Épreuves orales corrigées des concours d'entrée aux grandes écoles

Les énoncés marqués d'une étoile seront corrigés ultérieurement.
Le comité de rédaction remercie Olivier Bouverot, Denis Choimet, Michel Cognet, Pierre-Jean Desnoux, Yves Dutrieux, Alexis Fagebaume, Yoann Gentric, Cyril Germain, Hervé Gianella, Max Hochart, Denis Jourdan, Thomas Lafforgue, Christelle Larchères, François Lussier, Roger Mansuy, Bruno Morel, François Moulin, Jean Nougayrède, Renaud Palisse, Marc Rezzouk, Eddy Routin, Cécile Stérin, Philippe Patte, Christophe Schneider, Cécile Stérin, Brice Touzillier, pour leurs contributions à cette liste d'exercices.
Les lecteurs désirant faire parvenir des solutions d'exercices à la rédaction sont priés de le faire avant le 22 février 2023, de préférence par courrier électronique en pdf et si possible en Tex à l'adresse : exercices@rms-math.com.

1. [P] Soient $m, M, r \in \mathbb{N}$, avec $r \geqslant 3$, $k_0, \ldots, k_M \in \mathbb{Z}$ tels que $\sum_{i=0}^{M} k_i r^i = \sum_{i=0}^{m} r^i$. Montrer que $\sum_{i=0}^{M} |k_i| \geqslant m+1$.

6. [L] On prend pour $\mathbb{K}$ l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

***a)* Déterminer les éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec tous les autres.**

***b)* Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ l'ensemble quotient de $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ pour la relation de colinéarité entre vecteurs. On choisit un élément ∞ hors de $\mathbb{K}$. Montrer que l'on définit une bijection de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ en associant à la classe de (a, b) le nombre $\frac{a}{b}$ si $b \neq 0$, et ∞ si $b = 0$.**

***c)* On note $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K})$ le quotient de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ par la relation d'équivalence définie comme suit : $P \sim Q \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbb{K}^* : P = \alpha Q$. Montrer qu'il existe une unique structure de groupe sur $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K})$ faisant de la projection canonique $P \mapsto [P]$ un morphisme de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K})$. On munit $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{K})$ de cette structure de groupe dans toute la suite de l'énoncé.**

***d)* Montrer que, pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathbb{K}^n$, la classe de colinéarité du vecteur PX ne dépend que de la classe de P modulo $\sim$ et de la classe de colinéarité de X. On obtient ainsi une fonction $\rho : \mathrm{PGL}_n(\mathbb{K}) \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ envoyant systématiquement**

le couple $([P],[X])$ sur $[PX]$. On notera $g.x := \rho(g,x)$ pour $g \in \mathrm{PGL}_n(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$.

e) **Soit $g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ représenté par la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Montrer que, via l'identification de la question *b)* entre $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$, l'application $x \mapsto g.x$ s'identifie à l'homographie $\rho_g : z \in \mathbb{K} \cup \{\infty\} \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$, en convenant que $\dfrac{az+b}{cz+d} = \infty$ si $z \in \mathbb{K}$ et $cz+d = 0$, $\dfrac{a\infty+b}{c\infty+d} = \dfrac{a}{c}$ si $c \in \mathbb{K}$, et $\dfrac{a\infty+b}{c\infty+d} = \infty$ si $c = 0$.**

f) **Soit a, b, c des éléments distincts de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, et a', b', c' des éléments distincts de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K})$ tel que $(a', b', c') = (g.a, g.b, g.c)$.**

g) **Pour $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, on note $S_x := \{g \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{K}) \; : \; g.x = x\}$. Expliciter S_0, S_∞, $S_0 \cap S_\infty$ et $S_0 \cap S_\infty \cap S_1$ (avec l'identification précédente entre $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ et $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$).**

h) **Montrer que, dans le groupe $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$, tout élément d'ordre 2 est conjugué à l'élément dont l'homographie associée est $z \mapsto -z$.**

8. [PLSR] Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $\epsilon(\sigma)$ sa signature et $\nu(\sigma)$ son nombre de points fixes. Calculer $\displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \frac{\epsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1}$.

9. [P] Déterminer les inversibles de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[X]$.

13. [L] Si G est un groupe, on note $\mathrm{sub}(G)$ l'ensemble des sous-groupes de G. Soit G, H deux groupes finis de cardinaux premiers entre eux.
Montrer que $|\mathrm{sub}(G \times H)| = |\mathrm{sub}(G)| \times |\mathrm{sub}(H)|$.

14. *a)* Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$ telle que : $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+p} \leqslant a_n + a_p$. Montrer que la suite de terme général a_n/n converge vers $\inf \left\{ \dfrac{a_k}{k}, \; k \in \mathbb{N}^* \right\}$.

b) **Soient G un groupe multiplicatif, S une partie génératrice finie de G stable par passage à l'inverse.**
Pour $x \in G$, on pose $L_S(x) = \min\{n \in \mathbb{N} \; ; \; \exists (s_1, \ldots, s_n) \in S^n, \; x = s_1 \ldots s_n\}$. Pour Φ morphisme de G, on pose $\Lambda_S(\Phi) = \max\{L_S(\Phi(x)), \; x \in S\}$. Montrer que la suite de terme général $\dfrac{1}{n} \ln(\Lambda_S(\Phi^n))$ tend vers une limite ne dépendant pas de S.

