

Épreuves orales des concours d'entrée aux grandes écoles

Les énoncés marqués d'une étoile seront corrigés ultérieurement

Le comité de rédaction remercie Walter Appel, Marc Becker, Anne-Laure Biolley, Jean-Paul Bonnet, Laurent Bonavero, Olivier Bouverot, Laurent-Yvon Chaumard, Denis Choimet, Pierre-Jean Desnoux, Jean-Denis Eiden, Stéphane Flon, Cyril Germain, Max Hochart, Jean-Claude Jacquens, Denis Jourdan, Roger Mansuy, Renaud Palisse, Alain Pommellet, Franz Ridde, Eddy Routin, Pierre-Alain Sallard, Cécile Stérin pour leurs contributions à cette liste d'exercices.

Le comité tient à remercier tout particulièrement Igor Kortchemski et Omid Amini, qui l'ont autorisé à exploiter la liste d'exercices mise en ligne à l'adresse suivante :

https://www.ens.fr/sites/default/files/2019_mathsulm_sujets-1.pdf.

Les lecteurs y trouveront également des indications et de très intéressants commentaires sur la façon dont l'interrogation est menée à l'oral de mathématiques de l'ENS Paris en filière MP. Le comité espère que cette belle initiative sera suivie par d'autres concours.

Les lecteurs désirant faire parvenir des solutions d'exercices à la rédaction sont priés de le faire avant le 16 février 2020, de préférence par courrier électronique en pdf et si possible en Tex à l'adresse : exercices@rms-math.com.

Écoles Normales Supérieures - MP

1. [P]★ L'ensemble des permutations de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?

2. [PLSR]★ ◊ Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$. On dit qu'un élément $P \in \mathbb{N}^*$ est parfait si $\sigma(P) = 2P$.

a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^p - 1$ est premier. Montrer que p est premier.

b) Montrer que, si p est un élément de $\mathbb{N}^*$ tel que $2^p - 1$ est premier, alors $2^{p-1} (2^p - 1)$ est parfait.

On admet dans la suite que tout nombre parfait pair est de la forme précédente. On considère un nombre parfait pair, que l'on écrit donc sous la forme $P = 2^{p-1} (2^p - 1)$ où $p \in \mathbb{N}^*$ est tel que $2^p - 1$ est premier. Dans les question c), d), e), on suppose $p \neq 2$.

c) Déterminer la classe de P modulo 12.

d) Montrer que $P - 1$ et $P + 1$ ne sont pas des carrés.

- e) En considérant la classe de $P - 1$ modulo 4 et celle de $P + 1$ modulo 3, montrer que $P - 1$ et $P + 1$ ne sont pas parfaits.
 f) Montrer qu'il n'existe pas de couple de nombres parfaits consécutifs.
 g) Prouver le résultat admis.

3. [L] ★ a) Soit α un nombre réel irrationnel. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe (p, q) de $\mathbb{Z} \times \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qn}$.

b) Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On suppose que d n'est pas un carré parfait. Montrer que l'équation $a^2 - db^2 = 1$ possède une solution $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ telle que $b \neq 0$.

4. [L] ★ ◇ Montrer que, si m et n sont dans $\mathbb{N}^*$, n divise $\sum_{k=1}^n m^{k \wedge n}$.

5. [P] ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $g(n)$ désigne le nombre de diviseurs premiers de n comptés avec multiplicité; par exemple, $g(5^2) = 2$. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{d|n} (-1)^{g(d)}$.

6. [SR] ★ On note $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib; (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Pour $z \in \mathbb{Z}[i]$, soit $N(z) = |z|^2$.

a) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Déterminer ses éléments inversibles.

b) Si x et y sont deux éléments de $\mathbb{Z}[i]$ et $x \neq 0$, montrer qu'il existe $(q, r) \in \mathbb{Z}[i]^2$ tel que $y = qx + r$ et $N(r) < N(x)$. En déduire que les idéaux de $\mathbb{Z}[i]$ sont principaux.

c) Pour n et k dans $\mathbb{N}^*$, soit $s_{n,k} = \frac{1}{4} \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}[i] \\ N(x)=n}} x^k$. Montrer que $s_{n,k} \in \mathbb{Z}[i]$.

7. [P] ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $g(n)$ le maximum des ordres des éléments de S_n . Pour quels n l'entier $g(n)$ est-il impair?

8. [P] ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $g(n)$ le maximum des ordres des éléments de S_n . Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{g(n)}{n^k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

9. [P] ★ Les sous-groupes stricts de $(\mathbb{Q}, +)$ sont-ils monogènes?

10. [P] ★ Soit G un groupe.

a) On suppose que G possède un nombre fini de sous-groupes. Montrer que G est fini.

b) Le résultat de la question précédente subsiste-t-il en remplaçant « fini » par « dénombrable »?

11. [P] ★ Soient G un groupe, $\delta \in \mathbb{R}^{+*}$, E_δ l'ensemble des applications f de G dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in G^2, |f(xy) - f(x)f(y)| \leq \delta$.

a) Montrer que, si $f \in E_\delta$ n'est pas bornée, alors $\forall (x, y) \in G^2, f(xy) = f(x)f(y)$.

b) Trouver $C > 0$ tel que, pour toute $f \in E_\delta$, on ait soit $\forall x \in G, |f(x)| \leq C$, soit $\forall (x, y) \in G^2, f(xy) = f(x)f(y)$.

12. [P] ★ Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Si f est une fonction de G dans $\mathbb{R}$, on dit que f est un quasi-morphisme s'il existe $C > 0$ tel que $\forall (x, y) \in G^2, |f(xy) - f(x) - f(y)| \leq C$ et que f est un quasi-caractère si $\forall (n, x) \in \mathbb{Z} \times G, f(x^n) = nf(x)$. Montrer que, pour tout quasi-morphisme M de G dans $\mathbb{R}$, il existe un unique quasi-morphisme qui est aussi un quasi-caractère Q de G dans $\mathbb{R}$ tel que $M - Q$ soit bornée.

