Combinatoire énumérative

Le problème général de la théorie additive des nombres est le suivant : soit E un sous-ensemble de $\mathbf{Z}$. Tout élément de $\mathbf{N}$ (ou de $\mathbf{Z}$) est-il représentable par une somme finie d'éléments de E ? Si oui, est-il possible de représenter tout entier à l'aide d'une somme d'un nombre borné d'éléments de E ? Et de combien de façons ?

On a déjà abordé ce problème, dans le cas particulier où E est l'ensemble des carrés ; on a montré le théorème de Lagrange, qui nous dit que tout entier est somme de quatre carrés au plus. Nous avons exhibé aussi une formule nous donnant le nombre de représentations d'un entier en tant que somme de quatre carrés ; et nous avions trouvé, auparavant, une caractérisation des entiers qui sont des sommes d'au plus deux carrés.

Sans aborder ce problème en général, nous allons maintenant prendre d'autres exemples et essayer de démontrer, par des moyens simples, de combien de façons on peut représenter les entiers n.

1. Séries génératrices : partitions

▲ DÉFINITION. *Si on note a_n le nombre de représentations de l'entier n par des éléments de E, la série formelle*

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$$

(qui n'a aucune raison a priori d'être convergente) est appelée série génératrice des représentations par E.

L'exemple conceptuellement le plus simple en théorie additive des nombres est celui des partitions d'un entier[1]. Ici, l'ensemble E est l'ensemble des na-

[1]Le problème de la partition des entiers évoque immédiatement le nom de Ramanujan (1887-1920), ce fulgurant mathématicien indien qui serait demeuré inconnu sans la perspicacité de G. H. Hardy, professeur de mathématiques à Cambridge. Ce dernier ayant reçu du jeune prodige un courrier contenant une foule de relations et propriétés étonnantes, réussit à le faire venir en Angleterre pour y approfondir une éducation lacunaire et broussailleuse. Malheureusement, il était déjà tard, puisque Hardy ne reçut ce premier courrier qu'en 1913 : Ramanujan n'avait que sept ans devant lui et, de surcroît, sa faible santé ne résista pas au climat. Il avait néanmoins découvert et redécouvert beaucoup de relations numériques algébriques, nettement moins en analyse, faute de formation. Les identités de Rogers-Ramanujan dont il sera question plus loin (théorème 78) sont de ces trouvailles où il était devancé par les mathématiciens anglais. Mais

turels strictement positifs, et on cherche à décomposer les entiers en somme d'entiers.

▲ DÉFINITION. *Une partition de n est une suite $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ d'entiers strictement positifs tels que :*

★ $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k$, *et*

★ $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_k$.

✔ EXEMPLE : Il existe 7 partitions de 5 :

$$\begin{aligned} 5 &= 5 \\ &= 4+1 = 3+2 \\ &= 3+1+1 = 2+2+1 \\ &= 2+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1. \end{aligned}$$

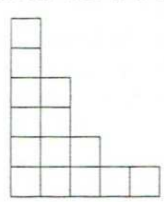
Si n est strictement positif, on note $p(n)$ le nombre de partitions de cet entier : ainsi, $p(5) = 7$. Il est clair que $p(n) \geqslant 1$ pour tout n ; et on pose, par convention, $p(0) = 1$. La série génératrice des partitions est

$$\sum_{n \geqslant 0} p(n) x^n.$$

La difficulté ici n'est pas de montrer que les entiers admettent des partitions, mais plutôt de déterminer $p(n)$. Ce problème n'est pas trop difficile à résoudre ; aussi, nous allons étudier des partitions assujetties à des conditions particulières.

a. Diagrammes de Ferrers et premières bijections

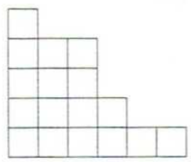
▲ DÉFINITION. *Un diagramme de Ferrers est un empilement fini de cases tel que chaque étage contienne au plus le même nombre de cases que l'étage au-dessous : par exemple, le diagramme suivant est un diagramme de Ferrers de 14 cases :*



dans ce cas, notamment, où les identités citées lui permirent un important travail sur les fractions continues, il avança plus profondément que Rogers.