15. Si A est un anneau commutatif et I un idéal de A, on dit que I est premier si $A \setminus I$ est stable par multiplication, que I est maximal si le seul idéal de A contenant strictement I est A.

a) **Montrer que tout idéal maximal est premier.**

b) **Soient $n \geqslant 3$ un nombre premier, $A = \mathbb{Z}[e^{2i\pi/n}]$. Montrer que tout idéal premier de A est maximal.**

21. [L] Soit p un nombre premier, dont on note $p = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0}^{10}$ l'écriture décimale. Montrer que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

29. [PLSR] Soit $d \in \mathbb{N}^*$, et $0 < a_1 < \ldots < a_d$ des entiers. On pose $P_n = \prod_{k=1}^{d} (X - na_k) - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

***a)* Montrer que, pour n assez grand, P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.**

***b)* Pour tout $n \geqslant 1$ pour lequel P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, et tout $k \in [\![1, d]\!]$, on note $x_n^{(k)}$ la k-ième racine de P_n dans l'ordre croissant. Déterminer, pour n'importe quel $k \in [\![1, d]\!]$, un équivalent de $x_n^{(k)}$ lorsque $n \to +\infty$.**

***c)* Montrer que P_n est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ pour tout $n \geqslant 1$.**

39. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $q \in [\![0, n]\!]$ la multiplicité de 0 dans le polynôme caractéristique de A.

***a)* Montrer l'existence et l'unicité de $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $AX = XA$, $A^{q+1}X = A^q$ et $XAX = X$.**

***b)* Que dire si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?**

***c)* L'application φ qui, à $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, associe la matrice X définie en question *a)* est-elle continue ?**

***d)* Soit (A_k) une suite convergente de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (A_k) pour que $\lim_{k\to\infty} \varphi(A_k) = \varphi\Big(\lim_{k\to\infty} A_k\Big)$.**

40. [PLSR] Soient $n \in \mathbb{N}^*$ impair, A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$. Montrer que $A + iB$ admet un vecteur propre réel.

44. [PLSR] *a)* Quelle est la dimension maximale d'une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendrée par une matrice nilpotente ?

***b)* Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \ldots, A_m$ des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent deux à deux, $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ engendrée par $A_1, \ldots, A_m$. Montrer que la dimension de $\mathcal{A}$ est majorée par $n\,(n - \min\{\mathrm{rg}(A_i)\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant m\})$.**

45. [PLSR] Déterminer tous les morphismes d'algèbres de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vers $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

46. [PLSR] On note E l'ensemble des suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ de carré sommable. On fixe $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$, et on considère l'opérateur $T_{a,b} : u \in E \longmapsto (au_{n+1} + bu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $T_{a,b} - \lambda\,\mathrm{id}$ ne soit pas bijectif.

49. [P] *a)* Montrer que si n est impair alors $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ne contient aucune matrice inversible.

b) **On suppose n pair. On note $I = \{(i,j) \in \mathbb{N}^2 : 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$. Montrer qu'il existe une fonction polynomiale $P : \mathbb{R}^I \to \mathbb{R}$ telle que $\det(A) = P^2\big((a_{i,j})_{(i,j)\in I}\big)$ pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$.**

50. [P] Soit E un espace euclidien, G un sous-groupe fini d'ordre $n > 1$ de $\mathcal{O}(E)$, et v un vecteur unitaire de E tel que $\|g(v) - v\|^2 < \dfrac{2n}{n-1}$ pour tout $g \in G$. Montrer qu'il existe un vecteur $w \in E \setminus \{0\}$ tel que $g(w) = w$ pour tout $g \in G$.

52. [SR] Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques. Si -1 n'appartient pas au spectre de $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f(B) = (I_n - B)(I_n + B)^{-1}$.

a) **Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, montrer que -1 n'est pas valeur propre de A.**

b) **Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $f(A)$ est dans $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et que -1 n'est pas valeur propre de $f(A)$.**

c) **Examiner la réciproque de la propriété démontrée dans la question précédente.**

d) **Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Que vaut $f(f(A))$? Que peut-on en déduire ?**

e) **Expliciter $f(A)$ pour $n = 2$.**

f) **Déduire de ce qui précède le théorème de réduction des matrices antisymétriques pour n pair.**

53. [P] Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $U\overline{U}^T = I_n$ et $A = UB\overline{U}^T$. Montrer qu'il existe $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = OBO^T$.

56. [P] Soit $P(X) = a_{2n}X^{2n} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ avec $a_{2n} \neq 0$. Montrer que la fonction associée à P est positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe $A = (A_{i,j})_{0\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_{n+1}^+(\mathbb{R})$ telle que $a_k = \displaystyle\sum_{i+j=k} A_{i,j}$ pour $k \in [\![0, 2n]\!]$.

59. [P] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les fonctions f de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ possédant les propriétés suivantes :
- pour $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $O \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $f(O^TSO) = f(S)$;
- il existe une famille $(f_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall S = (S_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}), \quad f(S) = \prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} f_{i,j}(S_{i,j}).$$

60. [P] L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée.
Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que : pour tous $n, d \in \mathbb{N}^*$, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^d = I_n$ et $\|A^kB - BA^k\| \leqslant \delta$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une matrice $B_1 \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|B_1 - B\| \leqslant \varepsilon$ et $AB_1 = B_1A$.

