Convergence(s)...en série

LoïcTeyssier

Résumé : Dans cet article nous présentons quelques procédés qui permettent de « resommer » des sommes infinies que le sens mathématique commun appelle divergentes. Euler proposa par exemple l'égalité $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1$, et à sa suite des mathématiciens ont justifié en quoi cette relation portait du sens. Outre ces séries géométriques d'autres types de séries divergentes peuvent être resommées ; nous introduirons par exemple les sommes de Cesàro ou de Mittlag-Leffler. Nous étudierons plus particulièrement les séries de type Gevrey, pour lesquelles la sommation « au sens des astronomes », entrevue par Poincaré et finalisée tout au long du vingtième siècle, fonctionne et permet de donner des résultats numériques en rapport avec l'expérience physique (calcul d'éphémérides en astronomie, de franges d'interférence en optique, de moments magnétiques pour l'électron en physique quantique).

Mots-clés : Série numérique - Série entière - Série divergente - Développement asymptotique - Transformée de Laplace.

Quand j'ai commencé à écrire cet article sur la sommation des séries divergentes, je ne m'imaginais pas à quel point il serait délicat de traiter le sujet, pour plusieurs raisons. Une d'elles consiste à prendre la suite de l'excellent article [L] de J. Lefort publié dans L'Ouvert. Je ne voudrais pas refaire en moins bien ce qui a été dit si clairement. Bien que je reprenne certains de ses thèmes, je recommande vivement la lecture préalable de cet article car son abord est sûrement plus aisé et présente certains des itinéraires de pensée qui seront explicités ici. De même le non moins excellent article [R] publié dans *Pour la Science* par J.-P. Ramis, mathématicien au cœur des récents développements de la resommation, présente avec concision et précision les tenants et aboutissants de ce sujet vus par le mathématicien et le physicien.

L'histoire connue commence quelque part dans l'antiquité grecque. Afin de souligner les incohérences des théories continuistes ou atomistes, le philosophe Zénon inventa une série d'expériences de pensée dont la finalité était de prouver que de ces théories découle l'impossibilité (ou l'absurdité) du mouvement. Une de ces expériences met en jeu un Achille qui ne parviendra jamais à rattraper à la course son concurrent pourtant moins rapide. L'argument peut se résumer de la sorte : pour le rattraper Achille doit couvrir la distance qui les sépare au départ, mais pour ce faire il doit d'abord en parcourir la moitié, puis la moitié de la moitié restante, et ainsi de suite *ad infinitum*. Effectuer cette infinité d'étapes lui prendrait un temps infini, donc il ne le rattrape jamais. Ce « paradoxe » peut être résolu de diverses manières, mais celle qui nous intéresse ici en est le traitement mathématique « dur ». En effet, à un facteur près, le temps nécessaire est la somme des termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots \quad = \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} = \frac{1}{2}\times\frac{1-2^{-\infty}}{1-2^{-1}} = \frac{2}{2} = 1$$

qui est finie. On dira que la somme infinie du membre de gauche est une série convergente et que sa somme vaut 1.

Il aura fallu attendre l'apparition de l'analyse mathématique pour formaliser proprement ce raisonnement. Pourtant il existe bien des séries qui sont divergentes : personne ne peut en effet contester que

$$1+1+1+1+\cdots \quad = \quad +\infty\,.$$

Ô qu'il est amoral de manipuler algébriquement des quantités infinies (ou en tout cas mal définies). Mais que la tentation du Malin est grande... risquons nous à un blasphème ! En désignant par S la « somme » $1-1+1-1+1-1+\cdots$ on trouve successivement :

$$\begin{aligned} S &= (1-1)+(1-1)+\cdots = 0\,? \\ S &= 1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots = 1\,? \end{aligned}$$

mais également

$$\begin{aligned} 2S = S+S &= \begin{array}{cccccc} & 1 & -1 & +1 & -1 & +\cdots \\ + & & 1 & -1 & +1 & -\cdots \end{array} = 1\,, \\ \text{d'où} \qquad S &= \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Ces incohérences ont énervé (à juste titre) nos ancêtres mathématiciens, et CAUCHY a décidé de mettre de l'ordre au début du XIX$^{\text{e}}$ siècle. C'est à lui que l'on doit la définition-couperet actuelle des séries convergentes : celles pour lesquelles la suite des sommes partielles converge. Pour S ce n'est pas le cas car les sommes partielles valent alternativement 1 et 0. Et pourtant... et pourtant si on fait attention, si on manipule avec dextérité ces expressions, on s'apercevra que la dernière égalité, c'est-à-dire

$$1-1+1-1+\cdots \quad = \quad \frac{1}{2}\,,$$

est crédible. En tout cas telle fut la conclusion d'EULER, qui s'autorisait beaucoup de choses qui sont maintenant défendues à nos pieux élèves. Et ce mathématicien extraordinaire était suffisamment pervers pour avoir pensé des relations encore plus saugrenues, comme par exemple la choquante :

$$T = 1+2+4+8+\cdots+2^n+\cdots \quad = \quad -1\,.$$

La foi qu'EULER portait en ces formules venait, entre autre, du fait que ces expressions sont données par la somme des termes de la suite géométrique de raisons respectives -1 et 2. D'une certaine manière il est ainsi plus « naturel » d'associer à ces séries les nombres cités au-dessus que d'autres valeurs. Plus généralement le caractère naturel des sommations que nous allons présenter proviendra de ce que des séries *a priori* divergentes sont néanmoins symboliquement solutions d'équations fonctionnelles (en pratique : algébriques ou différentielles). Par exemple la dernière série T est symboliquement solution de $2T = T-1$. Il n'est toutefois pas toujours possible de rendre finie des séries divergentes : aucune théorie de la sommation cohérente [Ly] ne peut associer autre chose que « $+\infty$ » à la série $1+1+1+\cdots$.

J'ai tenté de résumer dans cet article les principaux concepts qui permettent de manipuler « sans crainte » ces objets qui taquinent l'infini. J'ai également voulu être assez complet en allant jusqu'à relater les avancées récentes qui ont achevé, dans les années 1980 à Strasbourg, la théorie de la resommation (ou sommation de Borel-Laplace) de certaines séries divergentes entrevue par POINCARÉ à la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle et construite tout au long du XX$^{\text{e}}$ siècle. Je ne parlerai pas de la théorie de la résurgence d'ÉCALLE, de développement récent et finalement assez complexe, bien qu'elle s'inscrive dans la continuité de ces travaux. Bien sûr l'histoire de la sommation des séries divergentes n'est pas finie et, probablement, ne se terminera jamais d'une manière convenable. De même, il existe beaucoup de théories non équivalentes de la sommation des séries numériques, et cet exposé ne se veut en rien exhaustif.

Faire ici un exposé complet de la théorie de la resommation serait sûrement déplacé ; à l'inverse je pense ne pas avoir été trop ambitieux en voulant décrire ses idées essentielles, celles qui font « que ça marche ». L'exemple-type de cette théorie sera la série entière d'Euler

$$\textstyle\sum_{n\in\mathbb{N}} (n!)\, x^{n+1} \ ,$$

qui lui permit de donner une valeur à la série hypergéométrique de Wallis

$$-0! + 1! - 2! + 3! - 4! + \cdots \quad \simeq \quad 0,5963 \ .$$

Diable !

Ce texte pourra paraître plutôt dense ou technique en première lecture ; néanmoins les objets employés sont familiers ou d'existence connue : essentiellement les suites, puis les fonctions dérivables au sens complexe (holomorphes) qui interviendront uniquement à travers leur développement en série entière. Même si notre préoccupation initiale est de donner une valeur numérique à des sommes infinies de nombres, nous seront amenés à considérer des sommes infinies de fonctions, afin notament de rendre compte des objets provenant de la physique. Nous illustrerons en fin d'exposé en quoi les séries divergentes rencontrées en physique sont, souvent, englobées par la resommation. Peut-être l'exemple le plus frappant est-il celui des calculs obtenus en physique quantique. Après « renormalisation » on tombe sur une série divergente ; en additionnant ses premiers termes on obtient toutefois des valeurs en accord avec l'expérience jusqu'à la zêta-ième décimale ! La théorie de la resommation explique ce phénomène et légitime complètement ce mode de calcul. À ce titre il me semble qu'entrevoir, fort humblement, les rouages mathématiques du monde sensible vaut l'effort de lire les modestes pages qui viennent.

1. Premières convergences : somme de nombres

1.1. Convergence naturelle

Une *série numérique* est un autre moyen d'écrire une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sous la forme

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \ , \ \text{ ou plus simplement } \sum a_n \, .$$

Cet objet est purement formel (symbolique) dans le sens où on ne lui demande pas *a priori* de représenter un nombre. On peut additionner et multiplier de tels objets en *définissant*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n + \sum_{n\in\mathbb{N}} b_n \quad := \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) \ ,$$

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n\right) \quad := \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right) \, .$$

L'addition ainsi définie est naturelle, mais le produit se distingue du produit naturel pour les suites et rappelle celui des polynômes.

