ENS option MP

Planche 1 Ulm - Lyon - Saclay - Rennes

Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et E le sous-espace engendré par les g_{uv} définies par $g_{uv}(x) = f(ux+v)$; montrer que f n'est pas polynomiale si et seulement si pour tout a, b réels, E est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur $[a, b]$.

Planche 2 Ulm - Lyon - Saclay - Rennes

On donne une famille de variables aléatoires indépendantes B_i suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i^a}$ avec $a > 0$.
Discuter si $S = \{i \in \mathbb{N}^*,\ B_i = 1\}$ est fini ou infini en fonction de a.
On choisit $a < 1$ et $b > 0$; discuter si $N = \sup\{n \in \mathbb{N},\ S \cap [\![n, n+n^b]\!] = \emptyset\}$ est fini ou infini en fonction de b.

Planche 3 Ulm - Lyon - Saclay - Rennes

On note A une sous-algèbre unitaire et irréductible (i.e. les seuls sous-espaces stables par tous les éléments de A sont $\{0\}$ et $\mathbb{C}^n$) de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, $n \leqslant 2$.
Déterminer le commutant de A ; *indication en cours de planche : considérer un sous-espace propre d'un élément du commutant.*
Pour F sous-espace de $\mathbb{C}^n$ et $v \in \mathbb{C}^n$, on pose $H_F = \{f \in A,\ f(F) = \{0\}\}$ et $H_F(v) = \{f(v),\ f \in H_F\}$; caractériser/simplifier $H_F(v)$.
Si F' est un autre sous-espace, on suppose que si $F \subset F'$ et $F \neq F'$ alors $H_{F'} \subset H_F$ et $H_{F'} \neq H_F$; montrer que $A = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.
Démontrer la propriété admise à la question précédente.
Indication en cours de planche : montrer qu'une base de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ est dans A.

Planche 4 Ulm - Lyon - Saclay - Rennes

Soient K un corps et D l'ensemble des droites vectorielles de K^2 ; on note S_D l'ensemble des bijections de D dans D.
Montrer qu'il existe un morphisme de groupes ϕ de $GL_2(K)$ dans S_D tel que $\forall (x_1, x_2, x_3) \in D^3$, deux à deux distincts, $\forall (x_1', x_2', x_3') \in D^3$, deux à deux distincts, il existe $f \in \operatorname{Im} \phi$ unique, vérifiant $\forall i \in [\![1, 3]\!]$, $f(x_i) = x_i'$.

Planche 5 Ulm - Lyon - Saclay - Rennes

Soit A symétrique réelle ; montrer que R qui, à $X \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ associe $\dfrac{{}^tXAX}{{}^tXX}$ admet un minimum et étudier ses points cririques.

Planche 6 Ulm - Lyon - Saclay - Rennes

Si $n \in \mathbb{N}^*$, on note G^n le sous-groupe de G engendré par les puissances n-ièmes des éléments de G.
Si H est un sous-groupe de G, on dit que H est de puissance s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $H = G^n$.
On dit que G vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si tous ses sous-groupes sont de puissance.
On dit que G est sans torsion si tous ses éléments hormis e sont d'ordre infini.
Le but de l'exercice est de montrer que G vérifie $\mathcal{P}$ si et seulement s'il est monogène.
Montrer que si G est monogène alors G vérifie $\mathcal{P}$.
Soit G' un groupe tel qu'il existe un morphisme surjectif ϕ de G dans G' ; on suppose que G vérifie $\mathcal{P}$; Montrer que G' vérifie $\mathcal{P}$.
On suppose que G vérifie $\mathcal{P}$; montrer que soit G est fini, soit G est sans torsion.
Montrer que si G est abélien et vérifie $\mathcal{P}$, alors il est monogène (on pourra utiliser le théorème de structure des groupes abéliens finis).

Planche 7 Ulm - Lyon - Saclay - Rennes

On note $\Delta_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P_n(X) = \det(\Delta_n - XI_n)$.

