Épreuves orales des concours d'entrée aux grandes écoles

Les énoncés marqués d'une étoile seront corrigés ultérieurement

Le comité de rédaction remercie Walter Appel, Marc Becker, Laurent Bonavero, Olivier Bouverot, Denis Choimet, Michel Cognet, Yves Duval, Yves Dutrieux, Jean-Denis Eiden, Alexis Fagebaume, Serge Francinou, Philippe Gallic, Cyril Germain, Denis Jourdan, Thomas Lafforgue, Sébastien Laigret, Roger Mansuy, François Moulin, Renaud Palisse, Cécile Stérin, Philippe Patte, Brice Touzillier, pour leurs contributions à cette liste d'exercices.

Les lecteurs désirant faire parvenir des solutions d'exercices à la rédaction sont priés de le faire avant le 22 février 2022, de préférence par courrier électronique en pdf et si possible en Tex à l'adresse : *exercices@rms-math.com* .

Écoles Normales Supérieures - MP

2. [L] * Soit φ l'indicatrice d'Euler.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) \geqslant \dfrac{\sqrt{n}}{2}$.

b) Existe-t-il $C \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n) \geqslant Cn$?

3. [L] * Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $y^3 = x^2 + 1$.

4. [L] * Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\sigma(n) = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant d < n \\ d \mid n}} d$.

Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ définie par : $x_0 \in \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \sigma(x_n)$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que la suite $(x_0, \ldots, x_N)$ soit strictement croissante.

5. [PLSR] * ***a)*** Soient x un réel et Q un entier strictement positif. Montrer qu'il existe des entiers p, q tels que $1 \leqslant q \leqslant Q$ et $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| \leqslant \dfrac{1}{qQ}$.

b) Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, de degré $n \geqslant 2$. Soit x une racine de P. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que, pour tout rationnel $r \in \mathbb{Q}$, d'écriture $r = \dfrac{p}{q}$ sous forme irréductible, on ait $\left|x - \dfrac{p}{q}\right| \geqslant \dfrac{c}{q^n}$.

7. [P] ★ Soit $n \geqslant 2$ un entier. On note $\bar{\ell}$ la réduction modulo n de l'entier ℓ. Si f est une fonction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$, on note $\mathrm{Supp}(f) = \{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\ ;\ f(x) \neq 0\}$. Soit f une fonction de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{C}$ non identiquement nulle. On pose, pour $k \in \mathbb{Z}$, $\hat{f}(\bar{k}) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} f(\bar{j}) e^{-2i\pi kj/n}$.

Montrer que $|\mathrm{Supp}(f)| \times |\mathrm{Supp}(\hat{f})| \geqslant n$.

8. [PLSR] ★ Soient $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et M un idéal de A. On dit que M est maximal si M est différent de A et si tout idéal de A contenant M est égal à M ou à A.
a) Soit M un idéal de A. Montrer que M est maximal si et seulement si, pour tout $a \notin M$, il existe $x \in M$ et $u \in A$ tels que $1 = x + u \times a$.
b) Soient $(B, +, \times)$ un anneau commutatif et $f : A \to B$ un morphisme surjectif de A sur B. Montrer que si M est un idéal maximal de A alors, soit $f(M) = B$, soit $f(M)$ est un idéal maximal de B.
c) Soit $\mathbb{K}$ un corps. Déterminer les idéaux maximaux de $\mathbb{K}[X]$.
d) Soit M un idéal maximal de $\mathbb{Z}[X]$ tel que $M \cap \mathbb{Z} \neq \{0\}$.
i) Montrer qu'il existe p premier tel que $M \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$.
ii) Montrer qu'il existe des éléments irréductibles P et Q de $\mathbb{Z}[X]$ tels que $M = (P) + (Q)$.

9. [PLSR] ★ Un anneau intègre A est dit euclidien s'il existe une fonction $N : A \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout $(a, b) \in A \times (A \setminus \{0\})$, il existe un couple $(q, r) \in A^2$ tel que $a = bq + r$ et si $r \neq 0$ alors $N(r) < N(b)$.
a) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$, défini comme $\{a + ib,\ (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$, est euclidien.
b) Énoncer un théorème d'existence et d'unicité de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$.
c) Montrer que pour tout réel $\varepsilon > 0$, le cardinal de $\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 :\ a^2 + b^2 = R^2\}$ est dominé par R^ε quand R tend vers $+\infty$.

11. [L] ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la somme μ_n des racines primitives n-ièmes de l'unité.

12. ★ [L] Un nombre complexe est un entier algébrique s'il annule un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$.
a) Montrer que l'ensemble des entiers algébriques est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
b) On appelle unité tout inversible de l'anneau des entiers algébriques. Montrer que, si q est une racine n-ième primitive de 1 et $m \geqslant 2$ un entier premier avec n, alors $\dfrac{q^m - 1}{q - 1}$ est une unité.
c) Montrer qu'un nombre complexe est une unité si et seulement s'il annule un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire tel que $P(0) = \pm 1$.

17. [PLSR] ★ Soient $f_1, \dots, f_k$ des formes affines sur $\mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
(i) le système $f_i(x) \geqslant 0$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$ n'admet aucune solution ;
(ii) il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}^+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f_i = -1$.

18. ★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $X \in \mathbb{R}^n$, on note $|X| = (|x_i|)_{1\leqslant i\leqslant n}$. On considère la fonction $\delta_A : X \in \mathbb{R}^n \mapsto |AX|$. On suppose que chaque ligne de A contient exactement un terme égal à 1, exactement un terme égal à -1, tous les autres termes étant nuls. On suppose enfin qu'il existe une puissance de A dont tous les coefficients sont pairs.
Montrer que pour tout $X \in \mathbb{Z}^n$, la suite $(\delta_A^k(X))_{k\in\mathbb{N}}$ est stationnaire de valeur ultime 0.

