que pour tout n fixé l'on a $\lim\limits_{\gamma \to 0} x_n(\gamma) = +\infty$.

71)**(L06) Soit une fonction p continue sur $\mathbb{R}$, et T-périodique, et (E) l'équation différentielle $y'' + py = 0$.

a) Montrer qu'il existe A réel tel que pour toute solution y de (E) on ait pour tout x: $y(x+2T) - 2Ay(x+T) + y(x) = 0$. *Indication: étudier l'endomorphisme de l'espace des solutions obtenu en décalant d'une période; calculer son déterminant et introduire son polynôme caractéristique.*

b) Montrer que si $|A| < 1$ alors les solutions de (E) sont bornées.

c) Examiner les cas $|A| = 1$ et $|A| > 1$, ainsi que le cas où p est constante.

72)(M06) Soit q une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_0^1 q(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et que q ne soit pas identiquement nulle sur $[0, 1]$. Soit y une solution de l'équation différentielle $y'' + q(x)y = 0$, telle que $y(x+1) = \lambda y(x)$ pour tout x réel, λ étant une constante strictement positive. Montrer que y s'annule sur $[0, 1]$.

73)(C06) Soient a et b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, avec: $\lim\limits_{\pm\infty} b = 0$ et $\operatorname{Inf}\limits_{x} a(x) = m > 0$. On considère l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$.

a) Montrer que les solutions ont une limite nulle en $+\infty$.

b) Montrer qu'une seule solution a une limite nulle en $-\infty$.

74)(M08) Soit y solution de $(E) : y'' - \omega^2 y = f$, f étant une fonction continue sur $\mathbb{R}$ de limites nulles en $\pm\infty$ et $\omega > 0$.

a) Montrer que (E) n'a qu'une solution bornée y_0.

b) Quelles sont les limites de y_0 en $\pm\infty$?

75)(C08) Soit l'équation différentielle $(E) : y' - y = \ln x$, pour $x > 0$.

a) Montrer que les courbes représentatives des solutions possèdent une même direction asymptotique sauf pour l'une d'entre elles.

b) Déterminer (ou décrire) l'ensemble des points M du plan en lesquels la courbe-solution de (E) présente une tangente horizontale.

c) Déterminer (ou décrire) l'ensemble des points M du plan en lesquels la courbe-solution de (E) présente un point d'inflexion.

76)(C06) Soit l'équation différentielle $\mathcal{E} : x''(t) = (1 + f(t))x(t)$.

a) On pose $z = \dfrac{x'}{x} - 1$. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par z ?

b) On suppose que $\lim\limits_{t\to+\infty} f = 0$. Soit $\varepsilon > 0$ et t_1 tels que pour $t \geqslant t_1$ on ait $f(t) \leqslant \varepsilon$. On construit une suite de fonctions en posant $u_0(t) = \int_{t_1}^{t} e^{-x(t-s)} f(s)\,\mathrm{d}s$ puis $u_n(t) = u_0(t) - \int_{t_1}^{t} e^{-x(t-s)} u_{n-1}^2(s)\,\mathrm{d}s$. Montrer que cette suite converge uniformément sur $[t_1, +\infty[$ vers une fonction u solution d'une équation différentielle qu'on déterminera.

77)(X) Soit f réelle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}+$telle que: $-1 < k \leqslant f(t)$ pour tout t et f' intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose: $\gamma(t) = \int_0^t \sqrt{1 + f(u)}du$ et on considère l'équation (1): $x'' + (1 + f(t))x = 0$.

a) Exprimer les solutions dans le cas où $f(t) = k$ pour tout t.

b) Dans le cas fénéral, on introduit R et φ applications de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $x(t) = R(t)\sin(\varphi(t) + \gamma)$ soit solution de (1) et vérifie $x' = R\gamma' \cos(\varphi + \gamma)$. Etablir une équation differentielle dont φ est solution.

c) Prouver l'existence des fonctions R et φ précédentes. Étudier l'existence de leurs limites en $+\infty$.

78)***(X05) Soit h une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'équation différentielle (incertaine, à vérifier) $f'' + f' - 2hf = 0$. **a**) Montrer que f est solution si, et seulement si elle vérifie une équation intégrale de la forme $f(t) = a + be^{-t} + \int_0^t h(u)f(u)\,du + e^{-t}\int_0^t e^u h(u)f(u)\,du$ où a et b sont deux constantes réelles.

b) Dans le cas où l'intégrale $\int_0^\infty |h(t)|\,dt$ converge, montrer que f est bornée. *Remarque: ceci évoque le lemme de Gronwall.*

79)(X) Soient $g, k : [a, b] \to R$ avec g continue et k de classe $\mathcal{C}^1$ ne s'annulant pas sur $[a, b]$ et $(E) :\ (ky')' + gy = 0$.

a) Montrer que l'ensemble des zéros d'une solution non nulle de E est fini.

b) Soient y_1 et y_2 deux solutions indépendantes de E (*existence ?*). Montrer que si x_1 et $x_2 (> x_1)$ sont deux zéros de y_1 alors y_2 s'annule sur $]x_1, x_2[$

c) Soient $g_1,\ g_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues telles que $g_1 < g_2$, $(E_j) :\ (ky')' + g_j y = 0\ (j = 1, 2)$ et u une solution non nulle de E_1 s'annulant en x_1 et $x_2 > x_1$. Montrer que toute solution de E_2 s'annule sur $]x_1, x_2[$.

80)**(E07) Soit $\alpha > 0$, et $x(t)$ une solution de l'équation différentielle $tx' + \alpha x = f(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ vérifiant la condition initiale: $x(t_0) = x_0$; f est supposée dérivable sur $\mathbb{R}_+$. Étudier le prolongement éventuel de $x(t)$ par continuité en 0. Dans le cas où l'on a $\alpha > 1$ étudier la dérivabilité du prolongement de $x(t)$.

81)**(X03) φ est C^0 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. On étudie l'équation différentielle: $x'' = \varphi(t)x$ avec les conditions: $x(0) = 1; x'(0) = a$.

a) Problème de Cauchy; solution maximale sur un ouvert.

b) s et c sont deux solutions vérifiant: $s(0) = 0, s'(0) = 1; c(0) = 1, c'(0) = 0$. Montrer que s et c sont croissantes et tendent vers $+\infty$.

c) Tracer l'allure de l'ensemble des solutions.

82)(M05) Rechercher sous forme de série entière des solutions de $xy''2(2x^2 + 1)y' + 2(2x^2 + 3)y = 0$.

83)(M08) Résoudre $xy'' + 3y' - 4x^3y = 0$.

84)(C05) Résoudre $xy'' + y' - xy = 0$.

85)(M) 05 Rechercher sous forme de série entière des solutions de $x(x^2 + 1)y'' - 2(x^2 + 1)y' + 2xy = 0$.

86)(M) Solutions développables en série entière de $x(1+x^2)y'' + (1+x^2)y' - 2xy = 0$. Rayon de convergence? Expression avec des fonctions usuelles.

87) $x(x^2 + 1)y'' - 2(1 + x^2)y' + 2xy = 0$. *Indication: série entière*