61. [PLSR] Soit A, B dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\operatorname{tr}\left((AB)^{2^k}\right) \leqslant \operatorname{tr}\left((A^2B^2)^{2^{k-1}}\right).$$

67. [SR] Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

a) **Justifier que AA^T est diagonalisable à valeurs propres positives.
On note $\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$ ses valeurs propres non nulles (avec multiplicité), et $S(A) = (\sqrt{\sigma_1}, \ldots, \sqrt{\sigma_r})$.**

b) **Comparer $S(A)$ à $S(A^T)$.**

c) **Montrer qu'il existe U dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et V dans $\mathcal{O}_p(\mathbb{R})$ telles que $U^T AV = R = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $D = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$, où $S(A) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$.**

d) **On considère $A^* = VR^*U^T$, avec $R^* = \begin{pmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$. Interpréter géométriquement les matrices AA^* et A^*A, en commençant par examiner le cas particulier où A est inversible.**

69. [PLSR] On fixe un entier $n \geqslant 1$.

a) **Déterminer les plus petites constantes C et C' telles que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $\|X\|_2 \leqslant C \|X\|_\infty$ et $\|X\|_\infty \leqslant C' \|X\|_2$.**

b) **Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathbb{R}^n,\ \|AX\|_2 \geqslant \|X\|_\infty$. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{R}^n$ telle que $\|AX\|_2 \geqslant \sqrt{n}\,\|X\|_\infty$.**

c) **Pour deux espaces vectoriels normés E et F de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on note $\|f\| = \sup\limits_{x \in E,\ \|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F$. Lorsque $\dim E = \dim F$, on note**

$$d(E, F) = \inf\left\{\|f\| \times \|f^{-1}\|,\ f \in \mathcal{L}(E, F) \text{ isomorphisme}\right\}.$$

Déterminer $d(E, F)$ lorsque $E = \mathbb{R}^n$ est muni de $\|\ \|_2$, et $F = \mathbb{R}^n$ muni de $\|\ \|_\infty$.

**71. [P] Soit $f : x \in \mathbb{R}^* \mapsto 2x - \dfrac{1}{x}$. On pose $K = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} f^{-n}([-1, 1])$.
Montrer que K est un compact d'intérieur vide, sans point isolé, et que $f(K) = K$.**

**72. [P] On note $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonction bornées de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ celui des fonctions continues. On munit ces espaces de la norme infinie.
Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire continue T de $\mathcal{B}([0, 1], \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\forall f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}),\ T(f) = f$.**

83. [P] Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\lceil x \rceil$ le plus petit entier relatif supérieur ou égal à x. On définit une suite $u \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$, $u_n = 2u_{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 2$ qui est une puissance de 2, $u_n = \lceil (u_{n-1})/3 \rceil$ pour tout entier $n \geqslant 3$ qui est une puissance de 3, et enfin $u_n = u_{n-1}$ pour tout autre entier naturel $n \geqslant 1$. Montrer que u tend vers $+\infty$.

93. [P] Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et bornées telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{4}\left(f(x+1) + f(x-1) + f(x+\pi) + f(x-\pi)\right) = f(x).$$

94. [P] Soit f une fonction de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $(f(x), f'(x)) \neq (0,0)$ pour $x \in [0,1]$. Déterminer la limite, lorsque δ tend vers 0^+, de $\dfrac{1}{\delta}\displaystyle\int_0^1 1_{|f(t)|<\delta}|f'(t)|\mathrm{d}t$.

98. [L] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ strictement décroissante telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x) - f(x+1)}{f(x)}\mathrm{d}x = +\infty$.

103. [SR] Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^+} f = 1$.

On pose $g(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ pour $x \geqslant 0$.

***a)* Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} g = \int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ (dans $\overline{\mathbb{R}}$).**
On suppose à présent que f est décroissante.

***b)* Montrer qu'il existe un unique $m \in \mathbb{R}^+$ tel que $\displaystyle\int_0^m f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.**

***c)* Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x \geqslant m$.**

104. [P] Déterminer l'ensemble des fonctions réelles qui sont limites uniformes sur $[-1,0]$ d'une suite de polynômes à coefficients positifs.

106. [L] On considère une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle $\sum e^{-\lambda_j t}$ converge pour tout $t > 0$. On suppose en outre que $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} e^{-\lambda_j t} \underset{t\to 0^+}{\sim} Bt^{-a}$ pour des réels $B > 0$ et $a > 0$.
On note E l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continues par morceaux et telles que $t \mapsto f(t)\, e^t$ soit bornée, et pour $f \in E$ on note $N(f) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} |f(t)\, e^t|$. On admet que (E, N) est un espace vectoriel normé.
Pour $f \in E$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note $L_t(f) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} f(\lambda_j t)\, t^a$. On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les $f_k : t \mapsto \exp(-kt)$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
Pour $f \in E$, on note $L_0(f) = \dfrac{B}{\Gamma(a)}\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, t^{a-1}\mathrm{d}t$ où $\Gamma(a) := \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

***a)* Montrer que L_t est bien définie, linéaire et continue sur E.**

b) **Montrer que L_0 est bien définie, linéaire, continue et que $L_t(f) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} L_0(f)$ pour tout $f \in \overline{F}$.**

c) **Pour $x > 0$, on note $N_x := \big|\{j \in \mathbb{N}^*,\ \lambda_j \leqslant x\}\big|$. Montrer que $N_x \underset{x\to+\infty}{\sim} B\,\dfrac{x^a}{a\,\Gamma(a)}\cdot$**

107. [SR] Soit a, b deux réels tels que $a \in]0,1[$, $b > 1$ et $ab > 1$.