65 **Proposition.** *Il y a une bijection entre les diagrammes de Ferrers de n cases et les partitions de n ; donc, si $p'(n)$ est le nombre de diagrammes de Ferrers de n cases, alors $p'(n) = p(n)$.*

La preuve est donnée par le schéma ci-dessus :



$$\longleftrightarrow \qquad 17 = 6 + 4 + 3 + 3 + 1$$

66 **Théorème.** *La série génératrice des partitions (ou des diagrammes de Ferrers) est donnée par la formule :*

$$\sum_{n\geqslant 0} p(n)q^n = \prod_{i\geqslant 1} \frac{1}{1-q^i}, \quad \textit{ou encore} \quad \Big(1 + \sum_{i\geqslant 1} p(n)q^n\Big) \cdot \prod_{i\geqslant 1}(1-q^i) = 1.$$

PREUVE : Tout d'abord, remarquons que le produit infini de droite a un sens, au moins formellement. Ensuite, rappelons que

$$\frac{1}{1-q^i} = 1 + q^i + (q^i)^2 + \cdots = \sum_{k\geqslant 0} q^{ki}.$$

Quand on multiplie toutes ces séries entre elles, on obtient une série $\sum a_n q^n$; il faut démontrer que $a_n = p(n)$.

Ecrivons les séries en lignes :

$$\begin{array}{l}(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots)\\(1 + q^2 + q^4 + q^6 + \cdots)\\(1 + q^3 + q^6 + q^9 + \cdots)\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}$$

Multiplions toutes ces séries. Chaque partition de n contribue de 1 au coefficient de q^n ; ainsi, par exemple, la partition

$$10 = 3 + 2 + 2 + 2 + 1,$$

correspond au produit de q^3 dans la troisième ligne, de $q^6 = q^{2+2+2}$ dans la deuxième et de q dans la première.

On en déduit que le coefficient de q^n dans le produit de droite est la quantité de partitions de n, c'est-à-dire $p(n)$, et que l'égalité (formelle) annoncée par le théorème est vraie. ❍

67 **Théorème.** *Le nombre de partitions de n en des entiers inférieurs ou égaux à m, noté $p(n,m)$, vérifie l'identité :*

$$\sum_{n\geqslant 0} p(n,m)q^n = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}.$$

C'est la même démonstration que la précédente.

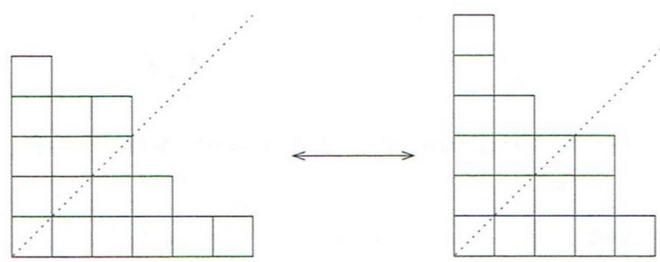
b. Partitions de n par des sous-ensembles de $\mathbf{N}$

Voici un premier exemple d'exploitation des diagrammes de Ferrers :

68 **Proposition.** *Si $p'(n,m)$ est le nombre de partitions de n en au plus m parts, alors $p'(n,m) = p(n,m)$, et donc*

$$\sum_{n\geqslant 0} p'(n,m)q^n = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}.$$

La démonstration est graphiquement très simple :



Notons que l'on aurait pu dénombrer directement ces partitions d'un type spécial, et montrer la formule annoncée. D'ailleurs, c'est cette version qui se généralise le plus facilement :

69 **Théorème.** *Si I est un sous-ensemble de $\mathbf{N}^*$, le nombre $p(n,I)$ de partitions de n par des entiers appartenant à I vérifie :*

$$\sum_{n\geqslant 0} p(n,I)q^n = \prod_{i\in I} \frac{1}{1-q^i}.$$

La démonstration est toujours la même, il faut compter ces partitions et vérifier que leur nombre correspond au coefficient de q^n dans le développement en série entière du produit infini.