Bien sûr si l'ensemble des termes non nuls de la suite $a := (a_n)$ est fini, disons $a_n = 0$ pour $n \geq d$, alors on peut identifier l'objet $\sum a_n$ avec le nombre $\sum_{n<d} a_n$. (Si c'est le cas pour les suites a et b ci-dessus, la définition prise pour la somme et le produit de deux séries coïncide avec la somme et le produit des deux nombres, ce qui n'est ni malheureux ni un hasard.) Cette situation fournit l'exemple le plus simple de série numérique *convergente*, c'est-à-dire pour lequel l'écriture $\sum a_n$ a un sens en tant que nombre. Un pas dans la pensée mathématique a été franchi par la réalisation qu'additionner un nombre infini de termes non nuls peut conduire à un nombre bien défini, et qu'un certain nombre d'opérations naturelles (opérations algébriques par exemple) s'effectuent identiquement pour ces deux objets.

Un premier exemple non trivial est la série géométrique de raison $q \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. Pour $N \in \mathbb{N}$ fixé on sait en effet que

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1-q^{N+1}}{1-q}.$$

Si $|q| < 1$ alors $\lim_{N\to+\infty} q^{N+1} = 0$ donc la suite des *sommes partielles* $\left(\sum_{n\leq N} q^n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{1-q}$. On est ainsi amené à introduire un premier moyen, que nous qualifierons de naturel, de *sommer* une série.

Définition (sommation naturelle). On dira que la série numérique $\sum a_n$ est *convergente* lorsque la limite suivante, appelée la *somme* de la série, existe

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n := \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n \in \mathbb{C}.$$

On identifiera alors l'objet $\sum a_n$ à ce nombre complexe. Pour la durée de l'exposé on notera également $\mathscr{S}_{NAT}$ l'opération « prendre la somme d'une série convergente en ce sens ».

Dans l'exemple de la série géométrique, si $|q| \geq 1$ et $q \neq 1$ alors la suite $\left(q^{N+1}\right)_{N\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite, et donc la suite des sommes partielles ne peut converger. Cela signifie que la série $\sum q^n$ est *divergente*.

On peut montrer que ce procédé de sommation respecte les opérations algébriques. Cela signifie que l'ensemble $\mathscr{E}_{NAT}$ des séries numériques convergentes est une algèbre sur $\mathbb{C}$ (de dimension infinie) sur laquelle l'opérateur $\mathscr{S}_{NAT}$ est une forme linéaire qui respecte le produit.

Remarque. Clairement si $\sum a_n \in \mathscr{E}_{NAT}$ alors $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
En effet les suites $(S_N)_{N\in\mathbb{N}} := \left(\sum_{n\leq N} a_n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ et $(S_{N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ ayant même limite on peut écrire $\lim_{N\to+\infty} S_{N+1} - S_N = 0$. La réciproque est fausse, puisque la série harmonique $\sum \frac{1}{n+1}$ est divergente : en minorant les sommes partielles (aires de diagrammes en bâtons) par l'intégrale de $x \mapsto \frac{1}{x}$ on montre en effet l'inégalité $\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+1} \geq \ln(N+1)$.

1.2. Convergence de Cesàro

On en vient maintenant à justifier d'une première manière la formule

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = \frac{1}{2}.$$

Le membre de gauche est identifié à la série numérique $\sum (-1)^n$, et cette série n'est pas convergente au sens que nous avons défini au paragraphe précédent, puisque la suite

$((-1)^n)$ n'a pas de limite et *a fortiori* pas de limite nulle. Néanmoins cette série converge « en moyenne », c'est-à-dire :

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\right) = \lim_{N\to+\infty} \frac{2N+3+(-1)^N}{4N+4} = \frac{1}{2}\,.$$

Définition (sommation de Cesàro). On dit que la série $\sum a_n$ est *convergente au sens de Cesàro* si la limite suivante, appelée *somme de Cesàro* de la série, existe :

$$\mathscr{S}_{CES}\left(\sum a_n\right) := \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N+1}\sum_{n\le N}\left(\sum_{p\le n} a_p\right) \in \mathbb{C}\,.$$

On notera $\mathscr{E}_{CES}$ l'algèbre de ces séries ; l'opérateur $\mathscr{S}_{CES}$ respecte les opérations algébriques.

On va montrer que $\mathscr{E}_{NAT} \subset \mathscr{E}_{CES}$ et que $\mathscr{S}_{NAT}$ est la restriction de $\mathscr{S}_{CES}$ à $\mathscr{E}_{NAT}$. Plus clairement : si une série converge au sens classique alors elle converge aussi au sens de Cesàro et les deux procédés de sommation donnent le même résultat. Cette propriété est importante et souligne le fait que la sommation de Cesàro est une extension du procédé de sommation naturel pour une classe (strictement) plus large de séries. C'est toujours ce genre d'extension que nous allons rechercher.

Proposition. *Si la série $\sum a_n$ appartient à $\mathscr{E}_{NAT}$ alors elle appartient également à $\mathscr{E}_{CES}$ et $\mathscr{S}_{CES}\left(\sum a_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \mathscr{S}_{NAT}\left(\sum a_n\right)$.*

La preuve figure ici afin de nous convaincre que ce n'est pas un jeu d'écriture mais que c'est un « vrai » théorème. Bien que celui-ci ne soit pas de démonstration difficile la nécessité de recourir à des ε pour caractériser les suites tendant vers 0, dont on ne peut se passer, constitue un achoppement technique non trivial.

Démonstration. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles, c'est-à-dire $S_n := \sum_{p=0}^{n} a_p$, et ℓ la limite de (S_n), c'est-à-dire la somme naturelle $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ de la série. La suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \ell + \varepsilon_n$ tend vers 0 ; cela signifie qu'étant donné $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|\varepsilon_n| < \varepsilon$ pour tout $n > k$. Si on écrit $\hat{S}_N := \frac{1}{N+1}\sum_{n\le N} S_n = \ell + \frac{1}{N+1}\sum_{n\le N}\varepsilon_n$ on a, pour tout $N > k$,

$$\left|\hat{S}_N - \ell\right| \le \frac{1}{N+1}\sum_{n\le N}|\varepsilon_n| < \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{k}|\varepsilon_n| + \frac{N-k}{N+1}\varepsilon < \frac{1}{N+1}\left(\sum_{n=0}^{k}|\varepsilon_n|\right) + \varepsilon\,.$$

Bien sûr le premier terme du membre de droite de l'inégalité tend vers 0 quand N tend vers l'infini car k est fixé. Il existe donc un rang $\hat{k} \ge k$ tel que, pour tout $N > \hat{k}$, ce terme soit inférieur à ε. Mais cela entraîne que pour tout $N > \hat{k}$ la différence $\left|\hat{S}_N - \ell\right|$ est inférieure à 2ε. C'est bien ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque. On peut montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathscr{E}_{CES}$ alors $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}a_n = 0$, et la réciproque est fausse.

1.3. Un phénomène étrange (et inversement)

Que se passe-t-il si on permute les termes d'une somme finie ? Rien. On obtient toujours le même résultat, puisque l'addition est commutative. On pourrait alors croire, naïvement, que si on permute les termes d'une série infinie on ne change pas la somme. En fait il peut tout se passer ! On va ici explorer le résultat suivant, dû à RIEMANN.

Proposition. *Supposons qu'une série numérique à* ***termes réels*** $\sum a_n$ *converge mais que* $\sum |a_n|$ *diverge, et donnons-nous un réel quelconque* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Alors on peut permuter les termes de la série initiale de sorte que la nouvelle somme soit* λ*, c'est-à-dire : il existe une bijection* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *telle que* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \lambda$*. Il existe également des permutations telles que la nouvelle série soit divergente. En revanche si on ne permute qu'un nombre fini de termes d'une série numérique convergente alors on ne change pas la valeur de la somme.*

Notons d'abord que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$ satisfait aux hypothèses de cette proposition. On sait déjà que la série harmonique $\sum \frac{1}{n+1}$ diverge. Par ailleurs on peut montrer facilement par récurrence que les suites des sommes partielles de rang pairs (S_{2N}) et impairs (S_{2N+1}) sont adjacentes et donc convergent vers une même limite, la somme de la série ; on montrera plus loin que celle-ci vaut $\ln 2$. Ce raisonnement s'étend sans difficulté à un cas plus général, qui est connu sous la forme du critère d'Abel pour les séries alternées.