13. [PLSR] ★ Soient $n \geq 2$ un entier, a et b deux éléments distincts de $\{1, \dots, n\}$, $G_{a,b}$ le sous-groupe de S_n engendré par (ab) et $(1\ 2\ \dots\ n)$. À quelle condition a-t-on $G_{a,b} = S_n$?

14. [L] ★ ◊ Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{Z}[X]$ ayant huit racines de module 1, deux racines dans $\mathbb{R}^{+*}$, tel que $P(0) = 1$ et irréductible sur $\mathbb{Q}$.

15. [P] ★ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\mathbb{R}^{+*}) \subset \mathbb{R}^{+*}$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1 + X)^n P$ soit à coefficients dans $\mathbb{R}^+$.

16. [P] ◊ ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver les fonctions f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2, f(XY) \leq \min\{f(X), f(Y)\}$.

17. [P] ★ Soient $(m, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_m$ des éléments idempotents de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire vérifiant $A_k A_k = A_k$. Montrer que $\sum_{i=1}^m (n - \text{rg}(A_i)) \geq \text{rg}\left(I_n - \prod_{i=1}^m A_i\right)$.

18. [P] ★ ◊ Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ avec $B^2 = B$. Montrer que $\text{rg}(AB - BA) \leq \text{rg}(AB + BA)$.

19. [P] ★ Soient $n \geq 2$ un entier, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $t_1, \dots, t_{n+1}$ des nombres réels deux à deux distincts. Montrer que $\forall i \in \{1, \dots, n+1\}, \det(A + t_i B) = 0$ si et seulement s'il existe deux sous-espaces V et W de $\mathbb{R}^n$ tels que $A(V) \subset W, B(V) \subset W$ et $\dim(W) < \dim(V)$.

20. [PLSR] ★ Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $E = \{P(f)(x) ; P \in \mathbb{C}[X]\}$.

a) On suppose que f est cyclique. Montrer que tout endomorphisme induit par f est cyclique et que l'ensemble des sous-espaces de E stables par f est fini.

b) On suppose que l'ensemble des sous-espaces de E stables par f est fini. Montrer que f est cyclique.

21. [L] ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*, A \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que soit A a une valeur propre de module strictement supérieur à 1, soit il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k - I_n$ est nilpotente.

22. [P] ★ Soient $n \geq 2$ un entier, A et B dans $\text{GL}_n(\mathbb{C})$, X et Y dans $\mathbb{C}^n$.

a) On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k X = B^k Y$. Montrer que $X = Y$.

b) Déterminer le plus petit N de $\mathbb{N}^*$ tel que, pour toutes matrices $A, B \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et tous vecteurs X, Y de $\mathbb{C}^n$, la condition $\forall k \in \{1, \dots, N\}, A^k X = B^k Y$ implique $X = Y$.

23. [P] ★ Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $P = \det(XI_n - A)$.

On pose $P = X^n + c_1 X^{n-1} + \dots + c_n = (X - z_1) \dots (X - z_n)$.

a) Calculer de deux façons $\sum_{k=1}^n \frac{P(x)}{x - z_k}$ pour $x \in \mathbb{C}$ avec $|x| > \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|$.

b) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Montrer : $c_k = \frac{(-1)^k}{k!} \begin{vmatrix} \text{tr}(A) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \text{tr}(A^2) & \text{tr}(A) & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \text{tr}(A^{k-1}) & & \ddots & \ddots & k-1 \\ \text{tr}(A^k) & \text{tr}(A^{k-1}) & \cdots & \text{tr}(A^2) & \text{tr}(A) \end{vmatrix}$.

24. [P] ★ Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\det(A) > 1$, $\det(B) > 1$ et $AB = BA$. On s'intéresse aux suites $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ telles que $v_0 \neq 0$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_{k+1} = Av_k$ ou $v_{k+1} = Bv_k$. Montrer qu'il existe v_0 tel que toute suite ainsi définie de premier terme v_0 soit non bornée. Le résultat subsiste-t-il si on omet l'hypothèse $AB = BA$?

25. [P] ★ Soit $n \geq 2$ un entier.

a) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, L la matrice de $\mathcal{M}_{n(n-1)^2, n}(\mathbb{C})$ dont les lignes sont les $A^i B^j - B^j A^i$, $1 \leq i, j \leq n-1$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun si et seulement si $\text{rg}(L) < n$.

b) Montrer que l'ensemble des A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tels que A et ${}^t A$ n'admettent aucun vecteur propre commun est un ouvert dense de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

26. [P] ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n , $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale de E . Si $1 \leq i \leq n$, soit $d_i = \|e_i\|$. Soit $m \in \{1, \dots, n\}$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- il existe un sous-espace V de E de dimension m telle que les projections orthogonales de $e_1, \dots, e_n$ sur V ont même norme.

- pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $d_i^2 \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{d_j^2} \right) \geq m$.

27. [L] ★ Soit E l'espace des fonctions polynomiales de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On munit E du produit scalaire donné par $\forall (f, g) \in E^2$, $\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(\cos \theta) g(\cos \theta) d\theta$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soient E_n le sous-espace de E constitué des fonctions polynomiales de degré au plus n , Π_n le projecteur orthogonal de E sur E_n . On fixe $g \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $M_{n,g}$ l'endomorphisme de E_n défini par $\forall f \in E_n$, $M_{n,g}(f) = \Pi_n(fg)$. Étudier asymptotiquement la suite $(\text{tr}(M_{n,g}))_{n \in \mathbb{N}}$.