On pose $f_{a,b} : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$ et $\alpha = -\dfrac{\ln a}{\ln b}\cdot$

a) **Montrer que $f_{a,b}$ est définie sur $\mathbb{R}$, bornée et continue.**

b) **Montrer que $f_{a,b}(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b^{-n\alpha} \cos(b^n \pi x)$ pour tout réel x.**

c) **Montrer qu'il existe un réel $C > 0$ tel que**

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f_{a,b}(x) - f_{a,b}(y)| \leqslant C\,|x-y|^{\alpha}.$$

d) **Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_{x-h}^{x+h} f_{a,b}(t)\,\cos(b^n \pi t)\,\mathrm{d}t$ pour $h = 2b^{-n}$.**

112. [SR] Pour $x \in [-1,1[$, on pose $L(x) = -\displaystyle\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t}\mathrm{d}t.$

a) **Justifier la bonne définition de L sur $[-1,1[$ et montrer que L est prolongeable par continuité en 1.**

b) **Déterminer le développement en série entière de L en 0 et préciser son rayon de convergence.**

c) **Calculer $L(1)$.**

d) **Exprimer à l'aide de L la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2}$.**

e) **Exprimer $L(x) + L(-x)$. Qu'en déduire ?**

115. [P] Soit $f : \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ une fonction 1-périodique intégrable sur $]0,1[$.

a) **Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une subdivision $(a_0,\ldots,a_N)$ de $[0,1]$ telle que chacune des intégrales $\displaystyle\int_{a_i}^{a_{i+1}} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} f(t+k\theta)^2\Big)^{1/2}\,\mathrm{d}t$ soit bien définie.**

On admet alors que leur somme ne dépend pas du choix de la subdivision envisagée, et on la note $\displaystyle\int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n-1} f(t+k\theta)^2\Big)^{1/2}\,\mathrm{d}t$.

b) **Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de**

$$\frac{1}{n}\int_0^1 \Big(\sum_{k=0}^{n-1} f(t+k\theta)^2\Big)^{1/2}\,\mathrm{d}t.$$

121. [P] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue à support compact d'intégrale 1. Déterminer les fonctions $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues bornées telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)\,g(x-t)\,\mathrm{d}t.$

122. [PLSR] Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que A n'ait pas de valeur propre de module r. Donner une interprétation simple de la matrice

$$M(r) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} re^{i\theta}(re^{i\theta}\,I_n - A)^{-1}\mathrm{d}\theta$$

en fonction de la matrice A (on montrera en particulier que $M(r)$ est un projecteur).

125. [SR] *a)* Montrer que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$ converge vers un réel strictement positif noté γ. On pose $\Gamma(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ pour $x > 0$.

b) **Montrer que Γ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.**

c) **Montrer que $\Gamma'(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\,e^{-t}\,\mathrm{d}t$.**

d) **Établir successivement les expressions suivantes pour $\Gamma'(1)$:**

$$\Gamma'(1) = \lim_{y\to 0^+}\left[\int_y^{+\infty}\frac{e^{-x}}{x}\,\mathrm{d}x + \ln y\right] = \int_0^{+\infty} e^{-x}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{1-e^{-x}}\right]\mathrm{d}x.$$

e) **Montrer que**

$$\Gamma'(1) + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{=} \int_0^{+\infty}\frac{e^{-u} - e^{-(n+1)u}}{u}\,\mathrm{d}u + o(1),$$

et conclure que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

130. [L] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère des fonctions dérivables $y_1,\dots,y_n$ et des réels $a_{i,j} \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $y_i' = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,y_j$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y_i(t) = 0$. Montrer que $(y_1,\dots,y_n)$ est liée.

131. [SR] On munit $\mathbb{R}$ d'une structure de groupe de loi notée $\star$, et de neutre noté e. On suppose que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = x \star y$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

a) **Rappeler la définition de la différentielle d'une fonction** $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ **différentiable.**

b) **Montrer que** $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$**,** $\partial_2 f(x \star y, e) = \partial_2 f(x, y)\partial_2 f(y, e)$.

c) **Montrer l'existence de** $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **un** $\mathcal{C}^1$**-difféomorphisme tel que** $\Phi(x \star y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ **pour tout** $(x, y) \in \mathbb{R}^2$**. *Ind.* On pourra chercher** Φ **sous la forme**

$$\Phi(x) = a \int_e^x \frac{\mathrm{d}t}{\partial_2 f(t, e)}.$$

137. [P] Montrer que la fonction $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \mapsto \operatorname{tr}(e^S)$ **est convexe.**

141. [L] *a)* Soit $n \geqslant 3$**. Si** $A = (A_1, \ldots, A_n)$ **est un** n**-uplet de points du plan, on note** $T(A) = (B_1, \ldots, B_n)$**, où** B_i **désigne, si** $1 \leqslant i \leqslant n$**, le milieu de** $[A_i, A_{i+1}]$ **(en convenant que** $A_{n+1} = A_1$**). Étudier la convergence de la suite** $(T^k(A))_{k \geqslant 0}$**.**

b) **Même question en fixant un élément** α **de** $]0, 1[$ **et en considérant que, pour tout** i**,** B_i **est le barycentre de** $((A_i, \alpha), (A_{i+1}, 1 - \alpha))$**.**

150. [SR] Soit $a \in [0, 1]$**. Pour** $z \in [0, 1]$**, on pose** $\varphi_a(z) = 1 - (1 - z)^a$**.**

a) **Montrer l'existence d'une variable aléatoire** X_a **à valeurs dans** $\mathbb{N}^*$ **telle que** $\varphi_a(z) = \mathbf{E}(z^{X_a})$ **pour** $z \in [0, 1]$**.**

b) **Soit** $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ **une suite d'événements indépendants de l'espace probabilisé** $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ **telle que** $\forall k \in \mathbb{N}^*$**,** $\mathbf{P}(A_k) = \dfrac{a}{k}$**. Montrer que** X_a **suit la même loi que la variable aléatoire définie sur** $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbf{P})$ **par** $I(\omega) = \inf\{n \in \mathbb{N}^*,\ \omega \in A_n\}$**.**

c) **Soit** (E) **l'équation** $\forall z \in [0, 1],\ \varphi_a(z) = z\,\varphi(\varphi_a(z))$ **d'inconnue** φ**, fonction génératrice d'une variable aléatoire.**