> *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite décroissante de réels positifs qui tend vers* 0*. Alors* $\sum (-1)^n a_n$ *converge.*

Le même type d'argument (une suite monotone bornée est convergente) permet de montrer le résultat suivant.

> *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de réels de signe constant. La série* $\sum a_n$ *converge si, et seulement si, la suite des sommes partielles est bornée.*

Ayant énoncé ces faits, plongeons-nous dans l'étrange phénomène de Riemann. Commençons par scinder en deux l'ensemble des indices : écrivons $\mathbb{N} = I^- \cup I^+$ où I^- correspond aux termes a_n strictement négatifs et I^+ aux termes positifs. Puisque

$$\begin{aligned} \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n &= \sum_{n\in I^+} a_n + \sum_{n\in I^-} a_n \\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| &= \sum_{n\in I^+} a_n - \sum_{n\in I^-} a_n \end{aligned}$$

la convergence de la première série et la divergence de la seconde entraînent que les séries $\sum_{n\in I^-} a_n$ et $\sum_{n\in I^+} a_n$ divergent. Plus précisément la suite $S_N^+ = \sum_{n\in I^+, n\leq N} a_n$ tend vers $+\infty$ et la suite $S_N^- = \sum_{n\in I^-, n\leq N} a_n$ tend vers $-\infty$. On applique alors la procédure suivante :

– on additionne les premiers termes de I^+ jusqu'à ce que la somme S_N^+ dépasse juste λ. Ceci est possible car $\lim \left(S_N^+\right) = +\infty$. On appelle N_1 le plus petit entier tel que $S_{N_1}^+ > \lambda$.
– on additionne les premiers termes de I^- (et on note $S_{N_2}^-$ la somme correspondante) jusqu'à ce que $S_{N_1}^+ + S_{N_2}^-$ soit juste en-dessous de λ. Ceci est possible car $\lim \left(S_N^-\right) = -\infty$.
– on recommence : on additionne les termes suivants de I^+ jusqu'à ce que la somme $S_{N_3}^+ + S_{N_2}^-$ dépasse λ à nouveau (ce qui implique $N_3 > N_1$). Et ainsi de suite.

Puisque $\lim (a_n) = 0$ on est sûr que la suite $\left(S_{N_{2n+1}}^+ + S_{N_{2n+2}}^-\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λ. Par construction ce procédé conduit à faire apparaître une et une seule fois chaque a_n au bout d'un moment, ce qui correspond bien à une permutation des termes de la série de départ ; la nouvelle somme vaut λ. Ce procédé s'adapte facilement pour construire des séries divergentes.

On peut montrer, en utilisant des techniques un peu plus sophistiquées (complétude de $\mathbb{R}$ et critère de Cauchy), que le phénomène de Riemann couvre tous les cas pathologiques réels. Les cas non pathologiques sont ceux couverts par le résultat suivant.

Théorème (convergence absolue). *Soit* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de nombres complexes. Si* $\sum |a_n|$ *converge alors* $\sum a_n$ *converge également et la somme de la série ne dépend pas de l'ordre des termes.*

On dit dans ce cas que la série $\sum a_n$ *converge absolument.*

2. Sommation des séries entières convergentes

Pour traiter de problèmes plus généraux, en particulier ceux découlant de la physique, on a besoin non seulement des opérations algébriques habituelles mais également de manipuler des fonctions et leurs dérivées. Aussi est-il naturel d'introduire la notion de séries de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ où, pour un point x donné, on considère la série numérique associée $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$. Cet article n'est pas le lieu pour un exposé général de la théorie des séries de fonctions, d'autant plus que nous n'allons considérer qu'un seul type de telles séries, celles qui représentent des « polynômes de degré infini ».

2.1. Sommation naturelle

Étant donné une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes on appelle *série entière* de l'indéterminée x l'objet formel

$$\sum a_n x^n .$$

L'ensemble de ces séries, noté $\mathbb{C}[[x]]$, hérite de la structure d'algèbre des séries numériques si on comprend x comme un nombre complexe. À ce titre cette écriture est ambiguë, mais on la comprendra par défaut comme une série formelle en l'indéterminée x, et non comme la série numérique sous-jacente. Ces objets ont été très étudiés (Euler, Abel, Cauchy entre autres).

Bien sûr quand seulement un nombre fini des termes a_n est non nul on identifie la série entière avec le polynôme correspondant. C'est l'exemple le plus simple de convergence des séries entières. D'autres formules pourtant, comme

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, semblent indiquer qu'il existe une notion de convergence pour une plus large classe de séries entières. Pour donner un sens précis à ce terme, nous avons d'abord besoin du théorème-définition suivant : un classique.

Théorème (rayon de convergence). *Étant donné* $\sum a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ *il existe un unique* $\rho \in [0, +\infty]$, *appelé son* rayon de convergence, *tel que :*

1. *Si* $x \in \mathbb{C}$ *satisfait* $|x| < \rho$ *alors la série numérique* $\sum a_n x^n$ *est convergente.*
2. *Si* $|x| > \rho$ *alors la série numérique* $\sum a_n x^n$ *est divergente.*

En outre si une des suites $\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *ou* $(|a_{n+1}| / |a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge dans* $[0, +\infty]$ *alors la limite est* $\frac{1}{\rho}$, *étant bien entendu que* $\frac{1}{0} = +\infty$ *et* $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Remarque. Si $|x| = \rho > 0$ dans le théorème précédent alors on ne peut rien dire : la série numérique correspondante peut converger simplement, absolument ou pas du tout.

Définition. On dira que la série entière $\sum a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ est *convergente* si son rayon de convergence ρ est strictement positif (éventuellement infini). On notera $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

la somme de cette série, qui définit une fonction sur le disque ouvert D_ρ de centre 0 et de rayon ρ (éventuellement sur $D_{+\infty} := \mathbb{C}$). Une telle fonction est qualifiée de *fonction analytique* au voisinage de 0. Le domaine D_ρ sera appelé le *disque de convergence* de la série.

Pour la durée de l'exposé on notera $\mathscr{S}_{NAT}$ l'opérateur de sommation ainsi défini.

D'après le premier paragraphe, la *série entière géométrique* $\sum x^n$ a un rayon de convergence égal à 1, et sa somme est la fonction

$$x \quad \mapsto \quad \frac{1}{1-x}\,.$$

Donnons aussi l'exemple d'une série *divergente* (rayon de convergence nul), la *série d'Euler*

$$H \quad := \quad \sum (n!)\, x^{n+1}\,.$$

2.2. Un petit détour au pays des fonctions d'une variable complexe

Une fonction d'une variable complexe $f\,:\,x \in \mathbb{C} \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ peut se comprendre comme une application réelle $(a,b) \mapsto (R(a,b), I(a,b))$ où $x = a+ib$ et $f(x) = R(a,b) + iI(a,b)$. La différence essentielle entre les deux points de vue est que $\mathbb{C}$ étant naturellement un corps on peut considérer des taux d'accroissement complexes. Aussi peut-on définir la dérivée au sens complexe de f en x_0 par la limite, si elle existe,

$$f'(x_0) \quad := \quad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Considérée comme une application réelle on dispose au contraire des quatre dérivées partielles $\frac{\partial R}{\partial a}$, $\frac{\partial R}{\partial b}$, $\frac{\partial I}{\partial a}$ et $\frac{\partial I}{\partial b}$, qui forment sa matrice jacobienne. Il est assez facile d'imaginer que peu d'applications différentiables $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ vont alors correspondre à des fonctions dérivables au sens complexe : la donnée de ces quatre nombres réels, *a priori* arbitraires, doit satisfaire une condition de compatibilité pour engendrer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre dérivé. Cette condition (dite de Cauchy-Riemann) caractérise les fonctions admissibles selon certaines propriétés assez restrictives de symétrie pour leur matrice jacobienne.

Une fonction f qui est dérivable au sens complexe sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ (un ouvert connexe non vide) sera dite *holomorphe* sur Ω. Ces fonctions sont d'une grande importance (mais qui passe souvent inaperçue) dans quasi tous les domaines scientifiques. Leur étude révèle de bien étranges et fascinantes propriétés de « rigidité » qui permettent de comprendre leur rareté et les distinguent nettement des fonctions dérivables au sens réel :
- une fonction holomorphe sur Ω est automatiquement infiniment dérivable sur Ω,
- une telle fonction est même analytique au voisinage de chaque point x_0 de Ω, et son rayon de convergence en x_0 est au moins égal à la distance entre x_0 et le bord de Ω,
- si $|f|$ admet un maximum local alors f est constante,
- si $\Omega = \mathbb{C}$ et que f est bornée alors f est constante,
- si f est nulle sur un petit disque alors f est nulle partout (principe du prolongement analytique).