28. [PLSR] ★ Soient A et B dans $S_n(\mathbb{R})$. Comparer $\text{tr}(ABAB)$ et $\text{tr}(A^2 B^2)$.

29. [SR] ★ On appelle parfait de $\mathbb{R}$ toute partie non vide de $\mathbb{R}$ fermée sans point isolé.

a) Donner un exemple de parfait d'intérieur vide de $\mathbb{R}$.

b) Donner un exemple de parfait de $\mathbb{R}$ ne coupant pas $\mathbb{Q}$.

30. [SR] ★ Soient E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de E , $C = \mathbb{R}^+ v_1 + \dots + \mathbb{R}^+ v_p$. Montrer que C est fermé dans E .

31. [P] ★ a) Montrer que l'on ne peut partitionner $\mathbb{R}^2$ en cercles de rayons strictement positifs.

b) Peut-on partitionner $\mathbb{R}^2$ en disques ouverts de rayons strictement positifs ?

c) On appelle triade toute partie de $\mathbb{R}^2$ homéomorphe à la réunion des trois segments reliant le point $(0, 0)$ aux points $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$. Montrer que l'on ne peut partitionner $\mathbb{R}^2$ en triades.

32. [PLSR] ★ On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite bistochastique lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls et que la somme de ses coefficients sur une ligne ou une colonne quelconque vaut 1. On note $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble formé par ces matrices.

a) Montrer que $D_n(\mathbb{R})$ est compact et connexe par arcs.

b) On pose $F : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto (m_{i,j}^2)_{1 \leq i, j \leq n}$. Comparer $F(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ à $D_n(\mathbb{R})$.

c) Est-ce que $F(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ est dense dans $D_n(\mathbb{R})$?

d) Est-ce que $F(\mathcal{O}_n(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs ?

33. [PLSR] ★ Soit φ une fonction convexe de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $\varphi(0) = 0$.

a) Montrer que φ est continue.

b) On note E_φ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues par morceaux telles que $\varphi \circ |f|$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que E_φ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \varphi(2x) \leq C\varphi(x)$.

34. [P] ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, $t \in [0, 1] \mapsto f((1-t)x + ty)$ est monotone. Montrer qu'il existe une forme linéaire φ sur $\mathbb{R}^n$ et une application continue monotone g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f = g \circ \varphi$.

35. [P] ★ Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. Soit $f : E \rightarrow F$ telle que $f(0) = 0$ et que pour tout $(x, y) \in E^2$, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

a) On suppose que $E = F = \mathbb{R}$. Montrer que f est linéaire.

b) On suppose que $E = F$ et que la norme est euclidienne. Montrer que f est linéaire.

c) On suppose que f est surjective. Montrer que f est linéaire.

d) Donner un exemple dans lequel f n'est pas linéaire.

36. [P] ★ Soient $s \in \mathbb{R}^{+*}$ et $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par $u_1 = 1$, $u_2 = s$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \frac{u_n u_{n+1}}{n}$. Étudier la convergence de $(u_n)_{n \geq 1}$.

37. [PLSR] ★ Pour $d \in \mathbb{N}^*$, soit $N(d)$ le nombre de couples (m, n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tels que $n \leq m$ et $\binom{m}{n} = d$.

a) Montrer que $(i, j) \mapsto \binom{i+j}{j}$ est strictement croissante en i et en j .

b) En considérant $B = \min \left\{ b \in \mathbb{N}^* ; \binom{2b}{b} > d \right\}$, montrer que $N(d) = O(\ln(d))$.

c) Montrer que $\frac{1}{x} \sum_{d=1}^x N(d) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2$.

38. [P]★ Soient $(a_n)_{n \geq 0}, (b_n)_{n \geq 0}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leq a_n + b_n$ et que $\sum b_n$ converge. Montrer que $(a_n)_{n \geq 0}$ converge.

39. [P]★ Pour $\lambda \in]0, 1[$, soit A_λ l'ensemble des k de $\mathbb{N}^*$ tels que le nombre de 9 dans l'écriture décimale de k soit majoré par λn_k , où n_k est le nombre de chiffres de k . Étudier la sommabilité de $\left(\frac{1}{k}\right)_{k \in A_\lambda}$.

40. [SR]★ Soient f et g deux fonctions convexes continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in [0, 1], \max(f(x), g(x)) \geq 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in [0, 1]$ tel que $\forall x \in [0, 1], (1 - \lambda)f(x) + \lambda g(x) \geq 0$.

41. [P]★ Déterminer les fonctions dérivables f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que : $f(1) = 1$ et $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2, f(x)f(y) \leq f(xy)$.

42. [P]★ On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \dots, f_n$ des fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $g = f_1 + \dots + f_n$ tende vers 0 en $+\infty$. Montrer que $g = 0$.

43. [SR]★ Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit f_t la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f_t(x) = f(x - t)$. Si $\varepsilon > 0$ et $T \in \mathbb{R}$, on dit que T est une ε -presque période de f si $\|f - f_T\|_\infty \leq \varepsilon$. On dit que f est presque périodique si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que tout segment de longueur R de $\mathbb{R}$ contienne une ε -presque période de f .

a) Donner des exemples de fonctions presque périodiques.

b) Montrer qu'une fonction presque périodique est bornée.

c) Montrer qu'une fonction presque périodique est uniformément continue.

d) On suppose que f est presque périodique.

Montrer que, si $(t_n)_{n \geq 0}$ est une suite réelle, il existe une extraction φ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2, p, q \geq N \Rightarrow \|f_{t_{\varphi(p)}} - f_{t_{\varphi(q)}}\|_\infty \leq \varepsilon$. Qu'en déduit-on ?

e) La réciproque de la question précédente est-elle exacte ?