19. [PLSR] ★ On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.
a) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que A est dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ si et seulement si $\det A = \pm 1$.
b) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $(a, b)^T$ soit la première colonne d'une matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.
c) Soient $a_1, \dots a_n$ des entiers relatifs premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que $(a_1, \dots, a_n)^T$ est la première colonne d'une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.
d) Soient $U, V \in \mathbb{Z}^n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur U et V pour qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ dont la première colonne soit U et la deuxième V.

21. [L] ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ un corps. Déterminer les automorphismes de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

28. [L] ★ Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ trigonalisable sur $\mathbb{R}$.
a) Montrer l'existence de $S(A) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty} A\,(t^2 I_n + A^2)^{-1}\,\mathrm{d}t$.
b) Déterminer les valeurs propres de $S(A)$.
c) Montrer que $S(A)$ est diagonalisable.

32. [P] ★ Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il y a équivalence entre les deux conditions suivantes :
- tout sous-espace de E stable par u a un supplémentaire stable par u ;
- le polynôme minimal de u est produit de facteurs irréductibles unitaires distincts.

33. [P] ★ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Donner une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ simple semblable à M sur $\mathbb{R}$.

37. [P] ★ Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $[A, B] = AB - BA$ soit de rang majoré par 1. Montrer que A et B sont cotrigonalisables.

38. [PLSR] ★ Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont le seul élément nilpotent est la matrice nulle. Montrer que les éléments de $\mathcal{A}$ sont simultanément diagonalisables.

42. [P] ★ Soit $A \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs.
On suppose que $\|A\| = \sup\limits_{\|v\|\leqslant 1} \|Av\| = 1$. Montrer qu'il existe v unitaire à coefficients strictement positifs tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^d, A^n x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \langle x, v\rangle v$.

46. [L] ★ Soit S une involution de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que, pour tous A, B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S(AB) = S(B)\,S(A)$ et $S^2 = \mathrm{id}$. On dit qu'une forme bilinéaire b sur $\mathbb{R}^n$ est non dégénérée si, pour tout x non nul de $\mathbb{R}^n$, l'application $y \mapsto b(x, y)$ est non nulle.

Montrer qu'il existe une forme bilinéaire non dégénérée b sur $\mathbb{R}^n$ symétrique ou antisymétrique telle que, pour tous $X, Y \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $b\,(AX, Y) = b\,(X, S(A)Y)$.

48. [PLSR] ★ Soient n et m dans $\mathbb{N}^*$, $u_1, \ldots, u_m$ des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$, $c_1, \ldots, c_m$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ et $M_i = u_i\, u_i^\top$. On suppose que $\displaystyle\sum_{i=1}^m c_i\, M_i = I_n$.

a) Soient $\theta_1, \ldots, \theta_m \in \mathbb{R}$. On pose $X = \displaystyle\sum_{i=1}^m c_i \theta_i u_i$.

i) Montrer que $\|X\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^m c_i \langle X, u_i\rangle^2$.

ii) Montrer que $\|X\|^2 \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^m c_i \theta_i^2$.

b) Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(A) \leqslant \displaystyle\prod_{i=1}^m \|Au_i\|^{c_i}$.

c) Même chose avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

d) Soit $M \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ telle que $\det(M)^{1/n} = \dfrac{1}{n}\,\mathrm{tr}(A^T A\, M)$.

51. [SR] ★ ***a)*** Pour A, B, C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det(A)\det(C), \qquad \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A-B)\det(A+B), \qquad \begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix} \geqslant 0.$$

Le but de l'exercice est de démontrer que, pour A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a $AB = 0$ si et seulement si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\det(I_n - xA - yB) = \det(I_n - xA)\det(I_n - yB)$.

b) Montrer le sens direct.

c) Soient $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\det(M - tN) = 0$. Montrer que $\mathrm{Ker}(M) \cap \mathrm{Ker}(N) \neq \{0\}$.

d) En déduire que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tels que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\det(I_n - xA - yB) = \det(I_n - xA)\det(I_n - yB)$, alors il existe un vecteur propre de A appartenant au noyau de B.

e) Conclure.

55. [P] ★ Pour A et B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on note $A \geqslant B$ si et seulement si $A - B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

a) Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

b) Soit $(M_k)_{k\geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ croissante et majorée pour l'ordre précédent. Montrer que $(M_k)_{k\geqslant 1}$ converge.

58. [P] ★ Soit M une partie de $\mathbb{R}^{+*}$ à plus de deux éléments, stable par moyenne géométrique. Montrer que l'ensemble des irrationnels de M est dense dans $[\inf M, \sup M]$.

59. [P] ★ On dit qu'une fonction continue $f : [0,1] \to [0,1]$ est ouverte si l'image d'un ouvert de $[0,1]$ est un ouvert de $[0,1]$. Caractériser ces fonctions.

60. [P] ★ Soit K un compact non vide d'un espace vectoriel normé E. Soit $f : K \to K$ telle que $\forall (x, y) \in K^2,\ d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y)$. Montrer que f est une isométrie.

64. [PLSR] ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{C}^n$ de sa norme euclidienne standard, dont on note S la sphère unité. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'ensemble $\left\{\overline{X}^T AX,\ X \in S\right\}$ est une partie convexe de $\mathbb{C}$.

65. [PLSR] ★ Une partie A d'un espace normé est dite séparable si elle contient une partie dense au plus dénombrable.
a) Montrer qu'un espace normé de dimension finie est séparable.
b) Montrer que, si A est une partie séparable d'un espace normé et B une partie de A, B est séparable.
c) Soient A une partie séparable d'un espace normé, $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de A dont la réunion est A. Montrer que l'on peut extraire de $(\Omega_i)_{i\in I}$ un recouvrement au plus dénombrable de A.
d) Étudier la réciproque de la question précédente.

66. [P] ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des points de continuité de l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ qui à une matrice associe son polynôme minimal.