On confond souvent la notion d'être holomorphe sur Ω avec celle d'être analytique sur Ω (vocable que nous retiendrons ici), puisqu'il se trouve que ces définitions sont équivalentes. La dernière propriété permet alors d'identifier terme à terme les développements en séries entières. Par exemple si pour tout x proche de 0 on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ alors

$a_n = b_n$ pour tout n, ce qui n'a *a priori* rien d'évident. Une série entière convergente se comporte donc bien comme un polynôme de degré infini !

Nous retrouverons dans la suite une fonction particulière, le « logarithme complexe », qui n'est pas analytique sur $\mathbb{C}$. Si on considère log comme la réciproque de exp alors la $2i\pi$-périodicité de cette dernière pose problème, comme nous allons l'illustrer. L'écriture

$$\log x \quad = \quad \ln |x| + i \arg x \quad , \ x \neq 0$$

permet d'identifier le problème : l'argument d'un nombre complexe x n'est bien défini que *modulo* 2π. Aussi la fonction logarithme complexe ne pourra pas être continue si on s'autorise à « tourner autour de 0 ». En effet, partant du point 1 avec argument 0, on peut suivre le cercle unité décrit par $x(t) := e^{2i\pi t}$ lorsque $t \in [0, 1]$. On aura donc $\log x(t) = 2i\pi t$. Mais pour $t = 0$ et $t = 1$ on n'obtient pas la même image de $1 = x(0) = x(1)$! On dit que la « fonction » logarithme est *multivaluée* : si on tourne $k \in \mathbb{Z}$ fois autour de 0 alors on ajoute $2ik\pi$ à la valeur du logarithme initial. Par convention, on suppose que le logarithme initial coïncide avec le logarithme népérien sur la demi-droite $\mathbb{R}_{>0}$.

Pour clore cette discussion, remarquons que les « fonctions » racines sont aussi multivaluées, d'après la relation $x^\alpha = \exp(\alpha \log x)$. Après avoir tourné autour de 0 un nombre impair de fois la valeur de $\sqrt{x}$ est multipliée par -1, alors qu'elle reste inchangée si on tourne un nombre pair de fois autour de l'origine. Notons enfin que rien n'empêche α d'être un nombre complexe quelconque...

2.3. Sommation de Mittag-Leffler

La remarque suivant le théorème du rayon de convergence mérite d'être complétée. En effet, un résultat d'Abel énonce que si pour un certain x_0 avec $|x_0| = \rho$ la série numérique $\sum a_n x_0^n$ est convergente alors la somme de la série entière se prolonge par continuité en x_0 par $\mathscr{S}_{NAT}\left(\sum a_n x_0^n\right)$. On montre ainsi que

$$\ln 2 \quad = \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

en se servant de la relation $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ valable pour $x \in]-1, 1[$ et obtenue en intégrant terme à terme la série géométrique. La réciproque est fausse comme le montrera l'exemple suivant la définition.

Définition (sommation de Mittag-Leffler). Soit $\sum a_n x^n$ une série entière convergente et supposons que sa somme est la restriction à D_ρ d'une fonction f analytique sur un domaine Ω. On dira alors que $\sum a_n x^n$ est *sommable au sens de Mittag-Leffler* sur Ω et on notera

$$\mathscr{S}_{ML}\left(\sum a_n x^n\right) \quad := \quad f$$

sa somme au sens de Mittag-Leffler.

Ainsi la série géométrique $\sum x^n$ est sommable au sens de Mittag-Leffler sur le domaine $\mathbb{C} \backslash \{1\}$ et dans ce cas

$$\mathscr{S}_{ML}\left(\sum x^n\right) \quad = \quad \frac{1}{1-x}.$$

On retrouve donc pour $x := -1$ l'égalité

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \quad = \quad \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2},$$

ce qui d'une certaine manière confirme Cesàro. En faisant $x := 2$ on obtient également la relation amorale suivante :

$$1+2+4+8+\cdots \quad = \quad \frac{1}{1-2} = -1\,.$$

Euler expliquait pourquoi on obtient un résultat négatif en n'additionnant que des termes positifs par l'argument osé suivant : le membre de gauche tend tellement vers $+\infty$ qu'il finit par « dépasser » cette valeur et revient par $-\infty$, mimant le comportement de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ quand on passe de 0_+ à 0_-.

Examinons maintenant le cas de la série entière $\sum x^{n!}$. Il n'y a que très peu de termes non nuls, ce qui pourrait suggérer que cette série est très convergente : finalement, on n'additionne « pas beaucoup » de termes puisque $a_n = 1$ si $n \in \mathbb{N}!$ et $a_n = 0$ sinon. Cette série est un exemple de *série lacunaire.* Ces séries sont, contrairement aux apparences, des séries très méchantes. En effet si $|x| < 1$ alors

$$\sum_{n \leq N} |x|^{n!} \quad \leq \quad \sum_{n \leq N!} |x|^{n} \leq \frac{1}{1-|x|}$$

montre l'inégalité $\rho \geq 1$. En revanche si $x = e^{2i\pi p/q}$ avec $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ alors $x^{n!} = 1$ dès que $n \geq q$, ce qui montre que $\sum e^{2i\pi(n!)p/q}$ est une série numérique divergente et donc que $\rho \leq 1$. De plus, comme l'ensemble des tels points x est dense dans le cercle unité, la somme de $\sum x^{n!}$ ne peut pas être la restriction d'une fonction analytique sur un domaine strictement plus grand que le disque unité ouvert !

Remarque. Cet exemple souligne par ailleurs que la série numérique $\sum a_n$ avec $a_n = 0$ si $n \notin \mathbb{N}!$ et $a_n = 1$ sinon, qui est sommable au sens de Cesàro de somme nulle, ne peut correspondre à la somme de Mittag-Leffler d'une série entière. En outre la série $\sum 2^n$, de somme

$$1+2+4+8+\cdots \quad = \quad -1$$

au sens de Mittag-Leffler, n'est pas sommable au sens de Cesàro. Ces deux notions portent donc sur des ensembles de séries distincts.
Néanmoins si une série numérique $\sum b_n \in \mathscr{E}_{CES}$ s'obtient comme $\mathscr{S}_{ML}\left(\sum a_n x^n\right)$ évaluée en un point x_0 alors $\mathscr{S}_{CES}\left(\sum b_n\right) = \mathscr{S}_{ML}\left(\sum a_n x^n\right)(x_0)$ (en fait on peut montrer aisément que x_0 est dans le pire des cas sur le bord du disque de convergence de $\sum a_n x^n$). Autrement dit, si une série est à la fois sommable au sens de Cesàro et au sens de Mittag-Leffler alors les deux sommes coïncident.

Il existe cependant des subtilités... En effet la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{1+x+x^2}$, analytique sur $\mathbb{C} \backslash \left\{e^{2i\pi/3}, -e^{2i\pi/3}\right\}$, est la somme de la série entière convergente

$$1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + x^9 - \cdots$$

D'une part on comprend ici la nécessité de recourir au champ complexe pour expliquer la divergence de cette série quand $|x| > 1$, car les points à problème sont invisibles depuis l'axe réel. D'autre part, si on n'y prend pas garde on a envie d'écrire $1-1+1-1+\cdots = f(1) = \frac{2}{3}$, ce qui pourrait montrer une incohérence avec la formule précédente. En fait, comme l'avait judicieusement remarqué Euler, ce qu'il est correct d'écrire dans ce cas est

$$1+0-1+1+0-1+1+0-\cdots \quad = \quad \frac{2}{3}$$

qui est d'ailleurs la somme de Cesàro de la série. Aussi permuter un nombre infini de termes n'est pas une opération anodine et rappelle l'étrange phénomène de la première partie. De toute façon, au sens où nous avons défini la notion de série numérique, ces objets ne sont pas égaux !

Pour que la sommation de Mittag-Leffler soit cohérente, il est naturel de poser la question suivante.

> *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière convergente sur le disque D_ρ. Peut-il exister deux fonctions analytiques dont les restrictions à D_ρ soit égales à la somme de la série et qui prennent des valeurs distinctes en un point (commun) de leurs domaines ?*

La réponse est en général négative. La proposition ci-dessous montre que, cependant, la réponse est (heureusement !) positive dans un grand nombre de cas.

Proposition. *Soient Ω_1 et Ω_2 deux domaines contenant le disque D_ρ. Soient f_1 et f_2 deux fonctions analytiques respectivement sur Ω_1 et Ω_2 dont les restrictions à D_ρ sont les mêmes. Alors, si $\Omega_1 \cap \Omega_2$ est connexe (d'un seul tenant), $f_1(z) = f_2(z)$ pour tout $z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$.*

Ce résultat n'est pas de démonstration ardue : c'est une conséquence directe du principe du prolongement analytique. Montrons que l'hypothèse de connexité exigée sur $\Omega_1 \cap \Omega_2$ n'est pas superflue en donnant un exemple où la réponse est négative.