44. [P]★ Déterminer l'ensemble des nombres réels c tels qu'il existe une fonction deux fois dérivable f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f' > f + c$ et $f'' > f' + c$.

45. [L]★ Soient $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in E$, $M_n(f) = \int_0^1 t^n f(t) dt$.

a) Soient f et g dans E telles que $\forall n \in \mathbb{N}, M_n(f) = M_n(g)$. Montrer que $f = g$.

b) Existe-t-il $f \in E$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, M_n(f) = \exp\left(-\frac{n^2}{10}\right)$?

c) Existe-t-il $f \in E$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, M_n(f) = \frac{1}{1 + 10n^2}$?

46. [P] ★ Soit f une fonction continue de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$.

Montrer que $\int_{-1/2}^{3/2} x f(3x^2 - 2x^3) dx = 2 \int_0^1 x f(3x^2 - 2x^3) dx$.

47. [PLSR] ★ Le but de l'exercice est de montrer que $\ln(2)$ est irrationnel. On raisonne par l'absurde en considérant a et b dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\ln(2) = \frac{a}{b}$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe $c_n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = (-1)^n \ln(2) + \frac{c_n}{\text{ppmc}(1, 2, \dots, n)}.$$

b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = \frac{1}{n!} (X^n(1-X)^n)^{(n)}$. Montrer qu'il existe $A_n \in \mathbb{Z}^*$ tel que

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1+x} dx = \frac{A_n}{b \times \text{ppmc}(1, 2, \dots, n)}.$$

c) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, π_n le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à n . On admet que $\pi_n \sim \frac{n}{\ln(n)}$. Montrer que, pour n assez grand, $\text{ppmc}(1, 2, \dots, n) \leq 3^n$.

d) Conclure.

48. [L] ★ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et 2π -périodique telle que :

$\forall x \in \mathbb{R}, (f(x), f'(x)) \neq (0, 0)$.

a) Montrer que l'ensemble Z des zéros de f sur $[0, 2\pi[$ est fini.

b) Soit g une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tendant vers 1 en $+\infty$, vers -1 en $-\infty$.

Montrer que $|Z| = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} g' \left(\frac{f'}{f}(x) \right) \left(\frac{f'}{f} \right)'(x) dx$.

c) Montrer que $|Z| = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f''f - f'^2}{f^2 + f'^2} dx$.

49. [P] ★ Soit $(p_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $p_0 = p_1 = 1$ et, pour $n \geq 2$,

$$p_n = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x_1} \dots \int_0^{1-x_{n-1}} dx_n dx_{n-1} \dots \right) dx_1. \text{ Calculer } \sum_{n=0}^{+\infty} p_n (\pi/6)^n.$$

50. [P] ★ Soit f une fonction continue et de carré intégrable de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto e^{-x} \int_0^x f(t) e^t dt$.

51. [SR] ★ Soient X une partie non vide d'un espace normé, $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$.

a) On suppose que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur X vers une fonction f . Montrer que f est continue.

b) On suppose que X est compacte et que, pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de X et tout x de X tels que $x_n \rightarrow x$, on a $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$. Montrer que f est continue et que la convergence est uniforme.

52. [P] ★ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite $(P_n)_{n \geq 0}$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}^+$ convergeant simplement vers f sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

53. [L] ★ Soit $k \in \mathbb{N}$, $(a_n)_{n \geq k+1}$ une suite réelle telle que $\sum |a_n|$ converge et, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \sum_{n=k+1}^{+\infty} a_n \cos(nx).$$
 Minorer le nombre de zéros de f sur $[-\pi, \pi[$.

54. [P] ★ Déterminer la limite en $+\infty$ de $\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^k} \right)^{1/x}$.

55. [PLSR] ★ Existe-t-il une fonction $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ somme d'une série entière, on ait $f(x) = o(g(x))$ quand x tend vers $+\infty$?

56. [P] ★ Déterminer la limite de $\frac{1}{A} \int_1^A A^{1/x} dx$ lorsque A tend vers $+\infty$.

57. [P] ★ Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Soit $\lambda \in]0, 1[$.

a) Montrer que, pour tout réel t , l'ensemble $A_t = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n X_n \leq t \right)$ est un événement.

b) Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{P}(A_t)$ est continue.

58. [PLSR] ★ a) Soit A une partie de $\mathbb{R}^n$. Soit x dans l'enveloppe convexe de A . Montrer que x peut s'écrire comme combinaison convexe d'une famille de $n + 1$ points de A .

b) On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne standard. Soit T une partie de la boule unité fermée, et x un point de l'enveloppe convexe de T . Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe

une liste $(x_1, \dots, x_k) \in T^k$ telle que $\left\| x - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i \right\| \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Ind. Introduire des points deux à deux distincts $y_1, \dots, y_p$ de T et des réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_p$

tels que $x = \sum_{i=1}^p \lambda_i y_i$ et $1 = \sum_{i=1}^p \lambda_i$, puis considérer une variable aléatoire X telle que

$\mathbf{P}(X = y_i) = \lambda_i$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

59. [P] ★ On considère une suite infinie de tirages à pile ou face avec une pièce équilibrée. On considère la variable aléatoire T donnant le premier instant k pour lequel il existe $i \in \llbracket 1, k - 1 \rrbracket$ tel que $k - i$ soit pair, les lancers aux instants k et i aient donné face, et les lancers à tous les instants strictement compris entre k et i aient donné pile. Montrer que T est d'espérance finie, et calculer son espérance.

60. [P] ★ On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que le nombre de Pile soit égal au double du nombre de Face. Quelle est la probabilité de ne jamais s'arrêter ?

61. [P] ★ Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite i.i.d de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^+$. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\mathbf{P}(X_1 \geq x) > 0$.

Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :

i) pour tout réel $\alpha > 1$, on a $\mathbf{P}(X_1 \geq \alpha x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o(\mathbf{P}(X_1 \geq x))$;

ii) il existe une suite $(b_n)_{n \geq 1}$ divergeant vers $+\infty$ et telle que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{b_n} \max_{1 \leq i \leq n} X_i - 1\right| > \varepsilon\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Écoles Normales Supérieures - PSI

62. ★ ◊ Dénombrer les permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ dont les cycles, dans la décomposition en cycles à support disjoints, sont tous de longueur paire.

Écoles Normales Supérieures - PC

63. ★ Soit V un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que $I_2 \in V$.

b) Donner un exemple de tel hyperplan V .

c) Montrer qu'il existe $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}VP$ contienne toutes les matrices diagonales.

d) Montrer qu'il existe $Q \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}VQ = \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$.

64. ★ ◊ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f vérifie $(*)$ si et seulement si :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$.

a) Déterminer les fonctions continues vérifiant $(*)$.

b) Si f vérifie $(*)$ et si f n'est pas linéaire, montrer que le graphe de f est dense dans $\mathbb{R}^2$.

c) Déterminer les f vérifiant $(*)$ et pour lesquelles il existe $n > 1$ tel que :

$\forall x > 0, f(x^n) = f(x)^n$.

65. ★ Soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $X_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$, des variables aléatoires i.i.d suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, M_n la matrice aléatoire $(X_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$.

a) Calculer $\mathbf{E}(\text{tr}((M_n)^k))$ pour $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

b) Calculer $\mathbf{E}(\det(M_n))$ et $\mathbf{E}((\det M_n)^2)$.

c) Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Montrer que $\mathbf{P}\left(|\det(M_n)| \geq f(n) \sqrt{n!}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} 0$.

École Polytechnique - MP

66. ★ ◊ Soient a et b dans $\mathbb{N}^*$, $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ deux suites à valeurs dans un ensemble E , respectivement a -périodique et b -périodique. On suppose qu'il existe $a + b - a \wedge b$ entiers relatifs consécutifs tels que $x_n = y_n$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

67. $\diamond \star$ Soit $p \geq 3$ un nombre premier. On définit l'application v de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ en posant $v(0) = +\infty$ et, si $(a, b, k) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$ vérifie $a \wedge b = ab \wedge p = 1$, $v\left(p^k \frac{a}{b}\right) = k$.

a) Pour $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$, montrer que $v(xy) = v(x) + v(y)$, $v(x + y) \geq \min(v(x), v(y))$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $v(n!) < \frac{n}{p-1}$.

c) Soit $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in \mathbb{Q}[X]$. Pour $i \in \mathbb{N}$, soit $v^{(i)}(P) = \min\{v(a_j) ; j \in \mathbb{N}, j \geq i\}$.

On fixe $m \in \mathbb{N}$, $R = (X - m)P$. Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}$, $v^{(i+1)}(R) \geq v^{(i)}(P)$.

d) Soient $(d_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k p^k$. Montrer que, si la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'annule une infinité de fois, elle est identiquement nulle.

68. $\star$ Soit G un groupe fini. Pour $x \in G$, on note $\bar{x}$ la classe de conjugaison de x : $\bar{x} = \{gxg^{-1} ; g \in G\}$; on dit que x est ambivalent si $x^{-1} \in \bar{x}$.

a) Montrer que si une classe de conjugaison contient un élément ambivalent, alors tous ses éléments le sont.

b) Pour $x \in G$, soit $\rho(x)$ le nombre de $g \in G$ tels que $g^2 = x$. Montrer que $\frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \rho(x)^2$ est le nombre de classes de conjugaison ambivalentes de G .

69. $\star \diamond$ Soit P un polynôme complexe non nul ayant au moins deux racines distinctes et tel que P'' divise P .

a) Montrer que P est à racines simples.

b) Montrer que les racines de P sont alignées.

70. $\star \diamond$ Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ des nombres complexes de module au plus 1, $P = \prod_{i=1}^d (X - \lambda_i)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $f(n) = \sum_{i=1}^d \lambda_i^n$. On suppose que $P \in \mathbb{Z}[X]$.

a) Montrer que $f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$.

b) Montrer que f est périodique à partir d'un certain rang.

c) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, λ_i est nul ou racine de l'unité.

71. $\star$ Soient $m_1, \dots, m_n$ des éléments de $\mathbb{N}^*$, $x_1 < \dots < x_n$ des nombres réels, $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ et, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_i ; 1 \leq i \leq n\}$, $f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{x - x_i}$. Montrer que $f^{-1}([\lambda, +\infty[)$ est une réunion finie d'intervalles bornés. Calculer la somme des longueurs de ces intervalles.

72. $\star$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et σ dans $\mathcal{S}_n$, soit P_σ la matrice de permutation associée à σ . Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $T_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \det(I_n + P_\sigma)$.

a) Calculer $\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n} (1 + \omega)$.

- b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et σ dans $\mathcal{S}_n$, calculer $\det(I_n + P_\sigma)$.
 c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n+1} = 2T_n + n(n-1)T_{n-1}$.
 d) Donner une formule simple pour T_n .

73. ★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer les polynômes minimaux de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

74. ★ Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels qu'existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de polynôme minimal $X^3 + 2X + 2$.
 Même question dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

75. ★ Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$.

- a) Montrer que pour tout $u \in \text{GL}(E)$ il existe un unique polynôme $I_u \in \mathbb{C}[X]$ de degré minimal tel que $u^{-1} = I_u(u)$, et justifier que $\deg I_u < n$.
 b) Étudier la continuité de $u \in \text{GL}(E) \mapsto I_u \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

76. ★ Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que la classe de similitude de M est connexe par arcs si et seulement si M est diagonalisable.