✔ EXEMPLE : Quel est le nombre de façons de régler la somme de 100 F uniquement avec des pièces de 1 F et 2 F ? C'est le coefficient de q^{100} dans la série

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)} = \frac{a}{1-q} + \frac{b}{(1-q)^2} + \frac{c}{1+q},$$

quand on décompose la fraction en éléments simples (!) et on trouve

$$\begin{cases} a = 1/4 \\ b = 1/2 \\ c = 1/4 \end{cases}$$

Le coefficient de q^{100} dans $1/(1-q)$ est 1. La fonction $1/(1-q)^2$ s'obtient au signe près en dérivant la précédente, et le coefficient de q^{100} est donc 101. Le coefficient de q^{100} dans la dernière fraction $1/(1+q)$ est, lui, égal à $(-1)^{100} = 1$. On en déduit que le nombre cherché est

$$\frac{1}{4} + \frac{101}{2} + \frac{1}{4} = 51.$$

On généralise facilement l'énoncé et la solution formelle de l'exercice à d'autres pièces et d'autres sommes à payer, mais les calculs (en théorie toujours possibles) deviennent de plus en plus durs. Remarquons aussi que la solution de ce problème particulier pouvait se trouver directement et plus rapidement...

✔ EXEMPLE : On cherche le nombre de solutions en nombres entiers de l'équation $au + bv = n$, où a, b et n sont fixés et u et v sont les inconnues ? C'est encore un problème de partitions ; le nombre cherché est le coefficient de q^n dans la série

$$\frac{1}{(1-q^a)(1-q^b)}.$$

Remarquons que les relations de divisibilité particulières que peuvent avoir a et b (leur pgcd, leur décomposition en nombres premiers) se retrouvent quand on décompose cette fraction en éléments simples : suivant que les racines a-ièmes de l'unité et les racines b-ièmes se chevauchent plus ou moins, on trouvera une décomposition plus ou moins facile.

On en déduit immédiatement les corollaires :

70 **Corollaire.** *La série génératrice des partitions en entiers pairs est*

$$\sum_{n\geqslant 0} p(n, 2\mathbf{N})q^n = \prod_{i\geqslant 1} \frac{1}{1-q^{2i}}.$$

La série génératrice des partitions en entiers impairs est

$$\sum_{n\geqslant 0} p(n, 2\mathbf{N}+1)q^n = \prod_{i\geqslant 0} \frac{1}{1-q^{2i+1}}.$$

Il est d'ailleurs peut-être plus facile de montrer les résultats suivants :

71 **Proposition.** *La série génératrice des partitions en entiers différents est*

$$\sum_{n\geqslant 0} \widetilde{p}(n)q^n = \prod_{i\geqslant 1}(1+q^i).$$

De même, la série génératrice des partitions de n en entiers impairs et différents est

$$\sum_{n\geqslant 0} \overline{p}(n)q^n = \prod_{i\geqslant 0}(1+q^{2i+1}).$$

En effet, chaque partition de n par des entiers différents (*resp.* des entiers différents et impairs) contribue d'une unité au coefficient de q^n dans le produit du terme de droite ; on en déduit le résultat.