Pour cela considérons la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

qui converge sur le disque unité ouvert et dont la somme coïncide avec $x \mapsto \log(1+x)$. Nous avons vu que la « fonction » logarithme est multivaluée. On peut par exemple choisir la fonction $f_1 : x \mapsto \log(1+x)$ sur le domaine rectangulaire $\Omega_1 :=]-1,3[\times]-i,i[$, cette fonction étant analytique car ici on ne tourne pas autour de -1. On aura alors

$$f_1(2) = 2 - 2 + \frac{8}{3} - 4 + \frac{32}{5} - \frac{32}{3} + \cdots \quad = \quad \ln 3\,.$$

Mais si on choisit $f_2 : x \mapsto \log(1+x)$ sur le domaine Ω_2 représenté à la figure 1 alors on obtiendra

$$f_2(2) = 2 - 2 + \frac{8}{3} - 4 + \frac{32}{5} - \frac{32}{3} + \cdots \quad = \quad \ln 3 + 2i\pi$$

(la fonction f_2 est aussi analytique car même si on « tourne autour » de -1 on ne peut jamais revenir à son point de départ en restant dans Ω_2). On voit ainsi comment la sommation de Mittag-Leffler permet d'associer à cette série numérique n'importe quelle valeur prise dans $\ln 3 + 2i\pi\mathbb{Z}$. La somme de Mittag-Leffler de $\sum \frac{2(-2)^n}{n+1}$ n'est donc pas bien définie.

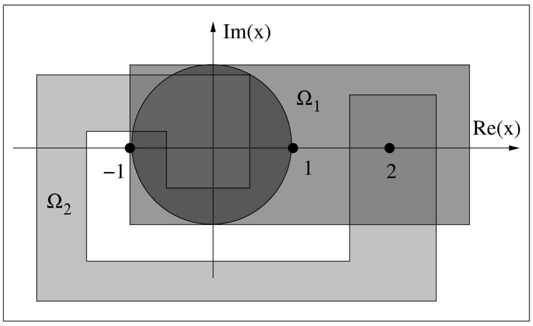

Fig. 1 – Deux domaines pour lesquels la fonction multivaluée $x \mapsto \log(1+x)$ ne donne pas le même prolongement.

Remarque. On pourrait penser que, la partie réelle ne changeant pas, le « bon » choix pour la somme de la série est $\ln 3$. Il n'est cependant pas possible de donner un sens général à cette remarque : en reprenant cet exemple pour la fonction multivaluée $x \mapsto \sqrt{1+x}$ on peut associer $\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$ à la série numérique correspondante. Que choisir ? Pire, si $\alpha > 0$ est irrationnel l'ensemble des choix pour $(1+2)^{1/\alpha}$ est dense dans le cercle de rayon $\sqrt[\alpha]{3}$!

2.4. Dérivation

On peut introduire la notion « purement symbolique » de *série entière dérivée* de $\sum a_n x^n$ comme étant :

$$\frac{d}{dx}\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \quad := \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)\, a_{n+1} x^n\,.$$

En particulier

$$\frac{d}{dx}\sum \frac{x^n}{n!} \quad = \quad \sum \frac{x^n}{n!}$$

redonne la relation différentielle fondamentale de l'exponentielle.

Quand la série entière est convergente de somme f alors sa série dérivée est aussi convergente. On a même un résultat plus fort : l'acte de dériver ne change pas le rayon de convergence. Et mieux la somme de la série dérivée est égale à la dérivée (au sens complexe) de la fonction f. Par conséquent f est une fonction holomorphe. Par induction ceci montre aussi que f est infiniment dérivable (au sens complexe) sur tout son disque de convergence.

Bien sûr (heureusement...) si tous les a_n sont réels alors la fonction réelle $x \in]-\rho,\rho[\mapsto f(x)$ est infiniment dérivable (au sens réel). Et on peut montrer que la série $\sum a_n x^n$ est égale à la *série de Taylor* de f définie par

$$\mathscr{T}(f) := \sum \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n\ .$$

Ceci permet de constater que toutes les fonctions réelles infiniment dérivables ne sont pas des restrictions de fonctions analytiques comme le montre l'exemple de la fonction

$$g\ :\ x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}} & \text{si } x \neq 0\ , \\ 0 & \text{sinon}\ . \end{cases}$$

Elle est infiniment dérivable en 0 et on montre par récurrence que $g^{(n)}(0) = 0$, c'est-à-dire $\mathscr{T}(g) = 0$. On dit que l'on a affaire à une *fonction plate* en 0. Pour autant $g(x) \neq 0$ si $x \neq 0$, ce qui montre que g est différente de $\mathscr{T}(g)$ et donc que g n'est pas la restriction d'une fonction analytique.

On dispose de la caractérisation suivante des restrictions à un intervalle réel de fonctions complexes holomorphes que l'on appellera aussi *fonctions analytiques (réelles)*. On la donne ici au voisinage de 0.

Théorème. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie sur un petit intervalle ouvert autour de 0 est la restriction d'une fonction complexe analytique au voisinage de 0 si, et seulement si :*

1. *La fonction f est infiniment dérivable en 0.*
2. *La série de Taylor de f est convergente.*
3. *La somme de $\mathscr{T}(f)$ coïncide avec f.*

Plus généralement un théorème de E. Borel et Ritt indique que toute série entière (divergente ou non) est la série de Taylor d'une fonction infiniment dérivable.

Théorème (Borel, Ritt). *L'opérateur $\mathscr{T} : C^{\infty}(\mathbb{R} \to \mathbb{C}) \to \mathbb{C}[[x]]$ est une application linéaire surjective.*

L'exemple de la fonction g donné ci-dessus montre que l'application linéaire $\mathscr{T}$ n'est pas un isomorphisme, ce qui est assez embêtant dans la pratique mais a conduit à l'élaboration de la théorie des développements asymptotiques et de la sommation au sens de Borel-Laplace des séries entières divergentes de type Gevrey, ce que nous allons aborder dans la partie suivante. Ce manque d'injectivité sous-entend en particulier qu'il n'est pas possible d'obtenir une sommation à la Mittag-Leffler pour les développements de Taylor de fonctions C^{∞} qui soit cohérente.

3. Sommation de certaines séries entières divergentes

Dans cette section nous allons essayer d'étendre le principe de la sommation de Mittag-Leffler aux séries entières de rayon de convergence nul. Pour une série ayant un rayon de convergence non nul, on dispose d'une information (une fonction analytique) que l'on propage en dehors du disque de convergence par prolongement analytique. Ici la principale difficulté provient de l'absence *a priori* d'information à propager. C'est pour cela que les séries auxquelles on pourra associer une somme sont celles qui contiennent, de façon cachée, de l'information. Par exemple une des méthodes employées par Euler pour établir l'égalité

$$-0! + 1! - 2! + 3! - 4! + \cdots \quad \simeq \quad 0,5963...$$

utilise une équation différentielle. La série d'Euler $H = \sum (n!)\, x^{n+1}$ est en effet l'unique solution sous forme de série entière de l'équation différentielle linéaire

$$x^2 \frac{dy}{dx} \quad = \quad y - x\,.$$

On peut l'intégrer par quadratures en utilisant la variation de la constante sur l'intervalle $]-\infty, 0[$. On obtient la fonction

$$y_0(x) \quad := \quad e^{-\frac{1}{x}} \int_0^x e^{\frac{1}{t}} \frac{\mathrm{d}t}{t}\,.$$

Cette fonction est l'unique solution qui se prolonge par continuité en 0_- par $y_0(0) := 0$. En fait on peut prolonger y_0 sur $\mathbb{R}$ en une fonction infiniment dérivable en posant, par exemple,

$$y_0 \, : \, x \in]0, +\infty[\mapsto e^{-\frac{1}{x}} \int_1^x e^{\frac{1}{t}} \frac{\mathrm{d}t}{t} \, .$$

On peut montrer par récurrence, en dérivant successivement l'équation différentielle et en faisant $x = 0$, que

$$\mathscr{T}(y_0) \quad = \quad H \, .$$

Il est ainsi compréhensible d'identifier $y_0(-1)$ avec la « somme »

$$-0! + 1! - 2! + 3! - \cdots \quad = \quad -e \int_{-1}^0 \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t} \mathrm{d}t \qquad \simeq 0,5963 \, .$$

Il faut cependant effectuer ces manipulations avec précaution ! Par exemple pour $x = 1$ (plus généralement pour $x > 0$) le choix de $y(x)$ est ambiguë. En effet n'importe quelle fonction

$$y_c \, : \, x \geq 0 \mapsto y_0(x) + ce^{-\frac{1}{x}} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

est aussi solution de l'équation différentielle sur $]0, +\infty[$ et prolonge $y_0 \, :]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ en une fonction infiniment dérivable de même série de Taylor. Ainsi $1! + 2! + 3! + \cdots$ pourrait être associée à n'importe quel réel (ou nombre complexe en prenant $c \in \mathbb{C}$). Plutôt gênant : il n'y a pas de choix « naturel » de la somme. Cette ambiguïté n'apparaît pas lorsque $x < 0$ car les autres solutions y_c de l'équation différentielle sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ ne se prolongent pas en 0 (elles tendent vers l'infini), et donc n'ont pas de série de Taylor en ce point. Nous allons tenter dans ce paragraphe de limiter l'ambiguïté en réduisant à deux le nombre de candidats à la valeur de cette somme.