- ***i)*** **Montrer que, si** $a = \dfrac{1}{2}$**, l'équation** (E) **admet une unique solution.**
- ***ii)*** **Montrer que, si** $a = \dfrac{1}{3}$**, l'équation** (E) **n'a pas de solution.**

151. [PLSR] *a)* Soit $n \geqslant 1$**,** $\sigma > 0$ **et** $X_1, \ldots, X_n$ **des variables aléatoires réelles telles que** $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mathbf{E}(e^{tX_i}) \leqslant e^{t^2\sigma^2/2}$**. Montrer qu'il existe un réel** $C > 0$**, indépendant de** n **et** σ**, tel que** $\mathbf{E}(\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |X_i|) \leqslant C\sigma\sqrt{\ln(2n)}$**.**

b) **Soit** X **une variable aléatoire à valeurs dans** $\mathbb{Z}$**. On suppose qu'il existe un réel** $\alpha > 0$ **tel que** $\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathbf{P}(X = k) = \alpha\, e^{-k^2/2}$**. Montrer que** $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathbf{E}\left(e^{tX}\right) \leqslant e^{t^2/2}$**.**

154. [PLSR] Soient f **une fonction de** $\mathbb{Z}$ **dans** $\mathbb{R}$**,** $(X_k)_{k \geqslant 1}$ **une suite de variables aléatoires réelles discrètes admettant un moment d'ordre** 2**, ayant toutes** m **pour espérance et telles que, si** $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$**,** $\mathbf{Cov}(X_m, X_n) = f(|m - n|)$**.**

a) **On suppose que** $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) \to 0$**. Pour** $n \in \mathbb{N}^*$**, soit** $Y_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$**. Montrer que** $(Y_n)_{n \geqslant 1}$ **converge en probabilité vers** m**.**

b) **On suppose que la suite $(f(k))_{k \geqslant 0}$ est sommable. Montrer que la suite $(n\mathbf{V}(Y_n))_{n \geqslant 1}$ converge vers un nombre réel à préciser.**

158. [PLSR] Soit n, m deux entiers naturels tels que $n \geqslant m$. On note A l'ensemble des injections de $[\![1, m]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$. On note B l'ensemble des surjections de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, m]\!]$. Comparer

$$\frac{|A|}{\left|[\![1, n]\!]^{[\![1,m]\!]}\right|} \quad \textbf{à} \quad \frac{|B|}{\left|[\![1, m]\!]^{[\![1,n]\!]}\right|}.$$

Ind. **Considérer l'ensemble $\mathcal{P}$ des m-listes $(P_1, \dots, P_m)$ de parties non vides partitionnant $[\![1, n]\!]$, l'ensemble E des parties à m éléments de $[\![1, n]\!]$, et dénombrer de deux façons différentes les couples $((P_1, \dots, P_m), A)$ dans lesquels $(P_1, \dots, P_m) \in \mathcal{P}$, $A \in E$, et $A \cap P_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$.**

176. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0, 0) = 0$ et $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

205. On considère deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X est stochastiquement inférieure à Y et on note $X \leqslant_{st} Y$ si l'on a : $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbf{P}\left(X \geqslant t\right) \leqslant \mathbf{P}\left(Y \geqslant t\right)$.

a) **Montrer que $X \leqslant_{st} Y$ si et seulement si toute fonction $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ croissante et bornée vérifie : $\mathbf{E}\left(h(X)\right) \leqslant \mathbf{E}\left(h(Y)\right)$.**

b) **On considère X et Y et à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes, telles que $X \leqslant_{st} Y$. Montrer que : $\mathbf{P}(X \leqslant Y) > 1/2$. Peut-on améliorer ce résultat en mettant $a > 1/2$ au lieu de $1/2$?**

210. Soit $d \in \mathbb{R}^{+*}$.
Pour $a \in \mathbb{R}$ avec $a \not\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$, on pose

$$T_a = \begin{pmatrix} 1 & d^{-1/4} \tan a \\ -d^{1/4} \tan a & 1 \end{pmatrix}.$$

a) **Donner une relation entre $T_a T_b$ et T_{a+b}.**

b) **On suppose que d est un entier supérieur ou égal à 2 et qu'il n'est divisible par le carré d'aucun nombre premier. Soit p, q deux entiers premiers entre eux tels que $p \neq 0$ et q soit impair. Montrer que $d^{-1/4} \tan(\pi p/q)$ est irrationnel.**

211. Soit p un nombre premier congru à 1 modulo 4.
On considère l'ensemble $S = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^*,\ 4ab + c^2 = p\right\}$.

a) **Montrer que S est fini non vide.**
Soient $S_1 = \{(a, b, c) \in S,\ a > b + c\}$ et $S_2 = \{(a, b, c) \in S,\ a < b + c\}$.

b) **Montrer que S est l'union disjointe de S_1 et S_2. Montrer que S_1 et S_2 ont le même cardinal.**

c) **Soit $g : S_1 \to S_1$ définie par $g(a,b,c) = (a-b-c, b, -2b-c)$. À l'aide de g, montrer S_1 a un cardinal impair.**

d) **Soit $S_0 = \{(a,b,c) \in S,\ a \neq b\}$. À l'aide de S_0, montrer que p est somme de deux carrés.**

e) **Montrer qu'un nombre premier impair s'écrivant comme la somme de deux carrés est congru à 1 modulo 4**

f) **Montrer qu'un entier naturel non nul dont tous les diviseurs premiers sont congrus à 1 modulo 4 est somme de deux carrés d'entiers.**