69. [SR] ★ On note $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{D}^*$ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{D}$.
a) Montrer que $\mathcal{D}$ n'est pas nul.
b) On note $\mathcal{D}'$ l'ensemble des formes linéaires T sur $\mathcal{D}$ telles que, pour tout compact K de $\mathbb{R}$, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C \in \mathbb{R}^+$ tels que, pour toute φ de $\mathcal{D}$ à support contenu dans K, on ait

$$|T(\varphi)| \leqslant C \sum_{j=0}^{p} \|\varphi^{(j)}\|_\infty.$$

Montrer que $\mathcal{D}'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}^*$.
c) Un élément T de $\mathcal{D}'$ est d'ordre fini s'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $C \in \mathbb{R}^+$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}, \qquad |T(\varphi)| \leqslant C \sum_{j=0}^{p} \|\varphi^{(j)}\|_\infty.$$

On appelle alors ordre de T le plus petit entier $p \in \mathbb{N}$ pour lequel cette condition est réalisée. Si $x_0 \in \mathbb{R}$, soit δ_{x_0} la forme linéaire d'évaluation en x_0 sur $\mathcal{D}$. Montrer que δ_{x_0} est un élément d'ordre fini de $\mathcal{D}'$; quel est son ordre ?
d) Soit e l'identité de $\mathbb{R}$. Si $T \in \mathcal{D}'$, montrer que l'on définit un élément $S := eT$ de $\mathcal{D}'$ en posant, pour φ dans $\mathcal{D}$, $S(\varphi) = T(e\varphi)$.
e) Soit $T \in \mathcal{D}$. Montrer que $eT = 0$ si et seulement si T est colinéaire à δ_0.

73. [P] ★ Pour $n \in \mathbb{N}$, on note c_n le nombre de racines réelles distinctes du polynôme $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k X^{2k+1}}{(2k+1)!}\cdot$ Montrer que $c_n \sim \dfrac{4n}{e\pi}\cdot$

77. [L] ★ ***a)*** Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables telles que :
$f(0)=0$ et $\forall x,y\in\mathbb{R},\quad f(x+y)\leqslant xy+f(x)+f(y)$.
b) Existe-t-il des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues mais non dérivables telles que :
$f(0)=0$ et $\forall x,y\in\mathbb{R},\quad f(x+y)\leqslant xy+f(x)+f(y)$?

78. [P] ★ Trouver les fonctions $f\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ telles que :
$\forall x,y\in\mathbb{R}^+,\ (f(x)-f(y))\left(f\left(\sqrt{xy}\right)-f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\right)=0.$

90. [PLSR] ★ ***a)*** Montrer qu'il existe une constante absolue C_1 telle que, pour tout réel $\lambda>0$, pour toute fonction φ de classe C^1 de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que φ' soit monotone et vérifie $|\varphi'|\geqslant\lambda$, on ait $\left|\displaystyle\int_a^b e^{i\varphi}\right|\leqslant\dfrac{C_1}{\lambda}$.
b) Soit $k\geqslant 2$ un entier. Montrer qu'il existe une constante absolue C_k telle que, pour tout réel $\lambda>0$, pour toute fonction φ de classe C^k de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $|\varphi^{(k)}|\geqslant\lambda$, on ait $\left|\displaystyle\int_a^b e^{i\varphi}\right|\leqslant\dfrac{C_k}{\sqrt[k]{\lambda}}$.

93. [L] ★ ***a)*** Déterminer une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}\in{\mathbb{R}^{+*}}^{\mathbb{N}}$ telle que, si $\alpha\in\mathbb{R}$, $\sum {a_n}^{\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha\geqslant 1$.
b) Existe-t-il une fonction continue f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que, si $\alpha\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^{\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha=1$?

95. [PLSR] ★ Soit f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[0,1]$, soit $B_n(f)(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}$.
a) Montrer que la suite $(B_n(f))_{n\geqslant 1}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.
b) Soit $\alpha\in\,]0,1]$.
On suppose qu'il existe un réel $C>0$ tel que $\forall(x,y)\in[0,1]^2,\ |f(x)-f(y)|\leqslant C\,|x-y|^{\alpha}$.
Montrer que $\|B_n(f)-f\|_\infty=O(1/n^{\alpha/2})$ quand n tend vers $+\infty$.

97. [PLSR] ★ Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tous $m,n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$, $|f_n(x)\times f_m(x)|\leqslant 2^{-|n-m|}$.
a) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $[0,1]$ et que sa somme est bornée.
b) La convergence est-elle uniforme ?

98. [PLSR] ★ Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $C>0$ tel que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|\lambda_n-n^2|\leqslant Cn$.
Soit $f:x\mapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{x}{\lambda_n}\right)$.
a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

b) Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

100. [L] ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note I_n le nombre d'involutions dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et $p_n = \dfrac{I_n}{n!}$. On pose $p_0 = 1$ et $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n x^n$ avec $p_0 = 1$.

a) Calculer $f(x)$.

b) Montrer que $p_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n!}}$.

c) Montrer que $p_n \leqslant \dfrac{e^{n/2+\sqrt{n}}}{\sqrt{n^n}}$.

103. [L] ★ Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 |f_n|$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 |f|$ quand n tend vers $+\infty$, alors $\displaystyle\int_0^1 |f_n - f|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

b) Montrer que si $\displaystyle\int_0^1 (f_n)^2$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f^2$ quand n tend vers $+\infty$, alors $\displaystyle\int_0^1 (f_n - f)^2$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

112. [P] ★ Soit f une fonction continue et intégrable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

a) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, montrer l'existence de $F(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z}\mathrm{d}t$. Montrer que F est continue sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

b) Montrer que F détermine f.

114. [PLSR] ★ Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\gamma(a) = \gamma(b)$.