3.1. Séries entières de classe Gevrey

Définition. On dit que la série entière $\sum a_n x^{n+1}$ est *de classe Gevrey* (sous-entendu, 1-Gevrey) si la série entière

$$\mathscr{B}\left(\sum a_n x^{n+1}\right) \quad := \quad \sum \frac{a_n}{n!} z^n \in \mathbb{C}[[z]]$$

est convergente.

On notera $\mathbb{C}[[x]]_1$ l'espace vectoriel de ces séries. L'opérateur $\mathscr{B}$ est linéaire (mais ne respecte pas la multiplication) et la série entière $\mathscr{B}\left(\sum a_n x^{n+1}\right)$ s'appelle la *transformée de Borel* de la série entière $\sum a_n x^{n+1}$. Si on part d'une série entière convergente alors le rayon de convergence de sa transformée est infini (en particulier une série convergente est de classe Gevrey).

Remarque. La série $\sum a_n x^{n+1}$ est de classe Gevrey si, et seulement si, il existe deux constantes positives A, $T > 0$ telles que

$$|a_n| \quad \leq \quad A \times T^n \times n! \, .$$

Le plus petit T possible s'appelle le *type* de la série et coïncide avec le rayon de convergence de sa transformée de Borel.

La série d'Euler H est de classe Gevrey (et son type est 1). En effet

$$\mathscr{B}(H) \quad = \quad \sum z^n$$

est convergente sur le disque D_1 et de somme

$$B_H \, : \, z \mapsto \frac{1}{1-z} \, .$$

Nous allons montrer comment l'ambiguïté dans le choix de la valeur de $1! + 2! + \cdots$, notée plus haut, découle de la présence d'un pôle en $z = 1$ pour cette fonction. Pour cela tentons de répondre à la question, proche du théorème de Borel et Ritt.

> *Comment construire une fonction f telle que $\mathscr{T}(f) = \sum a_n x^{n+1}$ à partir de la connaissance de $\mathscr{B}\left(\sum a_n x^{n+1}\right)$?*

Cette question, en toute généralité, est loin d'être évidente... mais possède une réponse pour les séries de classe Gevrey ! L'exemple suivant va illustrer cette construction dans un cas particulier. Considérons la *transformée de Laplace* dans la direction réelle négative de la fonction B_H.

$$\mathscr{L}(B_H) \, : \, x < 0 \quad \longmapsto \quad \int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-z/x}}{1-z} \mathrm{d}z \, .$$

Cette fonction est bien définie (c'est-à-dire que l'intégrale généralisée est convergente). Les changements de variables $u := 1 - z$ puis $t := x/u$ donnent

$$\mathscr{L}(B_H)(x) \quad = \quad e^{-1/x} \int_{1}^{+\infty} \frac{e^{u/x}}{u} \mathrm{d}u = e^{-1/x} \int_{0}^{x} \frac{e^{1/t}}{t} \mathrm{d}t = y_0(x) \, .$$

Ainsi on a « synthétisé » la solution y_0 de l'équation différentielle $x^2 y' = y - x$ qui se prolonge en 0_-, et on sait déjà que $\mathscr{T}(y_0) = H$. Il est possible de mimer cette construction dans un cadre assez général en considérant la transformée de Laplace de la transformée de Borel. Ce procédé est intéressant dans la mesure où il est « automatique » et en particulier ne nécessite pas la connaissance préalable d'une équation fonctionnelle satisfaite par la série.

Nous allons donner des définitions précises permettant de comprendre la relation

$$(\forall S \in \mathbb{C}[[x]]_1) \qquad \mathscr{T}(\mathscr{L}(\mathscr{B}(S))) = S$$

grâce à laquelle on peut associer une somme à une série Gevrey *a priori* divergente.

3.2. Développement asymptotique et somme de Borel-Laplace

Définition. Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $]0, r]$ pour un certain $r > 0$ et $S := \sum a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$. On dit que f admet S comme *développement asymptotique* en 0_+ si :

$$(\forall N \in \mathbb{N}) \; (\exists C_N > 0) \; (\forall 0 < x < r) \qquad \left| f(x) - \sum_{n \leq N} a_n x^n \right| < C_N \, x^{N+1} \, .$$

En particulier f doit se prolonger en 0 en une fonction dérivable à droite en ce point.

Par abus de notation on écrira $\mathscr{T}(f) := S$ le développement asymptotique de f en 0_+ pour la durée de l'exposé. Une notation plus standard est $DA(f)$, mais comme une fonction infiniment dérivable en 0 admet toujours sa série de Taylor $\mathscr{T}(f)$ comme développement asymptotique en 0, nous conserverons cette notation pour désigner le développement asymptotique de fonctions qui ne se prolongeraient pas à gauche de 0 en des fonctions infiniment dérivables.

On a vu précédemment que la transformée de Laplace d'une fonction B analytique sur $[0,+\infty[$

$$\mathscr{L}(B) : x \quad \mapsto \quad \int_0^{+\infty} B(z)\, e^{-z/x} \mathrm{d}z$$

a permis de trouver, pour la série d'Euler H, une fonction dont la série de Taylor en 0 est précisément H. Essayons maintenant d'indiquer pourquoi (et comment) cette construction s'applique plus généralement. On suppose, pour le moment, que l'intégrale généralisée précédente converge (l'opérateur $\mathscr{L}$ ainsi défini est linéaire). Cela est le cas si B « ne tend pas trop vite » vers l'infini. L'idée essentielle « qui fait que ça marche » repose sur la constatation calculatoire suivante. On montre aisément grâce à une intégration par parties que les fonctions $\mathscr{L}(z^n)$ sont liées par la relation de récurrence, valable pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{L}\left(z^{n+1}\right) \quad = \quad (n+1)\, x \mathscr{L}(z^n) \qquad \text{et} \qquad \mathscr{L}(1) = x\,,$$

de sorte que

$$\mathscr{L}(z^n) \quad = \quad n!\, x^{n+1}\,.$$

Écrivons $\mathscr{T}(B) = \sum b_n x^n$. Si on procède sans se poser de question on peut avoir envie d'écrire, en utilisant la linéarité de $\mathscr{T}$ et de $\mathscr{L}$,

$$\mathscr{T}(\mathscr{L}(B)) \quad = \quad \mathscr{L}(\mathscr{T}(B)) = \mathscr{L}\left(\sum b_n z^n\right) = \sum b_n \mathscr{L}(z^n) = \sum (b_n n!)\, x^{n+1}\,.$$

Par construction cette série est de classe Gevrey et sa transformée de Borel coïncide avec B. Bien sûr ce raisonnement n'est pas possible à mener en toute généralité. Le problème principal vient du fait qu'une fonction analytique B en 0 n'est pas forcément la restriction d'une fonction analytique jusqu'à l'infini. Par ailleurs, et c'est un euphémisme, inverser les signes « $\int$ » et « $\sum$ » nécessite quelques précautions ! Pour éviter le premier écueil on utilise une transformée de Laplace *incomplète*. Si B une fonction analytique sur le disque D_ρ on lui associe, pour un point base $z_0 \in D_\rho$ fixé, la fonction

$$\mathscr{L}(B, z_0) : x \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \quad \mapsto \quad \int_0^{z_0} B(z)\, e^{-z/x} \mathrm{d}z\,.$$

Notons qu'ici l'intégrale $\int_0^{z_0}$ s'effectue dans le champ complexe : on calcule en fait l'intégrale de chemin $\int_\gamma$ où γ est le segment reliant 0 à z_0 dans $\mathbb{C}$. L'avantage de l'emploi d'une transformée incomplète est que l'on intègre uniquement sur le disque de convergence de la transformée de Borel : on n'a pas besoin de prolonger B jusqu'à l'infini. Le développement asymptotique de la fonction $\mathscr{L}(B, z_0)$ en 0_+ va encore être la série de départ. Pour bien faire il faudrait établir des majorations afin de prouver convenablement que les conditions de la définition du développement asymptotique sont satisfaites. Ce n'est pas le propos ici, mais c'est possible.