Donner une relation de récurrence d'ordre 2 sur les P_n.
On appelle polynôme de Tchebytchev U_n, les polynômes vérifiant $\forall \theta \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$, $U_n(\cos\theta) = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.
On donne $U_0 = 1$, $U_1 = 2X$, $U_{n+2} = 2XU_{n+1} - U_n$.
Déduire les racines x_p de P_n.
Comment se comporte l'entropie $H(\Delta_n) = -\displaystyle\sum_{p=1}^{n} x_p \ln x_p$ quand n tend vers l'infini ?

Planche 8 Ulm - Lyon - Saclay - Rennes

On donne deux polygones du plan, l'un étant inclus dans l'autre ; montrer que le périmètre du polygone contenu est au plus égal à celui du périmètre contenant.
Indication donnée en cours de planche : tenter de construire un polygone convexe, de périmètre inférieur au grand, contenu dans le grand et contenant le petit.
Un lacet de classe $\mathcal{C}^1$ est une application u de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}^2$, injective sur $[0, 1[$ et telle que $u(0) = u(1)$.
Le théorème de Jordan assure l'existence de deux régions du plan connexes par arcs, délimitées par le lacet : l'intérieur et l'extérieur. On dit que le lacet est convexe lorsque l'intérieur l'est.
On appelle longueur de lacet la quantité $\displaystyle\int_0^1 \| u'(t) \| \, dt$.
Montrer que le résultat établi reste vrai pour deux lacets convexes de classe $\mathcal{C}^2$.
Indication donnée en cours de planche : faire en sorte que les polygones extraits de ceux des lacets soient dans le hypothèses.

Planche 9 Ulm - Lyon - Saclay - Rennes

Soient α, β, r, s des réels strictement positifs et (d_n) une suite réelle positive ; on dit que (d_n) vérifie (P) si $\forall n \geqslant 1$, $d_n \leqslant \dfrac{s}{n^\beta} + \left(1 - \dfrac{r}{n^\alpha}\right) d_{n-1}$.
Suivant les paramètres, dire si (d_n) vérifie (P), suffit à dire qu'elle tend vers 0.

Planche 10 Ulm - Lyon - Saclay - Rennes

On dit qu'une variable aléatoire est infiniment divisible si elle est k-divisible pour tout k. Pour quels k une loi binomiale est-elle k-divisible ?
Montrer qu'une variable infiniment divisible et à support compact est presque sûrement constante.

Planche 11 Ulm - Lyon - Saclay - Rennes

On munit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme infinie.
$H_1(f) = \displaystyle\sum_{p/q \in \mathbb{Q} \cap [0,1],\ p \wedge q = 1} \frac{1}{q^3} f\left(\frac{p}{q}\right)$ est-elle continue ?
Sinon, préciser les points de discontinuité.
Même question pour $H_2(f) = \displaystyle\sup_{t \in [0,1]} g\big(f(t)\big)$ où g est croissante (pas nécessairement continue) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Planche 12 Ulm - Lyon - Saclay - Rennes

I) Soient f de classe $\mathcal{C}^n$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$ tels que $\forall t \geqslant 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \lambda^k f^{(n-k)}(t) \leqslant 0$; montrer que $\exists \varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t) e^{\varepsilon t} = 0$.
Soient (a, b) deux réels tels que les racines de $X^2 + aX + b$ soient de partie réelle strictement négative et f de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ vérifiant $\forall t \geqslant 0$, $f''(t) + af'(t) + bf(t) \leqslant 0$; montrer que $\exists \varepsilon > 0$, $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t) e^{\varepsilon t} = 0$.
II) Existe-t-il un espace vectoriel muni de deux normes, pour lesquelles une suite de cet espace converge vers deux limites différentes ?

Planche 13 Ulm

I) Soient deux matrices A et B, réelles, carrées de taille $n \geqslant 2$ et $n+1$ réels distincts $t_1, \dots, t_{n+1}$. Montrer qu'il est équivalent de dire :
(i) $\forall i \in [\![1, n+1]\!]$, $\det(A + t_i B) = 0$
(ii) il existe deux sous-espaces de $\mathbb{R}^n$, V et W, tels que $A(V) \subset W$, $B(V) \subset W$ et $\dim W < \dim V$.
II) On note r_f et r_g les rayons de convergence des séries entières associées respectivement aux suites réelles strictement positives (f_n) et (g_n) ; on suppose $0 < r_f < r_g$ et $\left(\dfrac{f_n}{f_{n+1}}\right)$ converge.
Montrer qu'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n \leqslant a f_n e^{-nb}$.