On est d'ailleurs amenés à constater le résultat suivant :

72 **Proposition.** *Le nombre de partitions de n en entiers différents est égal au nombre de ses partitions en entiers impairs.*

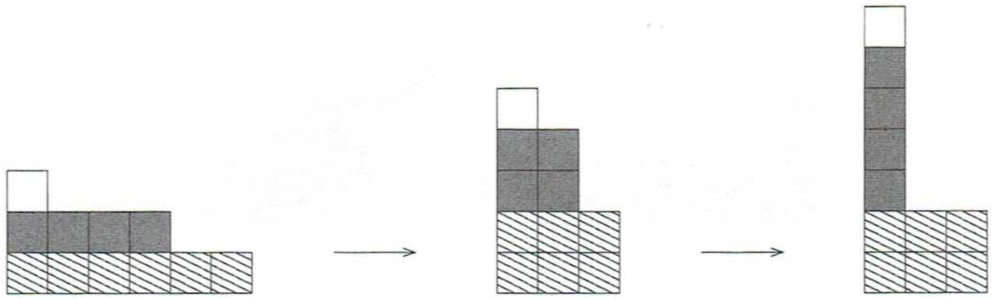
PREUVE : On utilise les séries formelles :

$$\begin{aligned}
\prod_{i\geqslant 1}(1+q^i) &= \prod_{i\geqslant 1} \frac{1-q^{2i}}{1-q^i} \\
&= \prod_{i \text{ pair}} (1-q^i) \times \frac{1}{\prod_{i\geqslant 1}(1-q^i)} \\
&= \prod_{i \text{ impair}} \frac{1}{1-q^i} \\
&= \prod_{i\geqslant 0} \frac{1}{1-q^{2i+1}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, les deux séries génératrices sont égales, et donc les coefficients de q^n est le même dans chacune des deux expressions. ❍

Peut-on trouver une preuve bijective de cette égalité ? Oui : on peut toujours trouver une preuve bijective de ce genre de choses. Parfois, la preuve est plus compliquée que la preuve formelle, mais elle existe toujours.

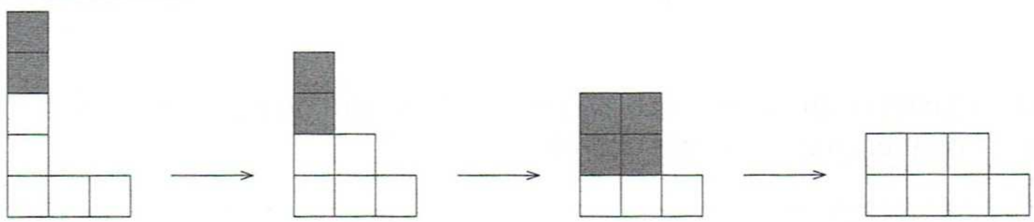
Ici, par exemple, elle est plus compliquée.



$11 = 6 + 4 + 1$ $\qquad\qquad$ $11 = 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

On fait remonter les étages pairs en les coupant en deux parties égales (et les plaçant à la hauteur qui leur convient), tant qu'on peut le faire. On obtient à la fin un diagramme où la taille de chaque étage est impaire.

La bijection réciproque est tout aussi mécanique à mettre en place : on parcourt le diagramme de haut en bas, et dès qu'on voit deux étages de même taille, on les regroupe en un seul étage (en le plaçant à la hauteur qui convient). On obtient bien à la fin un diagramme dont tous les étages sont de taille différente.



$11 = 3 + 1 + 1 + 1$ $\qquad\qquad$ $7 = 4 + 3$

c. D-partitions

▲ DÉFINITION. *On appelle D-partition de n une partition $n = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$, avec $\lambda_i - \lambda_{i+1} \geqslant 2$.*

73 **Proposition.** *La série génératrice des D-partitions ayant m parts est*

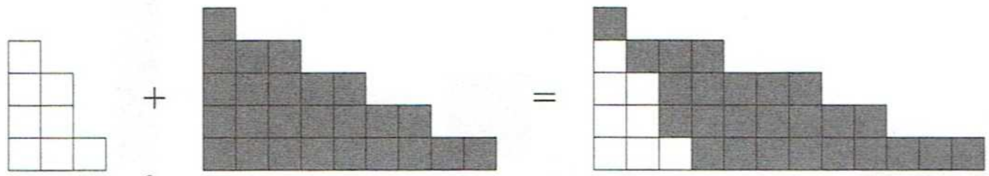
$$f_m = \frac{q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}.$$

On a déjà vu que la série génératrice des partitions ayant au plus m parts est

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}.$$

Le coefficient de q^n dans cette série est $p(n,m)$.