On pose, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$, $n_\gamma(z) = \dfrac{1}{2i\pi} \displaystyle\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\mathrm{d}t$.

a) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma([a,b])$. Montrer que $n_\gamma(z)$ est un entier.

b) Montrer que $z \mapsto n_\gamma(z)$ est constante sur les composantes connexes par arcs de $\mathbb{C}\setminus\gamma([a,b])$.

c) Montrer qu'il existe une unique composante non bornée de $\mathbb{C}\setminus \operatorname{Im}\gamma([a,b])$. Montrer que n_γ est nul sur cette composante.

d) Calculer $n_\gamma(z)$ pour γ qui parcourt le cercle unité et $|z| < 1$.

e) Soient $\gamma_1, \gamma_2 : [a,b] \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $\gamma_1(a) = \gamma_1(b)$ et $\gamma_2(a) = \gamma_2(b)$. On suppose que $|\gamma_1 - \gamma_2| < |\gamma_1|$ et que γ_1 et γ_2 ne passent pas par 0.
Montrer que $n_{\gamma_1}(0) = n_{\gamma_2}(0)$.

124. [SR] ★ Soit $U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dont la différentielle est constante.

a) Montrer que U est affine.

b) On suppose l'existence d'un ouvert borné non vide Ω de $\mathbb{R}^n$ tel que U s'annule en tout point de la frontière de Ω. Montrer que U est nulle.

126. [L] ★ Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1, strictement convexe, telle que $f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
a) Montrer que f admet un unique minimum.
b) Si $x_0 \in \mathbb{R}^2$, on admet qu'il existe une unique application x de classe C^1 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $x(0) = x_0$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $x'(t) = -\nabla f(x(t))$. Étudier le comportement de $x(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
c) Démontrer le résultat admis dans la question précédente.

131. [SR] ★ ***a)*** Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ admettant un maximum local en (x_0, y_0). Que dire de : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$?
b) Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 1\}$, $\overline{D}$ son adhérence et ∂D sa frontière.
Soient $\epsilon > 0$, $T > 0$ et $f : [0, T] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^2$ vérifiant :
- ***i)*** $\forall (x, y) \in \overline{D}, f(0, x, y) \geqslant \epsilon$,
- ***ii)*** $\forall (x, y) \in \partial D, \forall t \in [0, T], x\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(t, x, y) = 0$,
- ***iii)*** $\forall (x, y) \in \overline{D}, \forall t \in [0, T], \dfrac{\partial f}{\partial t}(t, x, y) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x, y) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t, x, y) \geqslant \epsilon$.

Montrer que $f > 0$ sur $[0, T] \times \overline{D}$

132. [PLSR] ★ On fixe un entier naturel n. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ayant n valeurs propres distinctes. Pour A dans $\mathcal{D}$, on note $\lambda_1(A) < \cdots < \lambda_n(A)$ ses valeurs propres.
a) Soit $A : I \to \mathcal{D}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On admet que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la fonction $\alpha_k : t \mapsto \lambda_k(A(t))$ est de classe $\mathcal{C}^2$. On admet également que l'on peut trouver des fonctions $u_1, \ldots, u_n$ de classe $\mathcal{C}^2$ de I dans $\mathbb{R}^n$ telles que, pour tout $t \in I$, la famille $(u_1(t), \ldots, u_n(t))$ soit une base orthonormée de vecteurs propres de $A(t)$ associée à $(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$. On fixe $k \in [\![1, n]\!]$. Exprimer la dérivée de α_k à l'aide de A, A' et de u_k seulement. Exprimer la dérivée seconde de α_k à l'aide de A', A'', u_k et u_k' seulement.
b) Démontrer que $\mathcal{D}$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
c) Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On admet que $\lambda_k : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$. On fixe $A \in \mathcal{D}$ et $H \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Donner une expression simple de la dérivée seconde en zéro de $t \mapsto \lambda_k(A + tH)$.

138. [L] ★ Soient A, B, C des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Soit $p(\lambda)$ la probabilité que toutes les solutions de $Ay'' + By' + Cy = 0$ s'annulent une infinité de fois. Montrer que $p(\lambda) \underset{\lambda\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

144. ★ [L] Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher indépendantes. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$. Soit T la variable aléatoire égale à $+\infty$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leqslant 0$, à $\min\{n \in \mathbb{N}^*\ ;\ S_n > 0\}$ sinon.
a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbf{P}(S_{2n} \neq 0) = 2\,\mathbf{P}(S_{2n} > 0) = \mathbf{P}(T \leqslant 2n - 1)$.
b) Déterminer la loi de T.

145. [SR] ★ Soit $(X_k)_{k\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables de Rademacher. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Soit enfin $N = \mathrm{card}\{n \in \mathbb{N}^* \ ; \ S_n = 0\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.
a) Donner un équivalent de $\mathbf{P}(S_{2n} = 0)$. En déduire $\mathbf{E}(N)$.
b) Montrer que N est presque sûrement égale à $+\infty$.

146. [P] ★ Soient $(X_{\{i,j\}})_{i<j}$ et $(Y_{\{i,j\}})_{i<j}$ des familles i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre $1/2$. On peut les voir comme une construction d'un graphe aléatoire dont l'ensemble des sommets est $\mathbb{N}$. Quelle est la probabilité qu'il existe une fonction f, aléatoire, bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que $\forall i < j$, $Y_{\{i,j\}} = X_{\{f(i),f(j)\}}$?

152. [P] ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(X^n_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ une famille i.i.d. de variables aléatoires vérifiant $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{E}(e^{\lambda X^n_{i,j}}) \leqslant e^{\lambda^2}$. Soit $M^n = (M^n_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice aléatoire symétrique telle que, si $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, $M^n_{i,j} = X^n_{i,j}$.
a) On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit v un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$. Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$\mathbf{P}\left(\langle M^n v, v\rangle \geqslant \alpha\sqrt{n}\right) \leqslant \sqrt{n}\, e^{-n\alpha^2/8}$$

b) En déduire une majoration avec grande probabilité, lorsque n est grand, de la plus grande valeur propre de M^n.