Théorème (Borel, Ritt, Gevrey). *Soit $\sum a_n x^{n+1} \in \mathbb{C}[[x]]_1$ et soit B sa transformée de Borel. Pour tout $z_0 \neq 0$ dans le disque de convergence D_ρ de B :*
- *la transformée de Laplace $\mathscr{L}(B, z_0)$ considérée comme une fonction de la variable réelle x, admet un développement asymptotique en 0 et on a $\mathscr{T}(\mathscr{L}(B, z_0)) = \sum a_n x^{n+1}$,*

– *considérée comme une fonction de la variable complexe* x, $\mathscr{L}(B,z_0)$ *est analytique sur le secteur ouvert* V *d'ouverture* π

$$V\left(z_0,\frac{\pi}{2}\right) = \left\{x\in\mathbb{C}\,:\,0<|x|\ ,\ \ \arg(z_0/x)\in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\right\}.$$

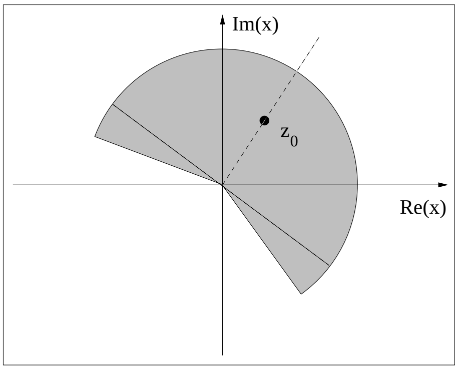

Fig. 2 – Un secteur d'analycité de la transformée de Laplace dans une direction qui n'est pas une direction de Stokes

Quand B se prolonge jusqu'à l'infini le long de la demi-droite $z_0\mathbb{R}_{\geq 0}$ de direction z_0 alors $\mathscr{L}(B,z_0)$ est analytique sur un secteur d'ouverture plus grande que π. Sinon on dit que z_0 correspond à une *direction de Stokes* de B. Moralement parlant, ces directions de Stokes correspondent aux « points à problème » de B. Ainsi dans l'exemple de la série d'Euler l'unique direction de Stokes est l'axe réel positif car $\frac{1}{1-z}$ a un pôle en 1.

Définition (sommation de Borel-Laplace). On dira que la série $\sum a_n x^{n+1}\in\mathbb{C}[[x]]_1$ est sommable au sens de Borel-Laplace si l'ensemble de ses directions de Stokes est fini (disons qu'il comporte d directions $z_1,\cdots,z_d$). On associe alors à cette série $d+1$ objets $(f_j,V_j)_{1\leq j\leq d+1}$ où V_j est un secteur d'ouverture plus grande que π, f_j est une fonction analytique sur V_j provenant de la transformée de Laplace complète, et deux secteurs consécutifs V_j et V_{j+1} s'intersectent le long de la direction z_j. On appellera *somme au sens de Borel-Laplace* de la série Gevrey $\sum a_n x^{n+1}$ la donnée de

$$\mathscr{S}_{BL}\left(\sum a_n x^{n+1}\right) := (f_j,V_j)_{1\leq j\leq d+1}.$$

Remarque. Si $\sum a_n x^{n+1}$ est au départ une série entière convergente de somme f alors f_j est la restriction de f à V_j. Dans ce cas il n'y a aucune direction de Stokes ($d=0$), et $\mathscr{S}_{BL}$ coïncide donc avec la somme naturelle de la série entière. Ouf ! Par ailleurs il existe des séries Gevrey qui ne sont pas sommables au sens de Borel, c'est le cas de la série $\sum((n!+1)!)\,x^{n!+1}$ dont la transformée de Borel $\sum z^{n!}$ ne se prolonge à l'infini le long d'aucune direction.

Plusieurs mathématiciens (Malgrange, Ramis, Sibuya) ont trouvé une caractérisation des familles $(f_j,V_j,)$ s'obtenant comme la somme de Borel-Laplace d'une série Gevrey. Et, surtout !, ils ont montré que la correspondance entre cette série et cette somme de Borel-Laplace est *univoque*. L'opérateur $\mathscr{S}_{BL}$ est donc un isomorphisme, c'est-à-dire un bon moyen de donner un sens à certaines séries divergentes, en particulier (la plupart de) celles qui viennent de la physique.

Pour conclure, revenons à notre série d'Euler H. Sa somme au sens de Borel-Laplace est donnée par

$$\begin{aligned} f_1 \,:\, x \in V_1 := V\left(i, \frac{\pi}{2}\right) \quad &\longmapsto \quad \mathscr{L}\left(i\infty, H\right)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-iz/x}}{1-iz} i\mathrm{d}z \\ f_2 \,:\, x \in V_2 := V\left(-i, \frac{\pi}{2}\right) \quad &\longmapsto \quad \mathscr{L}\left(-i\infty, H\right)(x) = \int_0^{-\infty} \frac{e^{-iz/x}}{1-iz} i\mathrm{d}z\,. \end{aligned}$$

On peut associer de manière essentiellement unique une valeur à $\sum (n!)\, x_0^{n+1}$ pour tout complexe x_0 non réel, en prenant la valeur $f_1(x_0)$ ou $f_2(x_0)$ selon que $x_0 \in V_1$ ou $x_0 \in V_2$. On s'aperçoit de même que si $x_0 \leq 0$ alors $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, et en particulier

$$-0! + 1! - 2! + 3! + \cdots \quad = \quad f_1(-1) = f_2(-1) \simeq 0,5963\,.$$

Par contre si $x_0 > 0$ (dans la direction de Stokes) il y a potentiellement deux choix pour la somme de Borel-Laplace de H. Il n'y en a pas, du point de vue développé ici, un qui soit meilleur que l'autre. Aussi il n'est pas possible de décider entre

$$0! + 1! + 2! + 3! + \cdots \quad \simeq \quad \begin{cases} 0,697176 + 1,1557i \\ \text{ou} \\ 0,697176 - 1,1557i \end{cases}.$$

Le fait que plusieurs sommes peuvent être associées à cette série est à rapprocher des exemples de la fin du paragraphe 2, provenant de fonctions multivaluées. On remarquera aussi que ces sommes associées sont des nombres complexes non-réels ! La question de savoir s'il est possible d'avoir un procédé de resommation réelle le long des directions de Stokes réelles est encore à l'heure actuelle une question ouverte, et finalement assez ardue, dans le cas général d'une série solution d'une équation différentielle non-linéaire. Pour les équations linéaires, qui est le cas qui nous intéresse ici, les derniers développements de la théorie de la résurgence d'Écalle permettent d'être encore plus précis et de supprimer toute ambiguïté, grâce à un procédé de moyennisation cohérent qui donne finalement pour valeur à cette série

$$0! + 1! + 2! + 3! + \cdots \quad \simeq \quad 0,697176.$$

4. Applications et exemples

4.1. Convergence au sens des astronomes

Poincaré, à qui on doit la définition de développement asymptotique, a eu cette parole formidable [P] :

> « *Il y a entre les géomètres et les astronomes une sorte de malentendu au sujet de la signification du mot convergence. Les géomètres préoccupés de la parfaite rigueur et souvent trop indifférents à la longueur de calculs inextricables dont ils conçoivent la possibilité, sans songer à les entreprendre effectivement, disent qu'une série est convergente quand la somme des termes tend vers une limite déterminée, quand même les premiers termes diminueraient très lentement. Les astronomes, au contraire, ont coutume de dire qu'une série converge quand les 20 premiers termes, par exemple, diminuent très rapidement, quand même les termes suivants devraient croître indéfiniment.* »

Une bonne illustration de ce propos est donnée par les séries suivantes :

$$C := \sum \frac{(-100)^n}{n!} \qquad\qquad D := \sum \frac{n!}{(-100)^n}\,.$$

La première est convergente au sens des géomètres, de somme $e^{-100} \simeq 3,72 \times 10^{-44}$, alors que la seconde est divergente (mais convergente au sens des astronomes). Pour s'en convaincre dressons le tableau des premières valeurs des sommes partielles :

N	C_N	N	D_N
0	1	0	1
1	-99	1	$0,99$
2	4901	2	$0,9902$
3	$-161765,67...$	3	$0,990194$
4	$4004901,...$	4	$0,99019424$
10	$2,50 \times 10^{13}$	10	$0,99019423...$
100	$5,34 \times 10^{41}$	100	$0,99019423...$
200	$4,22 \times 10^{24}$	200	$0,99019423...$
260	$723,77...$	260	$0,99047094...$
270	$0,040489...$	270	$5,8530529...$
300	$8,153 \times 10^{-16}$	300	$2,29 \times 10^{14}$