Mais on a une bijection entre les D-partitions de m^2+n ayant m parts et les partitions de n ayant au plus m parts :



$m^2 = 1+3+5+\cdots+(2m-1)$

Ceci donne le résultat annoncé par la proposition : en effet, on associe à chaque partition de n en au plus m parts (comptées par $p(n,m)$) une D-partition de $n+m^2$, comptées par le coefficient de q^{m^2+n} dans sa série génératrice. La bijection montre que ce coefficient est égal à $p(n,m)$: c'est exactement l'égalité de la proposition.

d. Un premier théorème d'Euler

On va maintenant donner une preuve combinatoire de deux théorèmes d'Euler[2]. Commençons par le plus simple :

74 **Théorème.** *On a l'égalité de séries formelles :*

$$\prod_{i\geqslant 0}(1+q^{2i+1}) = \sum_{m\geqslant 0}\frac{q^{m^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2m})}.$$

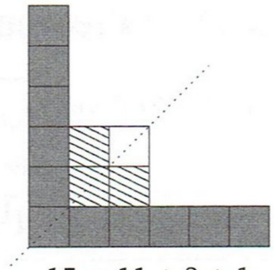
On a déjà vu que le produit de gauche dénombre les partitions de n en entiers impairs. Il faut interpréter la série de droite.

Prenons une partition de n en entiers impairs, et associons-lui un digramme de Ferrers différent du diagramme habituel :

[2]A propos d'Euler (1707-1783), on le trouve ici comme à peu près partout en mathématiques. Dans le problème de la partition d'un entier, il est l'auteur d'une stupéfiante formule où il « embauche », de manière inattendue, les nombres pentagonaux :

$$p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)-p(n-12)-p(n-15)+p(n+22)\cdots=0.$$

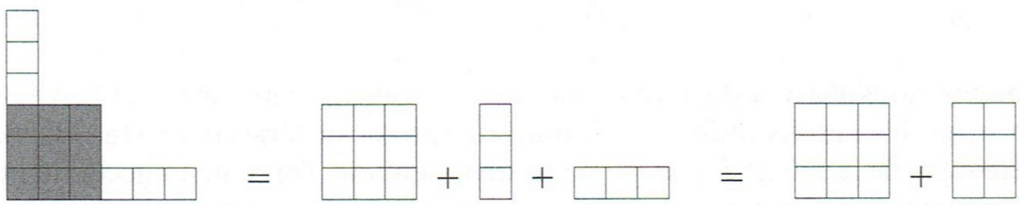
On reconnaît la suite des nombres pentagonaux généralisés, $p(n)$ étant le nombre de partitions de l'entier n. Les mystères de cette formule sont révélés au grand public par Conway, dans *Le livre des nombres* (Eyrolles, 1999).



$15 = 11 + 3 + 1$

On remarque que ce diagramme est symétrique ; on aura donc démontré le théorème si on prouve que la série de droite dénombre les diagrammes symétriques.

Mais si on prend un diagramme de Ferrers symétrique, on peut le décomposer en un carré et en une partition :



De façon générale, un diagramme symétrique de n cases détermine de façon unique un carré de m^2 cases, et un diagramme de $(n - m^2)$ cases avec des étages de taille paire. Réciproquement, un carré de m^2 cases et un diagramme de $(n - m^2)$ cases avec des étages de taille paire déterminent un unique diagramme symétrique (on divise le diagramme en deux, et on en met une partie en haut et l'autre à droite du carré).