77. ★ Soient $C = [-1, 1]^2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Étudier la suite $(f^{\circ n})_{n \geq 0}$ sous les hypothèses suivantes : **i)** $f(C) \subset [-1/2, 1/2]^2$, **ii)** $f(C) \subset]-1, 1[^2$, **iii)** $f(C) \subsetneq C$.

78. ★ Soient C l'algèbre des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, A une sous-algèbre de C , $\bar{A}$ l'adhérence de A pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

- a) Montrer que, si f et g sont dans $\bar{A}$, il en est de même de $\min(f, g)$.
 b) Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \dots, f_m$ dans $\bar{A}$. Montrer que $\min(f_1, \dots, f_m)$ et $\max(f_1, \dots, f_m)$ sont dans $\bar{A}$.

On suppose désormais que A sépare les points : pour a et b dans $[0, 1]$ distincts, il existe $f \in A$ telle que $f(a) \neq f(b)$.

c) Soient a et b deux éléments distincts de $[0, 1]$, α et β deux nombres réels. Montrer qu'il existe $f \in A$ tel que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$.

On admet que, de tout recouvrement ouvert de $[0, 1]$, on peut extraire un recouvrement fini.

d) Soit $f \in C$. Montrer que, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}^{+*}$ et $x \in [0, 1]$, il existe $g_x \in \bar{A}$ telle que $g_x(x) = f(x)$ et $g_x \leq f + \varepsilon$.

e) Montrer que $\bar{A} = C$.

79. ★ Soient $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ avec $0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_n < 1$ et $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

On suppose que la suite de terme général $u_p = \sum_{j=1}^n a_j \cos(\pi p \theta_j)$ tend vers 0. Montrer :

$\forall j \in \{1, \dots, n\}, a_j = 0$.

80. ★ Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$, soit $(v_n)_{n \geq 2}$ définie par $\forall n \geq 2, v_n = \frac{1}{\ln(n)} \sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}$.

a) Que dire de $(v_n)_{n \geq 2}$ si $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers le réel ℓ ?

b) On suppose que u_n est égal à 1 si le premier chiffre de l'écriture de n en base 10 est 1, à 0 sinon. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k$. Étudier la convergence de $(v_n)_{n \geq 2}$, puis celle de (w_n) .

81. ★ Si f est une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$, on note $M(f)$ la fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M(f)(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k)$.

a) Montrer que, pour toute fonction f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^{(k)}(f)(n) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} f(1)$.

b) Montrer que, si f est polynomiale, il en est de même de $M(f)$.

82. ★ Si $k \in \mathbb{N}^*$, soit $d(k)$ le nombre de diviseurs de k dans $\mathbb{N}^*$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $D_n = \sum_{k=1}^n d(k)$. Donner un équivalent de D_n .

b) Soit γ la constante d'Euler. Montrer que $D_n = n \ln(n) + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$.

83. ★ On fixe un nombre premier p . On note $\mathbb{F}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{F}_p[X]$, H le demi-plan des nombres complexes de partie réelle strictement supérieure à 1.

a) Soit $s \in H$. Montrer que la famille $(p^{-s \deg(F)})_{F \in \mathcal{P}}$ est sommable : on note $\xi(s)$ sa somme dans la suite de l'énoncé.

b) On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des polynômes unitaires de $\mathbb{F}_p[X]$ qui sont sans facteur carré, autrement dit sans facteur multiple dans leur décomposition en facteurs irréductibles. Soit $s \in H$. On note $\xi_2(s) = \sum_{F \in \mathcal{D}} p^{-s \deg(F)}$. Montrer que $\xi(2s) = \frac{\xi(s)}{\xi_2(s)}$.

c) Soit $k \geq 2$ entier. Montrer qu'il y a exactement $p^k - p^{k-1}$ polynômes unitaires de $\mathbb{F}_p[X]$ de degré k et sans facteur carré.

84. ★ Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial.

a) Montrer qu'il n'existe pas de $R \in \mathbb{R}(X)$ sans pôle dans I tel que $x \in I \mapsto R(x)e^{-x^2}$ soit une primitive de $x \in I \mapsto e^{-x^2}$.

b) Soient $G \in \mathbb{R}(X)$ sans pôle dans I , $H \in \mathbb{R}[X, Y]$.

On suppose : $\forall x \in I$, $H(x, e^{G(x)}) = 0$. Montrer que $H = 0$.

85. ★ On note E l'espace vectoriel $C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ est appelée base de type S lorsque pour tout $f \in E$ il existe une unique suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n g_n \text{ avec convergence uniforme.}$$

a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de $[0, 1]$ telle que $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, et $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans $[0, 1]$.

b) Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de type S . Montrer que $\left(\frac{g_n}{\|g_n\|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de type S .

c) Soit $f \in E$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n la fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui est continue, affine sur chaque intervalle ouvert inclus dans $[0, 1] \setminus \{x_0, \dots, x_n\}$, et coïncide avec f en $x_0, \dots, x_n$. Montrer que $(F_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

d) En déduire l'existence d'une base de type S .

86. ★ a) Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, g une fonction continue par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{C}$. Montrer que $\int_a^b g(t) \sin(\lambda t) dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.

b) Soit f une fonction de classe C^1 par morceaux et 2π -périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, soit $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt$.

Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (f(t^+) + f(t^-))$.

87. ★ a) La fonction g est définie par $g(0) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g(x) = \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$. Montrer que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais n'est développable en série entière sur aucun intervalle ouvert contenant 0.

b) Soit f une fonction de classe C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est développable en série entière en 0 si et seulement s'il existe $a > 0$, $M > 0$, $A > 0$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-a, a], |f^{(n)}(x)| \leq M A^n n!.$$

c) Établir l'existence de $A > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g^{(n)}(x)| \leq (n!)^{3/2} A^n$.