Planche 14 Ulm

I) On donne A et B carrées, réelles, de taille 2 et de déterminant strictement supérieur à 1.
Pour $v_0 \in \mathbb{R}^2$, on pose $v_{n+1} = Av_n$ ou $v_{n+1} = Bv_n$; montrer que l'on peut choisir v_0 tel que (v_n) ne soit pas bornée.
II) Soit f dérivable sur $[0, 1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.
Montrer que l'on peut rouver n réels distincts $x_1, \dots, x_n$ tels que $n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{f'(x_i)}$.

Planche 15 Ulm

On dit que M est un quasi-morphisme d'un groupe G dans $\mathbb{R}$ si $\displaystyle\sup_{(g,h) \in G^2} |\, M(g) + M(h) - M(gh) \,| < +\infty$.
On dit que M est un quasi-caractère si $\forall g \in G$, $M(g^n) = nM'g)$.
Donner des exemples de quasi-morphismes et de quasi-caractères.
Soit M un quasi-morphisme ; montrer qu'il existe Q unique de G dans $\mathbb{R}$, quasi-morphisme ou quasi-caractère, tel que $\displaystyle\sup_{g \in G} |\, M(g) - Q(g) \,| < +\infty$.

Planche 16 Lyon

Pour $f \in E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+)$, on pose $s_n(f) = \displaystyle\int_0^1 f(x) x^n \mathrm{d}x$ et on note ϕ l'application qui à f associe la suite de terme général $s_n(f)$.
ϕ est-elle injective ? Surjective si on restreint l'espace de départ à $\mathbb{R}_N[X]$? Surjective si E est l'espace de départ ? Si l'on n'impose plus $f \geqslant 0$?
La suite de terme général $a_n = e^{-n^2/10}$ admet-elle un antécédent par ϕ ?

Planche 17 Lyon

Montre que f, de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique, non nulle en 0 et telle que si $f(x) = 0$, alors $f'(x) \neq 0$, admet un nombre fini N de zéros sur $[0, 2\pi]$.
Soit F de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$ et $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} F(x) = -1$;
montrer que $N = -\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^{2\pi} F'\left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right) \left(\frac{f'}{f}\right)'(x) \mathrm{d}x$ (on pourra commencer par intégrer en s'écartant des zéros d'un ε que l'on fera tendre vers 0).
Montrer que $N = -\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f''(x)f(x) - f'(x)^2}{f^2(x) + f'^2(x)} \mathrm{d}x$ (on pourra chercher des conditions sur F qui permettent d'obtenir le résultat et choisir F en conséquence).
Peut-on généraliser à f de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$?

Planche 18 Lyon

Pour $(A, B) \in GL_n(\mathbb{C})^2$, on note $C = ABA^{-1}B^{-1}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres distinctes ou confondues de C.
Montrer que si A et B ont un sous-espace stable commun, distinct de $\{0\}$ et $\mathbb{C}^n$, il existe $I \subset \{1, \dots, n\}$ non vide et tel que $\displaystyle\prod_{i \in I} \lambda_i = 1$.
La réciproque est-elle vraie ?

Planche 19 Lyon

On note $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n \cos(nx)$ où $\sum a_n$ est une série absolument convergente.
Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que si $a_0 = \ldots = a_k = 0$, f admet $k+1$ zéros dans $[0, \pi]$.

Planche 20 Lyon
On donne $U_0 \in [0,1]$ et on pose $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = 4x(1-x)$.
Montrer que si (U_n) converge, elle est stationnaire.

On fixe N et on choisit aléatoirement U_0 dans $\{\sin^2 \frac{k\pi}{n},\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$; calculer la probabilité que la suite converge (on se contentera d'approcher cette probabilité en supposant N très grand).