153. [P] ★ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles, ayant un moment d'ordre 2. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{E}(X_n^2) \leqslant M$. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :
(i) pour toute $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bornée et à dérivée bornée, on a $\mathbf{E}(X_n f(X_n) - f'(X_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$;
(ii) pour toute $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ bornée, on a $\mathbf{E}(f(X_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-x^2/2} \mathrm{d}x$.

Écoles Normales Supérieures - PSI

166. ★ Soit (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour $n \geqslant 1$, $2(n+1)u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}$.

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. On note R le rayon de convergence de f.

a) Montrer que, pour tout n, $u_n \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^n}$. Que peut-on dire de R ?

b) Montrer que, pour tout $x \in]-R, R[$, $\displaystyle\int_0^x \frac{2f'(t)}{1 + f(t)^2} \mathrm{d}t = x$.

c) En déduire f.

Écoles Normales Supérieures - PC

177. [L] ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0$. On pose $Q = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) \geqslant 0$.

183. ★ Soient A et $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ deux matrices symétriques positives telles que $B - A$ est positive.
La matrice symétrique $B^2 - A^2$ est-elle nécessairement positive ?

École Polytechnique - MP

204. ★ Résoudre l'équation $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{n}{a+b}$ d'inconnue (a, b, n) dans $(\mathbb{N}^*)^3$.

207. ★ Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $\dfrac{(2m)!\,(2n)!}{(m+n)!\,m!\,n!} \in \mathbb{N}$.

208. ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $C_n = \{(x, y) \in (\mathbb{Q}^*)^2, x^2 + y^2 = n\}$.
a) Montrer que C_1 est non vide.
b) Montrer que C_7 est vide.
c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que C_n est non vide. Montrer que C_n est infini.

210. ★ Soient $p \geqslant 5$ un nombre premier, $r = \left\lfloor \dfrac{2p}{3} \right\rfloor$. Montrer que p^2 divise $\sum_{k=1}^{r} \dbinom{p}{j}$.

212. ★ ***a)*** Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 2 modulo 3.
b) Si $(G, +)$ est un groupe abélien, une partie X de G est dite *sans somme* s'il n'existe pas de couple $(x, y) \in X^2$ tel que $x + y \in X$. Soit p un nombre premier de la forme $3k + 2$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ contient une partie sans somme de cardinal $k + 1$.
c) Soient A et B deux parties d'un corps fini $\mathbb{K}$. Calculer $\sum_{x \in \mathbb{K}^*} |A \cap xB|$.
d) Soit A une partie finie et non vide de $\mathbb{Z}^*$. Montrer qu'il existe une partie B de A sans somme et de cardinal strictement supérieur à $\dfrac{|A|}{3}$.

213. ★ Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on pose $A(\sigma) = \sigma(1)\sigma(2) + \sigma(2)\sigma(3) + \cdots + \sigma(n-1)\sigma(n)$. Déterminer le maximum de A.

214. ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de l'exercice est de déterminer les automorphismes de $\mathcal{S}_n$ pour $n \neq 6$.
a) Pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $Z(\sigma)$ l'ensemble des permutations qui commutent avec σ. Montrer que $Z(\sigma)$ est un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

b) Déterminer le cardinal de $Z(\sigma)$ lorsque σ est une transposition, puis lorsque σ est un produit de transpositions à supports disjoints.
c) Soit φ un automorphisme sur $\mathcal{S}_n$. Montrer que pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $Z(\varphi(\sigma)) = \varphi(Z(\sigma))$.
d) Soit τ une transposition. Montrer que $\varphi(\tau)$ s'écrit comme un produit de transpositions à supports disjoints.
e) Supposons que pour toute transposition τ, $\varphi(\tau)$ soit aussi une transposition. Montrer qu'il existe $\rho \in \mathcal{S}_n$ tel que, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\varphi(\sigma) = \rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}$.
f) Supposons $n \neq 6$. Soit τ une transposition. Montrer que $\varphi(\tau)$ est une transposition. Conclure.

220. ★ On considère G le groupe des symétries d'un pentagone régulier, c'est-à-dire les isométries vectorielles de $\mathbb{C}$ conservant $\mathbb{U}_5$.
a) Décrire G. En donner un système de générateurs.
On note $\{r, s\}$ un système de générateurs de G, avec $r^5 = 1$ et $s^2 = 1$.
Montrer que $G = \{r^k, 0 \leqslant k \leqslant 4\} \sqcup \{sr^k, 0 \leqslant k \leqslant 4\}$.
b) On souhaite maintenant montrer que tout groupe à 10 éléments est isomorphe, soit à $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, soit au groupe des symétries du pentagone. On considère $(G, \cdot)$ un groupe à 10 éléments, non cyclique. Montrer que G possède un élément d'ordre 5, noté ρ, et un élément d'ordre 2, noté σ.
Montrer que $G = \{\rho^k, 0 \leqslant k \leqslant 4\} \sqcup \{\sigma\rho^k, 0 \leqslant k \leqslant 4\}$. Montrer que $\sigma\rho\sigma^{-1} \in \{\rho, \rho^{-1}\}$. En distinguant les cas, conclure.

229. ★ ***a)*** Soient G un groupe, $\chi_1, \dots \chi_m$ des morphismes distincts de G dans $\mathbb{C}^*$. Montrer que $(\chi_1, \dots, \chi_m)$ est une famille libre de $\mathbb{C}^G$.
b) Déterminer les morphismes de groupes continus de $\mathbb{U}$ dans $\mathbb{C}^*$.

232. ★ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On suppose que P induit une surjection de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{Q}$.
a) Montrer que P appartient à $\mathbb{Q}[X]$.
b) Montrer que P est de degré 1.