88. ★ Soient $R > 0$ et $(a_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ avec $a_1 \neq 0$. On suppose que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est supérieur ou égal à R . On cherche à construire $(b_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ telle que

$g : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$ ait un rayon de convergence > 0 et $(f \circ g)(z) = z$ au voisinage de 0.

a) Montrer qu'il existe une unique suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ telle que $(*)$:

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, f\left(\sum_{n=1}^N b_n z^n\right) = z + o(z^N)$$

b) Soit $(A_n)_{n \geq 1} \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}^*}$ telle que $A_1 = |a_1|$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n \geq |a_n|$. On suppose que le rayon de convergence de $\sum A_n z^n$ est strictement positif. On définit, au voisinage de 0, la

fonction $F : z \mapsto A_1 z - \sum_{n=2}^{+\infty} A_n z^n$. On considère la suite $(B_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^*}$ telle que, pour

tout $N \in \mathbb{N}^*$, $F\left(\sum_{n=1}^N B_n z^n\right) = z + o(z^N)$. Montrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $B_n \geq |b_n|$.

c) Soit $r \in]0, R[$ et $M = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| r^n$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_N = \frac{M}{r^N}$. Montrer que les

rayons de convergence de $\sum B_n z^n$ et de $\sum b_n z^n$ sont strictement positifs.

d) Conclure.

89. ★ Pour $x \in]-1, 1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n(x) = \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-x^k}$.

a) Montrer que, si $x \in]-1, 1[$, $(P_n(x))_{n \geq 1}$ converge. On note $P(x)$ la limite.

b) Montrer que, pour $x \in]-1, 1[$, $P(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n$, où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_n est le nombre de façons d'écrire n comme somme d'éléments de $\mathbb{N}^*$ sans tenir compte de l'ordre.

c) Montrer que, lorsque $x \rightarrow 1^-$, $P(x) = \exp\left(\frac{\pi^2}{6(1-x)}(1+o(1))\right)$.

d) Montrer que, lorsque $n \rightarrow +\infty$, $p_n \leq \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}(1+o(1))\right)$.

90. ★ On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne canonique, notée $\|\cdot\|$ et on considère $\rho \in \mathbb{R}^{+*}$, v une application de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même ρ -lipschitzienne pour $\|\cdot\|$, X une application de classe C^1 telle que $\forall t \in [0, 1]$, $X'(t) = v(X(t))$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \{0, \dots, N\}$, on pose $X_k^N = X\left(\frac{k}{N}\right)$ et on définit par récurrence $\xi_0^N = X(0)$ et si $k \geq 1$, $\xi_k^N = \xi_{k-1}^N + \frac{1}{N}v(\xi_{k-1}^N)$. On note pour $k \in \{0, \dots, N\}$, $\varepsilon_k^N = \|\xi_k^N - X_k^N\|$ et $\varepsilon^N = \max\{\rho_k^N; k \in \{0, \dots, N\}\}$. Montrer que $\varepsilon^N \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$.

91. ★ On note G le groupe des bijections affines du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$ dans lui-même.

a) Montrer que G est isomorphe au groupe des matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$.

b) Pour $g \in G$, on note (a_g, b_g) l'unique couple de complexes tel que $g : z \mapsto a_g z + b_g$. À quelle condition sur (a_g, b_g) l'application g admet-elle un unique point fixe ?

c) Soit $(g_1, g_2, g_3) \in G^3$. On pose $h = g_1^3 g_2^3 g_3^3$. Calculer a_h et b_h en fonction des a_{g_i} et b_{g_i} .

d) On admet que si $a_{g_1} a_{g_2} a_{g_3} = j$ et si $a_{g_1}, a_{g_2}, a_{g_3}$ sont tous distincts de j , alors

$$b_h = -j^2 a_{g_1}^2 a_{g_2} (a_{g_1} - j)(a_{g_2} - j)(a_{g_3} - j)(\alpha + \beta j + \gamma j^2),$$

où α, β, γ désignent les points fixes respectifs de $g_2 g_3$, $g_3 g_1$ et $g_1 g_2$.

On se donne un triangle direct ABC du plan complexe. On note respectivement a, b, c les mesures principales des angles orientés $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. On note α l'unique point tel que $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B\alpha})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C\alpha})$; β l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\beta})$ et $\frac{c}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C\beta})$; γ l'unique point tel que $\frac{a}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\gamma})$ et $\frac{b}{3}$ soit une mesure de $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{B\gamma})$.

Montrer que le triangle $\alpha\beta\gamma$ est équilatéral. On appliquera ce qui précède en prenant pour g_1 (resp. g_2, g_3) la rotation de centre A (resp. B, C) et d'angle de mesure $\frac{2a}{3}$ (resp. $\frac{2b}{3}, \frac{2c}{3}$).

92. ★ Soient φ une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, $Z = \varphi^{-1}\{0\}$.

a) Soit $z \in Z$ tel que $\nabla\varphi(z) \neq 0$. Que dire de Z au voisinage de z ?

b) On suppose que Z compacte, non vide, et que $\nabla\varphi$ ne s'annule pas sur Z . Quelle est l'image de $z \in Z \mapsto \frac{\nabla\varphi(z)}{\|\nabla\varphi(z)\|}$?