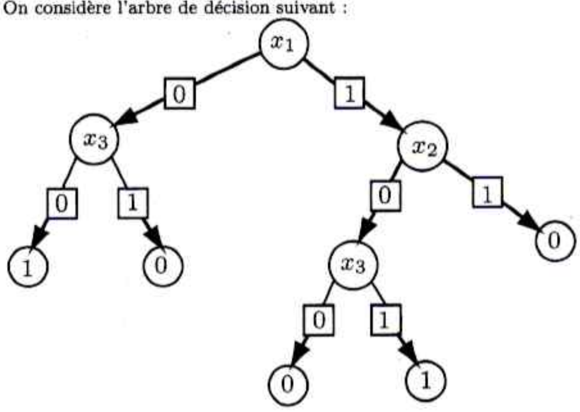
Planche 21 Lyon
Caractériser les matrices d'ordre fini de $(GL_2(\mathbb{Z}), \times)$.

Planche 22 Saclay, Rennes
Soient α un irrationnel, $N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{Z}$; calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} e^{2i\pi n\alpha}$.
On note E l'ensemble des fonctions complexes, continues sur $\mathbb{R}$ et 1-périodiques ; on admet que le sous-espace de E engendré par les f_k, $k \in \mathbb{Z}$ avec $f_k(x) = e^{2i\pi kx}$, est dense dans E muni de la norme uniforme.
Pour $\phi \in E$, on note $S_N(\phi) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \phi(n\alpha)$; montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n(\phi)}{N} = \int_0^1 \phi$.
On note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire d'un réel x.
Calculer, si elle existe $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \phi(\{n\alpha\})$ où ϕ est une fonction positive et continue sur $]0,1[$, d'intégrale divergente.

Planche 23 Saclay - Rennes
Montrer que $\mathbb{Z}[i] = \{a+ib,\ (a,b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un anneau et déterminer ses éléments inversibles.
Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}[i]^2$, $\exists (q,r)\mathbb{Z}[i]^2$, $x = yq + r$ avec $|r| < |y|$.
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$; montrer que $\displaystyle\frac{1}{4}\sum_{x\in\mathbb{Z}[i], x=\sqrt{n}} x^k \in \mathbb{Z}$.

Planche 24 Saclay - Rennes
On note E_f le sous-espace de $C = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par les f_a, $a \in \mathbb{R}$, données par $f_a(x) = f(x+a)$ où $f \in C$.
Montrer que le sous-ensemble E des $f \in C$ telles que E_f soit de dimension finie, est un espace vectoriel et donner plusieurs exemples de fonctions de E.
Montrer que si f est dans E, f' y est aussi.

Planche 25 Informatique Ulm
Définition 1 : Soit $X = \{x_1,\dots,x_n\}$ un ensemble de variables propositionnelles ; on dit que $x_i < x_j$ si $i < j$. Une valuation est une application ν de X dans $\{0,1\}$. Un arbre de décision $\mathcal{T}$ est un arbre dont les feuilles sont étiquetées par 0 ou 1 et les nœuds internes par un élément de X. Un nœud interne d'un arbre de décision a exactement deux fils dont les arêtes sont étiquetées respectivement 0 (à gauche) et 1 (à droite). De plus, si x_i est le nœud parent d'un nœud x_j alors, nécessairement, $x_i < x_j$.
Un arbre de décision $\mathcal{T}$ étant donné, on associe la fonction booléenne $\phi_{\mathcal{T}}$ qui, à une valuation ν définie sur X, associe soit 0, soit 1, de sorte que si T est une feuille, alors $\phi_{\mathcal{T}}$ renvoie la valeur de cette feuille et si $\mathcal{T}$ est un arbre de décision enraciné par une variable x_i dont les sous-arbres sont $\mathcal{T}_0$ et $\mathcal{T}_1$ (respectivement associés aux arêtes 0 et 1), alors $\phi_{\mathcal{T}}(\nu) = \phi_{\mathcal{T}_0}(\nu)$ si $\nu(x_i) = 0$ et $\phi_{\mathcal{T}}(\nu) = \phi_{\mathcal{T}_1}(\nu)$ sinon.
On considère l'arbre de décision suivant :