239. ★ Soit $m \in \mathbb{N}^*$. On définit par récurrence une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes par $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = \dfrac{1}{2m}(1 - X^2)\, P_n' + \dfrac{1}{2}(X+1)\, P_n$.
a) Montrer que $(\deg P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
b) Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

249. ★ Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, $n \geqslant 2$ un entier, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
On note $C(J) = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})\ ;\ AJ = JA\}$, $\Gamma_n = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})\ ;\ M^n = J\}$.
a) Déterminer $C(J)$. Vérifier que $C(J)$ est une sous-algèbre commutative de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
b) Montrer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la $\mathbb{R}$-algèbre $C(J)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$. Déterminer Γ_n.
c) Montrer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, la $\mathbb{Q}$-algèbre $C(J)$ est isomorphe à $\mathbb{Q}[i]$. Déterminer Γ_n. On admettra que les éléments d'ordre fini de $(\mathbb{Q}[i]^*, \times)$ sont ± 1 et $\pm i$.
d) Montrer que, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la $\mathbb{C}$-algèbre $C(J)$ est isomorphe à $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Déterminer Γ_n.

261. ★ Soit C une partie de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ symétrique par rapport à 0. On suppose que C possède exactement un point d'intersection avec $\{\lambda u,\ \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ pour tout vecteur non nul u de $\mathbb{R}^2$. On note $G(C)$ l'ensemble des endomorphismes f de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(C) = C$. On fait les hypothèses suivantes :
i) pour tous u, v dans C, il existe une symétrie s de $\mathbb{R}^2$ telle que $s \in G(C)$ et $s(u) = v$,
ii) pour tout $u \in C$, il existe une unique symétrie s dans $G(C)$ d'axe $\mathrm{Vect}(u)$.
Démontrer que C est l'image du cercle unité de $\mathbb{R}^2$ par un certain automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

262. ★ Soit $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Montrer l'existence de n points $A_1, \ldots, A_n$ dans $\mathbb{R}^{n-1}$ tels que le groupe des isométries vectorielles de $\mathbb{R}^{n-1}$ stabilisant ces n points soit isomorphe à $\mathcal{S}_n$.

263. ★ Soient $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, et U et V deux sous-espaces vectoriels de E. On note respectivement π_U et π_V les projections orthogonales sur U et V. Montrer qu'il existe $q \in \mathcal{L}(E)$ et un réel $\rho \in\,]0, 1[$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E,\ \|(\pi_U \pi_V)^n(x) - q(x)\| \leqslant \rho^n \|x\|$.

268. ★ Soient $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

279. ★ Si A est une partie de $\mathbb{N}$, on dit que A est de densité d si $\dfrac{|A \cap [0, n]|}{n+1} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} d$.
a) Une partie de $\mathbb{N}$ admet-elle toujours une densité ?
b) Soit $(u_k)_{k \geqslant 0}$ une suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}^+$. Montrer que $\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ si et seulement s'il existe une partie A de $\mathbb{N}$ de densité 0 telle que $u_n \underset{\substack{n \to +\infty \\ n \notin A}}{\longrightarrow} 0$.
c) Que dire d'une fonction f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ transformant toute suite vérifiant les conditions de la question précédente en une suite vérifiant ces mêmes conditions ?

280. ★ ***a)*** Soit u une suite réelle telle que $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2,\ u_{m+n} \leqslant u_m + u_n$. Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ admet une limite dans $[-\infty, +\infty[$.
b) Un n-chemin dans $\mathbb{Z}^2$ est une $(n+1)$-liste $(x_0, \ldots, x_n)$ d'éléments de $\mathbb{Z}^2$ telle que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\|x_{k+1} - x_k\|_1 = 1$. Un tel chemin est dit simple lorsque ses éléments sont distincts. On note A_n le nombre de n-chemins simples partant de $(0, 0)$. Montrer qu'il existe un réel $\gamma \in [2, 4]$ tel que, pour tout $t > \gamma$, $A_n = o(t^n)$ et, pour tout $t \in [0, \gamma[$, $t^n = o(A_n)$.

285. ★ Soit $(u_n)_{n \geqslant 0} \in (\mathbb{R}^{+*})^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante, telle que $u_0 = 1$ et telle que la série de terme général $\dfrac{{u_n}^2}{u_{n+1}}$ converge. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{{u_n}^2}{u_{n+1}} \geqslant 4$.

295. ★ Soit f une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $f' < 0$ et que

$\sup\left\{\dfrac{f(x)\,f''(x)}{f'(x)^2}\ ;\ x\in\mathbb{R}^+\right\}<2$. Montrer que $x\,f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

296. $\bigstar$ Soit f une fonction de classe C^3 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telle que f, f', f'', f''' soient à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ et que $f'''<f$. Montrer que $f''^2<2ff',\ f'^2<2ff'',\ f'<2f$.

301. $\bigstar$ Soient $K:[0,1]^2\to\mathbb{R}^{+*}$, $f:[0,1]\to\mathbb{R}^{+*}$ et $g:[0,1]\to\mathbb{R}^{+*}$ continues telles que

$$\forall x\in[0,1],\ g(x)=\int_0^1 f(y)\,K(x,y)\,\mathrm{d}y\quad\text{et}\quad f(x)=\int_0^1 g(y)\,K(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Montrer que $f=g$.

310. $\bigstar$ Soit $A:\mathbb{C}\to\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, dont tous les coefficients sont développables en série entière sur $\mathbb{C}$. On suppose que pour tout $z\in\mathbb{R}$, on a $A(z)\in\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe une fonction φ développable en série entière sur $\mathbb{C}$, telle que
$\forall z\in\mathbb{C}, A(z)=\begin{pmatrix}\cos\varphi(z) & -\sin\varphi(z)\\ \sin\varphi(z) & \cos\varphi(z)\end{pmatrix}$.
b) On suppose qu'il existe $c>0$ tel que $\forall z\in\mathbb{C},\ |\cos(\varphi(z))|\leqslant e^{c|z|}$ et $|\sin(\varphi(z))|\leqslant e^{c|z|}$.
Montrer que φ est affine.