214. **Soient $p \geqslant 3$ premier et $t \in \mathbb{N}^*$. Soient $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers congrus à 1 modulo p^t. On pose $a = 2p_1 \dots p_r$ et $c = a^{p^{t-1}}$.**

a) **Montrer que $c \equiv 2\ [p]$.**

b) **Montrer que $m = 1 + c + \cdots + c^{p-1}$ et $c-1$ sont premiers entre eux.**

c) **Soit q un facteur premier de m. Montrer que $q \equiv 1\ [p^t]$.**

d) **En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo p^t.**

217. **Soit A un anneau commutatif non nul. On dit que $b \in A$ est un diviseur de 0 si $b \neq 0$ et s'il existe $c \neq 0$ tel que $bc = 0$.**

a) **Montrer que, si A est fini et n'admet aucun diviseur de 0, alors A est un corps.**

b) **On pose $B = A[X]$. Montrer que $P \in B \setminus \{0\}$ est un diviseur de 0 si et seulement s'il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $aP = 0$.**

220. **On dit que $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est un polynôme trigonométrique s'il existe $P \in \mathbb{R}[X,Y]$ tel que $f = P(\cos, \sin)$.**
a) **Déterminer les couples (f,g) de polynômes trigonométriques tels que $f^2 + g^2 = 1$.**

b) **Déterminer les polynômes trigonométriques h tels que $\cos(h)$ soit un polynôme trigonométrique.**

222. **Soit V un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les éléments sont de rang inférieur ou égal à r. Montrer que $\dim V \leqslant n \times r$.**

237. **Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre les conditions suivantes :**
i) $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \chi_{AM+B} = \chi_{AM}$**,** ***ii)*** **$B$ est nilpotente et $BA = 0$.**

251. **Si A est une partie de $\mathbb{N}$, on pose** $d(A) = \inf\limits_{n>0} \dfrac{|A \cap [\![1,n]\!]|}{n}$.

a) **Soit A une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que $d(A) \geqslant 1/2$. Montrer que tout élément de $\mathbb{N}$ s'écrit comme somme de deux éléments de A.**

b) **Si A et B sont deux parties de $\mathbb{N}$ contenant 0, montrer que**
$1 - d(A+B) \leqslant (1-d(A))(1-d(B))$.

c) **Si A est une partie de $\mathbb{N}$ contenant 0 et telle que $d(A) > 0$, montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{N}$ soit égal à $A + A + \cdots + A$ (r fois A).**

253. Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ telle qu'il existe $d > 0$ tel que $F(n) = |A \cap [\![1, n]\!]| \sim nd$. On pose $Q = \{a/b,\ (a, b) \in A^2\}$.

a) **Montrer que Q est dense dans $\mathbb{R}^+$.**

b) **On suppose que $d = 1$. Montrer que $Q = \mathbb{Q}^{+*}$.**

c) **Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A \subset \mathbb{N}^*$ telle que $Q \neq \mathbb{Q}^{+*}$ et $\dfrac{F(n)}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} d \geqslant 1 - \varepsilon$.**

261. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{-x^2}$. En combien de points de $\mathbb{R}$ la dérivée n-ième de f s'annule-t-elle ?

263. Soit E l'ensemble des $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in {\mathbb{R}^+}^2, \quad f(xy) = xf(y) + yf(x).$$

a) **Déterminer les éléments de E dérivables sur $\mathbb{R}^+$.**

b) **Montrer que si un élément de E est dérivable en un point de $\mathbb{R}^{+*}$, il est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.**

272. Soient $a \in \mathbb{R}^{+*}$, E l'ensemble des fonctions f de classe C^2 de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f^2 + a(f')^2$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

a) **Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.**

b) **Montrer que, pour tout $v \in \mathbb{R}$, il existe $f \in E$ tel que $f(0) = v$.**

c) **Soit $v \in \mathbb{R}$. Déterminer**

$$\inf \left\{ \int_0^{+\infty} (f^2 + a(f')^2)\ ;\ f \in E, f(0) = v \right\}.$$

274. Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ contenant 0, f développable en série entière sur $D(0, R)$ avec $R > 0$. On suppose que $f(z) = O(z^p)$ lorsque $z \to 0$. Montrer que, pour $r > 0$ assez petit, on peut trouver $2p$ nombres complexes z vérifiant $|z| = r$ et $f(z) \in \mathbb{R}$.

276. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des éléments distincts de $]-1, 1[\setminus \{0\}$, et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des nombres réels. Montrer qu'il existe une suite bornée $(c_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'entiers relatifs telle que la fonction $f : t \in]-1, 1[\mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} c_k t^k$ vérifie $\forall k \in [\![1, n]\!],\ f(\alpha_k) = \beta_k$.

287. Soit $n \geqslant 2$ entier. Dénombrer les (vrais) triangles rectangles de $\mathbb{R}^n$ ayant leurs trois sommets dans $\{0, 1\}^n$.

292. Soient $m \geqslant 2$, $p \in]0,1[$ et $q = 1 - p$. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
On note A_n l'événement « m divise $X_1 + \cdots + X_n$ ».

***a)* Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,**

$$\sum_{\substack{k=0 \\ m|k}}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \left(e^{\frac{2i\pi j}{m}} p + q \right)^n.$$

***b)* Montrer que $\mathbf{P}(A_n)$ converge vers une limite ℓ à préciser.**

***c)* Prouver que $|\mathbf{P}(A_n) - \ell| \leqslant e^{-\frac{8pq}{m^2}n}$.**

298. Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{d-1})$ une liste de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}\cdot$ On note p_d la probabilité pour que le polynôme

$$X^d + \sum_{i=1}^{d-1} \varepsilon_i X^i + 1$$

possède une racine rationnelle. Montrer que $p_d \underset{d\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{\pi d}}\cdot$

299. *a)* Soit $n \geqslant 3$ un entier. Montrer que l'équation $x = n \ln(x)$ admet deux solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$, que l'on note a_n et b_n avec $a_n < b_n$.