Le coefficient de q^{m^2+n} dans

$$\frac{q^{m^2}}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2m})}$$

est le nombre de partitions de n en entiers pairs ; cela se démontre comme dans le paragraphe précédent ; et, pour chacune de ces partitions, quand on rajoute le carré de m^2 cases, on obtient un diagramme symétrique de (m^2+n) cases.

En sommant par rapport à m, on obtient ainsi tous les diagrammes symétriques. Nous avons démontré le théorème, ainsi qu'un corollaire :

75 **Corollaire.** *Le nombre de diagrammes de Ferrers de n cases n'ayant que des étages de taille impaire est le nombre de diagrammes symétriques de n cases.*

e. Un deuxième théorème d'Euler

76 **Théorème.** *On a l'égalité de séries formelles :*

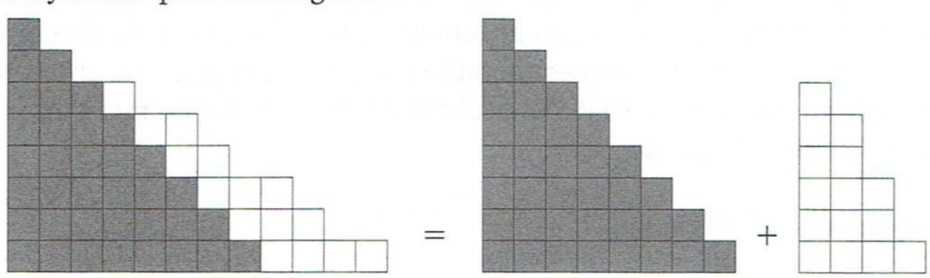
$$\prod_{i\geqslant 1}(1+q^{2i}) = \sum_{m\geqslant 0} \frac{q^{m(m+1)}}{(1-q^2)(1-q^4)\cdots(1-q^{2m})}.$$

L'idée combinatoire sous-jacente à ce théorème est un peu plus compliquée que la précédente : il s'agit de construire des triangles rectangles isocèles et non plus des carrés.

On va en fait remplacer q^2 par q, et démontrer l'identité

$$\prod_{i\geqslant 1}(1+q^{i}) = \sum_{m\geqslant 0} \frac{q^{m(m+1)/2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{m})}.$$

Comme nous l'avons déjà vu, le produit de gauche dénombre les partitions de n en des entiers différents. Il faut interpréter la série de droite. Mais on démontre de la même façon que précédemment que l'on a une bijection entre diagrammes de Ferrers de n cases à m étages de taille différente d'une part, et couples de triangles rectangles de côté m et diagrammes de $n-m(m+1)/2$ cases ayant au plus m étages :



$51 = 12+10+9+7+6+4+2+1$ $\quad \frac{8\times 9}{2} \quad$ $15 = 4+3+3+2+2+1$

(Noter que pour que cette application soit bien définie, il faut absolument que les étages soient tous de taille différente au départ)

Or le coefficient de $q^{n+m(m+1)/2}$ dans

$$\frac{q^{m(m+1)/2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{m})}$$

est exactement le nombre de diagrammes de n cases, ayant au plus m étages ; quand on rajoute le triangle rectangle de côté m, ayant $m(m+1)/2$ cases, on otient donc un diagramme de n cases dont les étages sont tous différents.

On en déduit, comme précédemment le théorème, en faisant la somme pour tous les entiers m.