316. $\bigstar$ Soit A une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
a) Montrer qu'il existe une application continue R_A de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que, pour toute application X de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que $\forall t\in\mathbb{R}, X'(t)=A(t)X(t)$ et tout $(t_0,t_1)\in\mathbb{R}^2$, on ait $X(t_1)=R_A(t_0,t_1)X(t_0)$.
b) On suppose que $A(t)$ est de trace nulle pour tout $t\in\mathbb{R}$.
Montrer que, pour tout $(t_0,t_1)\in\mathbb{R}^2$, $\det(R_A(t_0,t_1))=1$. *Ind.* Montrer que, pour toute matrice B et pour tous vecteurs U,V, $\det(BU,V)+\det(U,BV)=\mathrm{Tr}(B)\det(U,V)$.
c) On suppose que A est 1-périodique. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $R_A(n,0)=R_A(1,0)^n$.
d) On suppose que A est 1-périodique et que, pour tout réel t, $A(t)$ est de trace nulle. Montrer que s'il existe une solution bornée non nulle alors $|\mathrm{Tr}(R_A(1,0)|\leqslant 2$.
e) On garde les mêmes hypothèses sur A et on veut établir une réciproque partielle. On suppose que $|\mathrm{Tr}(R_A(1,0)|<2$. Montrer que toutes les solutions sont bornées.

317. $\bigstar$ Quels sont les $n\in\mathbb{N}$ tels qu'il existe un cercle du plan dont le nombre de points d'intersection avec $\mathbb{Q}^2$ soit n ? L'intersection peut-elle être infinie ?

320. $\bigstar$ ***a)*** Soit X une variable aléatoire réelle admettant un moment d'ordre 2. Montrer, si $\lambda\in\mathbb{R}^{+*}$, que $\mathbf{P}(X\geqslant\mathbf{E}(X)+\lambda)\leqslant\dfrac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X)+\lambda^2}$.
b) Soit $(X_n)_{n\geqslant1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes ayant un moment d'ordre 2. On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(X_n)=0$ et $\mathbf{V}(X_n)\leqslant1$. On pose $N=\min\{n\in\mathbb{N}^*,\ X_n\leqslant1\}$. Montrer que e^{aN} est d'espérance finie pour tout $a\in[0,\ln 2[$.

322. ★ Étant donné une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et un entier $k \in [\![1, n]\!]$, une k-montée de σ est une liste strictement croissante $(i_1, \ldots, i_k)$ d'éléments de $[\![1, n]\!]$ telle que $\sigma(i_1) < \cdots < \sigma(i_k)$.
On munit $\mathfrak{S}_n$ de la probabilité uniforme, et on note X_n la variable aléatoire attribuant à $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ le plus grand entier $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\mathfrak{S}_n$ admette une k-montée.
a) Montrer, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'inégalité $\mathbf{P}(X_n \geqslant k) \leqslant \dfrac{1}{k!}\dbinom{n}{k}$.
b) Mettre en évidence un réel $C > 0$ tel que $\mathbf{P}(X_n \geqslant C\sqrt{n})$ tende vers 0 quand $n \to +\infty$.

325. ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Dénombrer l'ensemble $E_n = \left\{ f \in [\![1, n]\!]^{[\![1,n]\!]}\ ;\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ f(i) \leqslant i \right\}$.
b) Soit f_n suivant la loi uniforme sur E_n. Soit $X_n = \min\{k \in \mathbb{N}^*,\ f_n^k(n) = f_n^{k-1}(n)\}$. Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.
c) Calculer $\mathbf{P}\left(f_n^{X_n}(n) = k\right)$.

326. ★ Soit $d \geqslant 1$ entier. Pour toute partie $A = \{a_1, \ldots, a_d\}$ de $[\![1, d]\!]$, avec $a_1 < \cdots < a_p$, et toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $M^A = (m_{a_k, a_\ell})_{1 \leqslant k, \ell \leqslant p}$.
a) Montrer, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'égalité

$$\det(I_d + M) = \sum_{A \subset [\![1,d]\!]} \det(M^A).$$

Dans la suite, on se donne une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathcal{P}([\![1, d]\!])$. On suppose qu'il existe $K \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ telle que, pour toute partie A de $[\![1, d]\!]$, on ait $\mathbf{P}(A \subset X) = \det(K^A)$.
b) Soient $f : [\![1, d]\!] \to \mathbb{R}$ et D la matrice diagonale de coefficients diagonaux $f(1), \ldots, f(d)$. Montrer que $\mathbf{E}\left(\prod_{i \in X}(1 + f(i))\right) = \det(I_d + DK)$.
c) Montrer que le spectre de K est inclus dans $[0, 1]$.
d) Montrer que $|X|$ suit la loi de la somme de d variables de Bernoulli indépendantes dont les paramètres respectifs sont les valeurs propres de K.

328. ★ Soient X une variable aléatoire centrée et bornée, $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de X et $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer qu'il existe $C \in]0, 1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbf{P}(S_n \geqslant na) \leqslant C^n$.

École Polytechnique - ESPCI - PC

368. ★ Soient $A, B, C \in M_3(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ telles que

$$AB - BA = C,\ BC - CB = A \text{ et } CA - AC = B.$$

a) Montrer que A admet un vecteur propre u.
b) Montrer $(Bu = 0 \text{ ou } Cu = 0) \Rightarrow Au = 0$.

c) Montrer que si $Bu \neq 0$, alors (u, Bu, Cu) est une base de $\mathbb{R}^3$.
d) Montrer que A, B et C sont simultanément semblables aux matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

387. ★ Soient A et B deux matrices réelles symétriques positives d'ordre n.
a) Montrer que la suite $\left((A+B)\left((A+B)+\dfrac{1}{k}I_n\right)^{-1}\right)_{k\geqslant 1}$ converge. On note P sa limite.
b) Montrer que $\mathrm{Im}(P) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(B)$.