***b)* Trouver une suite strictement croissante $(p_k)_{k\geqslant 2}$ d'entiers telle que $p_2 \geqslant 2$, $\sum 2^{-(p_{k+1}-p_k)}$ diverge et qu'existe $C > 0$ tel que, pour tout $k \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{j=p_k}^{p_{k+1}-1} \frac{1}{\ln(j)} \geqslant C$.**

***c)* Soit $(X_n)_{n\geqslant 2}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de Rademacher. Que dire de la convergence de $\sum \dfrac{X_n}{\ln(n)}$?**

348. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,i} \right)^2 \leqslant \mathrm{rg}(A) \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2.$$

359. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{h\to+\infty} \big[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h) \big] = 0.$$

Montrer que f est affine.

366. **Soit** $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

a) **La fonction** $x \mapsto \cos(x) + \cos(\alpha x)$ **est-elle périodique ?**

b) **La fonction** $x \mapsto \sin(x) + \sin(\alpha x)$ **est-elle périodique ?**

c) **Soit** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **continue,** T**-périodique (où** $T > 0$**) et dont le maximum est atteint en un seul point de** $[0, T[$**. La fonction** $x \mapsto f(x) + f(\alpha x)$ **est-elle periodique ?**

380. **Déterminer les réels** λ **pour lesquels il existe** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **deux fois dérivable telle que** $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + (\lambda - x^2)\, f(x) = 0$**,** $f(0) = 0$**, et** f **tende vers** 0 **en** $+\infty$**.**
Ind. **Considérer** $g : x \mapsto f(x)\, e^{x^2/2}$.

394. **Soient** $E = \{1, 2, \ldots, n\}$**,** $\mathcal{F} = \mathcal{P}(E)$**. Montrer qu'il existe une unique bijection** g **de** $\mathcal{F}$ **dans** $\mathcal{F}$ **telle que** $\forall F \in \mathcal{F},\ g(F) \cap F = \emptyset$**.**

435. **Soient** A, B **dans** $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ **telles que** $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$**. Montrer que** BA **est diagonalisable.**

446. **Soient** $n \in \mathbb{N}^*$**,** $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \cap \mathbf{GL}_n(\mathbb{C})$**. On suppose que les valeurs propres de** A **sont de module majoré par** 1**. Montrer que les valeurs propres de** A **sont des racines de l'unité.**

497. **Soit** $(E, \|\ \|)$ **un espace normé de dimension** $n \geqslant 2$**. Montrer que tout point** x **de la boule unité fermée peut s'écrire comme milieu de deux points de la sphère unité.**

630. **Montrer que les fonctions** $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ **vérifiant l'équation aux dérivées partielles :**

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad 2xy \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + (1 + y^2) \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0,$$

sont les applications de la forme

$$f(x, y) = g\left(\frac{x}{1 + y^2}\right),$$

où $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **est une application de classe** C^1**.**

651. ***a)*** **Soit** Y **une variable aléatoire à valeurs dans** $\mathbb{N}$**, majorée par un réel** M**. Montrer que** $\mathbf{E}(Y) \leqslant M\, \mathbf{P}(Y \geqslant 1)$**.**

b) **Soit** $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ **une suite de variables indépendantes à valeurs dans** $\mathbb{N}$**. Soit** $n \in \mathbb{N}^*$**, on pose** $R_n = \mathrm{Card}\{X_1, ..., X_n\}$**. Montrer que**

$$\mathbf{E}(R_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} (X_i = k)\right).$$

c) **On suppose que les X_i suivent la loi géométrique de paramètre p. Donner un équivalent de $\mathbf{E}(R_n)$ quand $n \to \infty$.**

653. Soient X une variable aléatoire réelle discrète, X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi de X. On suppose que $X_1 + X_2 \sim 2X$.

a) **Montrer que, si X admet un moment d'ordre 2, X est presque sûrement constante.**

b) **Démontrer le même résultat sous l'hypothèse X minorée.**

c) **Démontrer le même résultat dans le cas général. On pourra considérer $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{P}(X = x)$ soit maximal.**

695. ***a)*** **Montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que**

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad e^{xt - t^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} H_n(x) t^n.$$

b) **Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)H_{n+1} = XH_n - H_{n-1}$ et que $H_n' = H_{n-1}$.**

c) **On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)\, Q(t)\, e^{-t^2/2} \mathrm{d}t$. Montrer que $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.**

714. ***a)*** **Étudier la convergence et calculer la somme éventuelle de la série de terme général u_n définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - u_n)$.**

b) **Étudier la convergence et calculer la somme éventuelle de la série de terme général v_n définie par $v_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = e^{v_n} - 1$.**

983. PYTHON**.** ***a)*** **Soit G un groupe de cardinal n. Montrer que G est cyclique si et seulement s'il existe un élément de G d'ordre n.**

b) **Écrire une fonction calculant le pgcd de deux entiers a et b, puis une fonction déterminant le nombre de générateurs de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ lorsque p est un nombre premier.**

c) **Si p est un nombre premier et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, déterminer le cardinal de $(\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z})^*$.**

d) **Soit p un nombre premier.**
Montrer, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, que $(p+1)^{p^k} \equiv 1 + p^{k+1} \ \left[p^{k+2}\right]$.