93. ★ Soient c et λ deux éléments de $]0, 1[$, $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que $X_0 = c$ et, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ $\mathbf{P}(X_{n+1} = (1 - \lambda)x + \lambda \mid X_n = x) = x$, $\mathbf{P}(X_{n+1} = (1 - \lambda)x \mid X_n = x) = 1 - x$.

a) Montrer que, si $n \in \mathbb{N}$, X_n est presque sûrement à valeurs dans $]0, 1[$ et que l'ensemble $\{x \in]0, 1[; \mathbf{P}(X_n = x) > 0\}$ est de cardinal majoré par 2^n .

b) Si $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbf{E}(X_n)$.

c) Montrer qu'il existe $\mu_2 > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\mathbf{E}(X_n^2) - c| \leq \exp(-\mu_2 n)$.

d) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $\mu_p > 0$ et $m_p > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\mathbf{E}(X_n^p) - c| \leq m_p \exp(-\mu_p n)$.

e) Si $t \in \mathbb{R}^{+*}$, quelle est la limite de la suite $(\mathbf{E}(t^{X_n}))_{n \geq 0}$?

94. ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une famille $(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On note A l'événement : la matrice

$(X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est inversible. Montrer que $\mathbf{P}(A) \geq \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$.

95. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, M une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, N une matrice aléatoire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi uniforme sur $\{0, 1\}$. Montrer que $\mathbf{P}(M \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{R})) = \mathbf{P}(N \in \text{GL}_n(\mathbb{R}))$.

96. ★ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{kn^{k-1}}{(n+k)!} = \frac{1}{n!}$.

b) Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Poisson de paramètre 1.

On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \mathbf{P}(T_n \geq x) dx = \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$.

École Polytechnique - ESPCI - PC

97. ★ $\diamond$ Soient $n \geq 3$, $a_1, \dots, a_n$ des complexes de module 1. Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ de module 1 tel que $\prod_{i=1}^n |z - a_i| = 1$.

Mines-Ponts - MP

98. ★ $\diamond$ a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\forall (A, t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^+$, $\det(A^2 + tI_n) \geq 0$.

b) On suppose $n \in \mathbb{N}$ impair. Montrer que $-I_n$ n'est pas somme de deux carrés de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

99. ★ Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ A^{-1} & I_n \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que B soit diagonalisable.

100. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$, $C \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$. Montrer que $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si A et B sont diagonalisables et il existe $X \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ tels que $AX - XB = C$.

101. ★ Soient $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$, g une surjection continue croissante de $[0, 1]$ sur lui-même et Φ l'endomorphisme de E défini par $\forall f \in E$, $\Phi(f) = f \circ g$. Soit V un sous-espace de dimension finie de E stable par Φ . Montrer que Φ induit un automorphisme φ de V dont la seule valeur propre est 1. En déduire que $\varphi = \text{id}_V$.

102. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que ${}^t\overline{M}M = I_n$.
a) Soit $A \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ symétrique. En considérant les parties réelle et imaginaire de A , montrer que A s'écrit e^{iS} où $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Réciproque ?
b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $A \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si A s'écrit Oe^{iS} avec $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

103. ★ Soient C une partie convexe d'un espace normé réel E , D une partie de E telle que $C \subset D \subset \overline{C}$. Montrer que D est connexe par arcs.

104. ★ a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Montrer que, pour $n = 2$ et $n = 3$, $\mathcal{O}_n(\mathbb{Q})$ est dense dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Que dire pour n quelconque ?

105. ★ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$. Donner un équivalent de $U_n = \sum_{k=1}^n \sigma(k)$.

106. ★ Nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2(x)} dx$.

107. ★ Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pose $[A, B] = AB - BA$, on suppose que A et B commutent avec $[A, B]$. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $f(t) = e^{tA}e^{tB}e^{-\frac{t^2}{2}[A, B]}$.
a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $A^k B - BA^k = kA^{k-1}[A, B]$.
b) Trouver une équation différentielle vérifiée par f .
c) Montrer que $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{[A, B]}{2}}$.

108. ★ On considère une urne contenant a boules blanches et b boules rouges. Après chaque tirage, on remet c boules de la couleur tirée dans l'urne. On effectue n tirages et on note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges tirées.

- a) Déterminer la loi de X et calculer son espérance.
 b) On considère Y la variable aléatoire donnant le numéro du premier tirage pour lequel on tire une boule rouge. Montrer que Y admet une espérance et calculer la loi de Y .

109. ★ Soient $p \in]0, 1[$, $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Bernoulli de paramètre p . On pose $L_1 = \max\{k \in \mathbb{N}^* ; X_1 = X_2 = \dots = X_k\}$ si cet ensemble est fini, $+\infty$ sinon.

- a) Montrer que L_1 est presque sûrement fini, donner sa loi, son espérance et sa variance.
 b) Si $L_1 < +\infty$, soit $L_2 = \max\{\ell \in \mathbb{N}^* ; X_{L_1+1} = X_{L_1+2} = \dots = X_{L_1+\ell}\}$ si cet ensemble est fini, $+\infty$ sinon. Montrer que L_2 est presque sûrement fini, donner sa loi, son espérance et sa variance.

Mines-Ponts - PSI

110. ★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(A)$ est diagonalisable et $P'(A)$ est inversible. Montrer que A est diagonalisable.

Mines-Ponts - PC

111. ◊ ★ Soient A et B deux événements indépendants de $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On pose $Z = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B$.

- a) Déterminer $Z(\Omega)$.
 b) Montrer qu'il existe $k \in Z(\Omega)$ tel que $P(Z = k) \geq 4/9$.

Centrale - MP

112. ★ Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$. On suppose que $a_n S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

- a) Montrer que $\sum a_k^2$ diverge.
 b) Donner un équivalent de a_n .

Centrale - PSI

113. ★ Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

- a) Montrer que les boules de E sont convexes.
 b) Soit C une partie convexe de E . On suppose que C est dense dans E . Montrer que $C = E$:
 i) dans le cas où $E = \mathbb{R}$; ii) dans le cas général.

Centrale - PC

114. ★ ◊ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose : $e^{2i\pi P(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Montrer : $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n) \in \mathbb{Z}$.