388. ★ Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant $x_0 \geqslant 0$, $x_1 \geqslant 0$, $x_0 + x_1 > 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}x_{n+1} + x_n$. Étudier la convergence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Mines-Ponts – MP

446. ★ Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $a_{n,1} = a_{i,i+1} = 1$ $(1 \leqslant i < n)$ et dont les autres coefficients sont nuls.
On pose, pour $p \in \mathbb{N}^*$, $B_p = I_n + A + ... + A^{p-1}$. Montrer que B_p est inversible si et seulement si n et p sont premiers entre eux

474. ★ Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Montrer que le degré de π_u est majoré par $1 + \mathrm{rg}(u)$.

523. ★ Existe-t-il une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), N(AB) = N(A)\,N(B)$?

533. ★ Soient E un espace normé réel, A une partie convexe de E, B une partie de E telle que $A \subset B \subset \overline{A}$. Montrer que B est connexe par arcs.

555. ★ Soit f une bijection de $\mathbb{N}^*$. On pose $E(f) = \left\{\alpha \in \mathbb{R}\ ;\ \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{f(n)}{n^\alpha} \text{ converge}\right\}$.
a) Montrer que $E(f)$ peut être vide et que, s'il est non vide, c'est un intervalle minoré par 2 et non majoré.
b) Soit $B \geqslant 2$. Montrer l'existence de f tel que $E(f) =]B, +\infty[$.

578. ★ Soit $f \in \mathcal{C}^0[0,1],\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in [0,1]$, $\displaystyle\int_x^1 f \geqslant \frac{1-x^2}{2}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

651. ★ Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ avec $m < n$. Soient A une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'ensemble des parties à m éléments de $\{1, \ldots, n\}$, et $X = \max(A) - \min(A)$. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Mines-Ponts - PC

815. ★ Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Calculer les sommes suivantes :
$E = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{ik\theta}}{k}$, $C = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k}$.

Centrale - MP

917. ★ Soient $n \geqslant 2$ et $p \leqslant n$. Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les matrices sont de rang inférieur ou égal à p.
a) Donner un exemple d'un tel sous-espace vectoriel de dimension np.
b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soient $A \in \mathcal{M}_r(\mathbb{R})$, $L \in \mathcal{M}_{1,r}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{r,1}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
On considère $M : t \mapsto \begin{pmatrix} A - tI_r & C \\ L & \alpha \end{pmatrix}$ et on pose $u : t \mapsto \det M(t)$.
Montrer que u est polynomiale de degré inférieur ou égal à r et expliciter les coefficients devant t^r et t^{r-1}.
c) Montrer que $\dim(V) \leqslant np$.

921. ★ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. L'objectif est de montrer que les facteurs irréductibles du polynôme caractéristique χ_u sont les même que ceux du polynôme minimal π_u. Soit P un facteur irréductible de π_u de degré d.
a) Montrer que $\operatorname{Ker} P(u)$ contient un vecteur $x \neq 0$.
b) Montrer que $\big(x, u(x), \ldots, u^{d-1}(x)\big)$ est une base de $F = \operatorname{Vect}\big(u^k(x)\big)_{k\in\mathbb{N}}$.
c) Calculer χ_{u_F} et conclure.

922. ★ Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On pose $k = \min\big\{j \in \mathbb{N}^*,\ \operatorname{Ker}(u^j) = \operatorname{Ker}(u^{j+1})\big\}$.
a) Montrer que k est bien défini et, que, pour $j \geqslant k$, $\operatorname{Ker}(u^j) = \operatorname{Ker}(u^k)$, $\operatorname{Im}(u^j) = \operatorname{Im}(u^k)$.
On pose $K_u = \operatorname{Ker}(u^k)$, $I_u = \operatorname{Im}(u^k)$. On note u_I et u_K les endomorphismes induits par u sur I_u et sur K_u.
b) Montrer que u_K est nilpotente et que u_I est un automorphisme.
c) Montrer que $K_u \oplus I_u = E$
d) Si K et I sont des sous-espaces de E, on note $\operatorname{Nil}(K)$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents de K, $\operatorname{Aut}(I)$ l'ensemble des automorphismes de I. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des (K, I, v, w) avec (K, I) couple de sous-espaces supplémentaires de E, $v \in \operatorname{Nil}(K)$, $w \in \operatorname{Aut}(I)$. Montrer que l'application $\Phi : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto (K_u, I_u, u_K, u_I)$ est une bijection de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{C}$.
e) Montrer que k est la valuation du polynôme minimal de u.

Autres Écoles - PC

1210. *CCINP.* ★ On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,Q(t)\mathrm{d}t$.

a) Calculer la norme de $P_n = \sqrt{n}(1-X)^n$.

b) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \langle T, P\rangle = P(0)$.

1223. *CCINP.* ★ ***a)*** Rappeler le développement en série entière en 0 de l'exponentielle ainsi que son rayon de convergence.

Soient $A > 1$ et $M \geqslant 0$. Soit $f \in \mathcal{C}^0([1, A], \mathbb{R})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N},\ \left|\displaystyle\int_1^A t^k f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M$.

Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$ et $h \in]1, A]$. On pose $P_n(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{X}{h}\right)^{pk}$.

b) Montrer que $\left|\displaystyle\int_1^A P_n(t) f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k! h^{pk}}$.

En déduire que $\left|\displaystyle\int_1^A (e^{-(t/h)^p} - 1) f(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant M(e^{(1/h)^p} - 1)$.

c) Préciser $\displaystyle\lim_{p\to+\infty} (e^{-(t/h)^p} - 1)$ et montrer que $\displaystyle\int_h^A f(t)\mathrm{d}t = 0$.

d) Montrer que la fonction f est nulle.