f. Une idéntité formelle non triviale

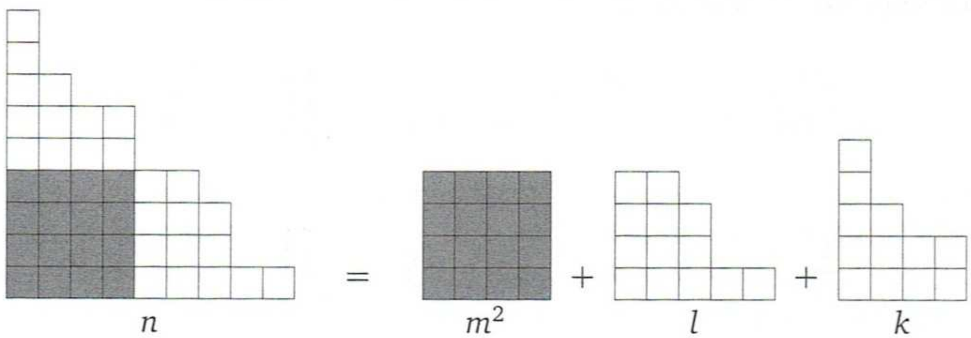
On finit les démonstrations de cette partie en prouvant encore un théorème d'Euler :

77 **Théorème.** *On a l'égalité de séries formelles :*

$$\sum_{m\geqslant 0} \frac{q^{m^2}}{[(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)]^2} = \prod_{i\geqslant 1} \frac{1}{1-q^i}.$$

Le produit de droite dénombre les partitions des entiers. Il faut trouver un moyen d'interpréter la série de gauche.

On a une bijection entre partitions de n d'une part, et carrés de m^2 cases, partitions de l en au plus m entiers, et partitions de $k = n - m^2 - l$ en des entiers au plus égaux à m ; graphiquement, cette partition est très simple : on prend le plus grand carré contenu dans le diagramme de Ferrers de la partition (appelé carré de Durfee), et le reste forme les deux partitions cherchées :



Ici, le carré de Durfee est de côté 4.

Le nombre de partitions de l en au plus m parts est le coefficient de q^l dans la série

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)} ;$$

le nombre de partitions de k en des entiers au plus égaux à m est le coefficient de q^k dans la même série

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}.$$

On en déduit que le coefficient de q^{n-m^2} dans la série

$$\frac{1}{[(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)]^2}$$

est le nombre de couples de partitions de l et de k pouvant convenir dans la bijection plus haut, quand le carré est de côté m ; ou encore, que le coefficient de q^n dans

$$\frac{q^{m^2}}{[(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)]^2}$$

est le nombre de partitions de n dont le carré de Durfee est de côté m. En sommant par rapport à m, on obtient comme coefficient de q^n le nombre de partitions de n, et le théorème est ainsi démontré.

On peut, en exercice, essayer de trouver une démonstration algébrique classique de cette identité...

g. Identités de Rogers-Ramanujan

On va juste énoncer les identités de Rogers-Ramanujan, et donner leur interprétation en termes de partitions, mais on ne va pas les démontrer.

78 **Théorème.** *On a les identités :*

$$\sum_{m\geqslant 0}\frac{q^{m^2}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)} = \prod_{i\equiv 1,4 \bmod 5}\frac{1}{1-q^i},$$

et

$$\sum_{m\geqslant 0}\frac{q^{m(m+1)}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)} = \prod_{i\equiv 2,3 \bmod 5}\frac{1}{1-q^i},$$

La première identité revient à dire qu'il y a autant de D-partitions que de partitions dont les parts sont congrues à 1 ou 4 modulo 5 ; la deuxième affirme qu'il y a autant de D-partitions en parts supérieures à 2 que de partitions dont les parts sont congrues à 2 ou 3 modulo 5 (il faut, pour établir cette interprétation en termes de D partitions, utiliser l'identité

$$m(m+1) = 2+4+6+\cdots+2m,$$

et procéder comme pour les D-partitions).

Il est à remarquer qu'une preuve bijective de ces identités existe, mais qu'elle est très compliquée ; elle a été trouvée en 1980 et nécessite l'usage d'un ordinateur. C'est toujours un problème ouvert de savoir s'il existe une bijection simple qui prouve les identités de Rogers-Ramanujan.

Il faut aussi noter que le nombre 5 se voit attribuer un rôle qu'on ne s'attendait pas à lui voir jouer dans le dénombrement des partitions. Une explication de ce fait mériterait un article dans une revue de recherche.