Dans les deux cas il faut aller au-delà du 250-ième terme pour que le calcul confirme les arguments mathématiques ! On comprend bien que dans cette situation les astronomes additionnent sans scrupule les premiers termes de D et justifient leur acte par la stabilité du résultat, tout en appelant divergente la série C. En fait ils procèdent à la « sommation au meilleur terme » de D : additionner les premiers termes tant qu'ils sont décroissants, et s'arrêter quand le terme ajouté se remet à croître. Ici par exemple on peut calculer que les 100 premiers termes décroissent et qu'ensuite le terme général se met à croître ; le minimum de $\frac{n!}{100^n}$ est en effet donné par

$$\frac{100!}{100^{100}} \quad\simeq\quad 9,3326 \times 10^{-43}\,.$$

Par ailleurs si on considère la resommée de Borel-Laplace de la série d'Euler, on peut estimer grâce à un logiciel de calcul numérique

$$D \quad=\quad -100 \times y_0\,(-0,01) = -100 \int_0^{-0,01} \frac{e^{100+1/t}}{t} \mathrm{d}t \simeq 0,990194\,,$$

qui donne, en apparence au moins, la même valeur que la sommation au meilleur terme. Ce qui est assez troublant mais n'est pas une coïncidence. Une étude plus fine du comportement des séries divergentes de classe Gevrey $\sum a_n x^{n+1}$ alternées permet d'anticiper le nombre N de termes à prendre en compte et l'erreur commise entre la resommée et la somme au meilleur terme, en fonction du type de la série, c'est-à-dire des meilleures constantes A, $T > 0$ telles que

$$|a_n| \quad\leq\quad A \times T^n \times n!$$

(T est le rayon de convergence de la transformée de Borel). On minore ainsi ce nombre par

$$N \quad\geq\quad E\left(\frac{1}{|x|\,T}\right) \qquad\qquad \text{(où } E \text{ est la partie entière)}$$

si bien que dans notre cas $N = \frac{1}{0.01\times 1} = 100$. Si $x \mapsto \mathscr{L}(x)$ dénote une somme de Borel-Laplace de la série $\sum a_n x^{n+1}$ on peut montrer que

$$\left|\sum_{n\leq N} a_n x^{n+1} - \mathscr{L}(x)\right| \quad \leq \quad AT^{N+1}|x|^{N+1}(N+1)!\,.$$

Pour l'équation d'Euler on déduit que l'erreur commise entre D_{100} et $-100y_0(-0,01)$ est de l'ordre du dernier terme ajouté, c'est-à-dire un accord à 42 décimales pour seulement 100 termes sommés !

Ces méthodes empiriques de sommations se sont présentées aux astronomes qui calculaient des éphémérides, c'est-à-dire déterminaient les trajectoires d'objets célestes de notre système solaire.

4.2. Les franges d'Airy

L'optique est également un domaine où les séries divergentes ont apporté une contribution décisive. L'exemple classique est le calcul de l'intensité lumineuse présentée par un arc-en-ciel, plus précisément la position des franges d'interférences qui correspondent aux points où l'intensité s'annule. Cette dernière est le carré d'une solution de l'équation d'Airy

$$y''(x) \quad = \quad xy(x)$$

qui possède la forme explicite, à un facteur physique multiplicatif près,

$$Ai\ : \quad x \mapsto \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\cos\left(t^3/3 + xt\right)\mathrm{d}t\,.$$

Les zéros réels de cette fonction, dite d'Airy, sont situés sur $]-\infty, 0[$. On peut développer Ai en 0 comme série entière de rayon de convergence infini :

$$Ai(x) \quad = \quad Ai(0) \times \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(3n-2)\times(3n-5)\times\cdots\times 4\times 1}{(3n)!}x^{3n}\,.$$

Malheureusement les sommes partielles convergent très lentement, et AIRY n'a pu qu'avec difficulté repérer le premier zéro de la fonction Ai. C'est STOKES qui, grâce à un développement sous forme de série divergente en écrivant l'équation différentielle au voisinage de $-\infty$, a pu déterminer avec une précision de quatre décimales les franges suivantes en sommant uniquement les premiers termes de la série

$$\hat{Ai}(x) \quad = \quad R\left(-x^{-3/2}\right)\cos\left(-\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) + S\left(-x^{-3/2}\right)\sin\left(-\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

où

$$R(t) := \frac{t^{1/6}}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p a_{2p}t^{2p}\right) \quad , \quad S(t) := \frac{t^{1/6}}{\sqrt{\pi}}\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p a_{2p-1}t^{2p-1}$$

et

$$a_n \quad := \quad \left(\frac{3}{4}\right)^n\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{6}\right)\Gamma\left(n+\frac{5}{6}\right)}{2\pi\Gamma(n+1)} \sim_{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n\frac{(n-1)!}{2\pi}\,.$$

Cette série divergente alternée est sommable au sens de Borel-Laplace, et la sommation au plus petit terme s'accorde avec l'expérience physique. Pourtant, manipuler des séries divergentes, c'est Mal...

4.3. Des miettes de renormalisation

Pour terminer cet exposé et tenter d'en donner une conclusion, parlons rapidement d'applications récentes de la sommation de Borel-Laplace en électrodynamique quantique, champ théorique et expérimental très actif de la physique des particules. En pratique les propriétés recherchées d'une particule (moment magnétique, charge, ...) ne peuvent être calculées que par approximations successives, en les développant par rapport à un petit paramètre x qui caractérise l'interaction, autrement dit sous la forme de séries $\sum a_n x^n$. Se posent alors deux problèmes : d'une part chaque coefficient a_n est excessivement difficile à calculer, peut éventuellement être infini, et d'autre part la série obtenue va elle-même être divergente en général.

Pour déterminer a_n on doit prendre en compte une combinatoire très complexe d'interactions élémentaires, décrite sous forme de graphes par les diagrammes de Feynman associés. Le coefficient a_n se calcule en considérant les sous-graphes comportant n sommets (en fait en intégrant le long des chemins décrits par ces sous-graphes) et sa valeur peut-être infinie (notament en présence d'un cycle dans le graphe). La méthode physique de renormalisation consiste à soustraire les bonnes quantités pour remplacer a_n par un coefficient b_n fini. Longtemps cette procédure a été qualifiée de « cuisine » et on commence juste à comprendre sur un plan théorique en quoi ces opérations sont effectivement pertinentes. Cependant on ne sait aujourd'hui calculer que les trois ou quatre premiers termes.

La série $\sum b_n x^n$ obtenue après « renormalisation » de la série $\sum a_n x^n$ peut être divergente, et l'on sait démontrer qu'en général elle l'est. Mais on sait aussi montrer que sa divergence est celle d'une série Gevrey alternée, et qu'il y a beaucoup de chance qu'elle soit sommable au sens de Borel-Laplace. Aussi la sommation au meilleur terme, seul outil à la disposition des physiciens actuels, se voit-elle justifiée par la théorie de la resommation. Par exemple, dans le cas du moment magnétique de l'électron, l'écart entre la valeur expérimentale mesurée et la valeur obtenue en ajoutant les trois premiers termes de la série est de l'ordre de 10^{-9} ! Si, comme on le soupçonne, le type Gevrey de la série est standard alors on peut espérer que la sommation au meilleur terme soit obtenue en additionnant les 100 premiers termes, donnant une précision théorique de l'ordre de e^{-100}. Il faut pourtant tempérer cette conclusion puisque, aux échelles considérées, d'autres interactions négligées dans le modèle physique interviennent et sûrement le calcul numérique que l'on pourrait ainsi mener (s'il était faisable en temps raisonnable...) n'aurait pas une pertinence physique jusqu'à cet ordre de précision.

Néanmoins il est essentiel d'avoir compris, au niveau théorique, que des séries divergentes peuvent contenir une information physique certaine, et pourquoi. Malgré la méfiance éprouvée par les mathématiciens-censeurs des siècles passés envers ces objets maléfiques, j'espère vous avoir convaincu que ces séries ne méritent pas la mise à l'Index, malheureusement toujours en vigueur quand on les enseigne. Je dis cela sans amertume, ces objets ne pouvant être convenablement manipulés que par un public averti. Je dis plutôt cela avec malice !

Bibliographie

[L] J. LEFORT (1983), *Les séries divergentes chez Euler*, L'Ouvert, **31**.

[Ly] Y. LYUBICH (2008), *Axiomatic theory of divergent series and cohomological equations*, Fudamenta Mathematicae, **198**.

[M] B. Malgrange (1995), *Sommation des séries divergentes*, Expositiones Mathematicae, **12**.

[P] H. Poincaré (1892), Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, *Gauthier-Villars.*

[R] J.-P. Ramis (2006), *Les séries divergentes*, Pour la Science, **350**, éd. Belin.

Loïc Teyssier
Institut de Recherche Mathématique Avancée
7, Rue René Descartes
67000 Strasbourg
teyssier@math.u-strasbg.fr