989. ***a)*** **Montrer que $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.**

b) **Un nombre complexe z est un nombre algébrique s'il existe un polynôme P non nul à coefficients rationnels dont z est racine. On note $\mathbb{A}$ l'ensemble des nombres algébriques.**

i) **Montrer que $\mathbb{A}$ est dénombrable.**

ii) **Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est algébrique si et seulement si $\mathbb{Q}[z] = \{P(z),\ P \in \mathbb{Q}[X]\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.**

iii) **Montrer que $\mathbb{A}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.**

c) **Déterminer un polynôme annulateur non nul de $z = \sqrt{2} + \sqrt[3]{5}$.**

1001. **Un endomorphisme f d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit semi-simple si tout sous-espace de E stable par f admet un supplémentaire stable par f.**

a) **Montrer que, si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, alors les endomorphismes semi-simples de E sont les endomorphismes diagonalisables de E.**

b) **Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que les endomorphismes semi-simples de E sont ceux dont le polynôme minimal n'est divisible par aucun carré non constant de $\mathbb{R}[X]$.**

1027. PYTHON. **Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$ tel que $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$.**
On pose $A = \{a_0, \dots, a_n\}$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\|P\|_A = \max\{|P(a_0)|, \dots, |P(a_n)|\}$.
Soit $d_{A,n} = \inf\{\|X^n - P\|_A,\ P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]\}$.

a) **Montrer que $\|\ \|_A$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.**

b) **En utilisant la fonction `fmin` du module scipy.optimize pour minimiser une fonction de deux variables, calculer $d_{\{0,1\},1}$ et $d_{\{0,1,2\},2}$.**

c) **Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Montrer qu'il existe un unique $(b_0, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que :**
$$X^n - P = \sum_{k=0}^{n} b_k \prod_{i \neq k} (X - a_i).$$

d) **Exprimer les b_i en fonction des a_i et des $P(a_i)$. Calculer $b_0 + \cdots + b_n$.**

e) **Montrer que, pour $k \in \{0, \dots, n\}$, $\displaystyle\prod_{i \neq k} |a_k - a_i| \geqslant \frac{n!}{\binom{n}{k}}$.**

f) **Montrer que $\|X^n - P\|_A \geqslant \dfrac{n!}{2^n}$.**

g) **Calculer $d_{\{0,\dots,n\},n}$.**

h) **La norme $\|\ \|_A$ est-elle issue d'un produit scalaire ?**

1032. PYTHON. **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$.**

a) **Tracer les points $\left(k, \binom{200}{k}\right)$ pour $k \in [\![1, 200]\!]$. Commenter la figure obtenue.**

Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{k<n/2}$ est croissante.

b) **Tracer les points (n, u_n) pour $n \in [\![0, 100]\!]$. Conjecturer la convergence de la suite et la valeur de sa limite. Démontrer ce résultat.**

c) **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{\binom{n}{k}} = \frac{n}{2}\, u_n$.**

d) **Établir une relation entre u_n et u_{n+1}.**

1036. PYTHON. **Une suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est dite *équirépartie modulo* 1 lorsque, pour tous a, b réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b < 1$, on a $\frac{1}{n}$ Card$\{k \in [\![1, n]\!],\ \{u_k\} \in [a, b]\} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b - a$, où $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ désigne la partie fractionnaire de x.**

a) i) **Définir une fonction `c(u,n,a,b)` qui calcule :**
$C_n(a, b) =$ **Card**$\{k \in [\![1, n]\!],\ \{u_k\} \in [a, b]\}$.

ii) **Afficher les 500 premiers termes de $C_n(a, b)$ lorsque $u_n = \sqrt{n}$ pour $a = 0$ et $b = 1/2$, puis pour d'autres couples (a, b). Formuler une conjecture.**

iii) **Idem avec $u_n = \ln n$, puis avec $u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.**

b) **On prend $u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$. Trouver une suite v tendant vers 0 telle que $u + v$ soit à valeurs entières. En déduire que u n'est pas équirépartie modulo 1.**

c) **On pose $u_n = \sqrt{n}$. On fixe a, b dans $[0, 1[$ tels que $a \leqslant b$.**

i) **Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $\{u_k\} \in [a, b]$ si et seulement s'il existe un entier p tel que $(p + a)^2 \leqslant k \leqslant (p + b)^2$.**

ii) **En déduire un encadrement de $C_n(a, b)$ à l'aide de $\sum_{p=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor} \big(b^2 - a^2 + 2p(b - a)\big)$.**

iii) **Montrer que (u_n) est équirépartie modulo 1.**

d) **La suite $(\ln n)$ est-elle équirépartie modulo 1 ?**

1039. **Soit $A \subset \mathbb{R}^+$ non vide.**

a) **Montrer que A est compact si et seulement si toute fonction continue de A dans $\mathbb{R}$ est bornée.**

b) **Soit $f : A \to \mathbb{R}$ uniformément continue. Montrer que f est bornée sur $A \cap [0, N]$ pour $N \in \mathbb{N}^*$.**

c) **Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que toute fonction continue de A dans $\mathbb{R}$ soit uniformément continue.**

1059. PYTHON. **On définit une suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ de polynômes par les conditions :**
$A_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A'_{n+1} = A_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 A_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

a) **Déterminer A_1, A_2, A_3. Écrire un code qui calcule A_n (utiliser `numpy.polynomial`).**

b) **Comparer pour plusieurs valeurs de n : $A_n(0)$ et $A_n(1)$; $A_n(X)$ et $A_n(1-X)$. Tracer $x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$ et $x \mapsto \sum_{k=0}^{10} A_k(0)x^k$. Émettre des conjectures.**

c) **Démontrer les conjectures émises.**