On définit une valuation ν sur $\{x_1, x_2, x_3\}$ par $\nu(x_1) = 1$, $\nu(x_2) = 0$ et $\nu(x_3) = 1$; donner la valeur de $\phi_{\mathcal{T}}$ appliquée à cette valuation.
Proposer une valuation conduisant à la valeur 0.
Proposer un arbre de décision dont la formule associée est équivalente à $(x_1 \wedge x_2) \vee \neg(\neg x_1 \wedge x_3)$.
À quelle condition la formule associée à un arbre de décision est-elle une tautologie ? Satisfiable ?
Soit ϕ une formule booléenne telle qu'on dispose d'un arbre de décision $\mathcal{T}$ vérifiant $\phi_{\mathcal{T}} \equiv \phi$; construire un arbre de décision dont la formule associé est équivalente à $\neg\phi$.
Écrire en pseudo-code un algorithme permettant d'obtenir une formule booléenne associée à un arbre de décision ; donner sa complexité en temps et en mémoire.
Soient ϕ_1 et ϕ_2 deux formules booléennes ; construire, à partir d'arbres associés à ces formules, un arbre de décision dont la formule est équivalente à $\phi_1 \wedge \phi_2$.
Écrire un algorithme en pseudo-code et donner sa complexité en temps et en mémoire.
Écrire un algorithme en pseudo-code, permettant de compter le nombre de validations satisfaisant la formule booléenne associée à un arbre de décision et donner sa complexité en temps et en mémoire.
Peut-on convertir efficacement une formule littérale quelconque en un arbre de décision ?
À l'oral : montrer qu'il est possible de déterminer une formule booléenne en forme normale disjonctive, associée à un arbre de décision ; écrire en algorithme en pseudo-code.

Planche 26 Informatique, Lyon - Saclay - Rennes
Toutes les variables sont à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit des fonctions autour des fonctions d'arité multiple (l'arité est précisée entre parenthèse en exposant) :
$S^{(1)}(x) = x+1$, définie sur $\mathbb{N}$; $A_m^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = x_m$ définie sur $\mathbb{N}^n$;
la fonction constante égale à k d'arité n : $\overline{k}^{(n)}(x_1,\dots,x_n) = k$, définie sur $\mathbb{N}^n$.
$\sigma(g^{(m)}, f_1^{(n)},\dots,f_m^{(n)})$, d'arité n, est définie par :
$\sigma(g^{(m)}, f_1^{(n)},\dots,f_m^{(n)})(x_1,\dots,x_n) = g^{(m)}\big(f_1^{(n)}(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m^{(n)}(x_1,\dots,x_n)\big)$;
$\zeta[h^{(n-1)}, g^{(n+1)}]$, d'arité n, est définie par récurrence :
$\zeta[h^{(n-1)}, g^{(n+1)}](0, x_1,\dots,x_{n-1}) = h^{(n-1)}(x_1,\dots,x_{n-1})$
$\zeta[h^{(n-1)}, g^{(n+1)}](y+1, x_1,\dots,x_{n-1}) = g^{(n+1)}(y, \zeta[h^{(n-1)}, g^{(n+1)}], x_1,\dots,x_{n-1})$.
On dit que f, de $\mathbb{N}^n$ dans $\mathbb{N}$, est à récurrence principale si f peut s'écrire comme composition des fonctions définies ci-dessus et on note « f est RP ».
On remarque que σ est une généralisation de la composition : pour f et g d'arité 1, on a $\sigma(f,g) = f \circ g$.
On donne $f = \zeta[A_1^{(1)}, \sigma(S^{(1)}, A_2^{(3)})]$, on a $f(0,x) = A_1^{(1)}(x) = x$ et
$f(y+1,x) = \sigma(S^{(1)}, A_2^{(3)})(y, f(y,x), x) = S^{(1)}(f(y),x) = f(y,x)+1$.
Détailler le calcul de $f(2,3)$; que fait f ?
On donne $g = \zeta[\overline{0}^{(1)}, \sigma(f, A_2^{(3)}, A_3^{(3)})]$; on a $g(0,x) = 0$ et $g(y+1,x) = f(g(y,x),x)$.
Que fait g ?
Définir la fonction factorielle de manière récurrente principale.
Définir puiss$(x,y) = x^y$ de manière récurrente principale.
Étant donnée $f^{(1)}$, d'arité 1, définir $(\Sigma f)(z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{z} f(i)$ et $(\Pi f)(z) = \displaystyle\prod_{i=0}^{z} f(i)$.
On appelle prédicat n-aire, une fonction P de $\mathbb{N}^{n+1}$ dans $\{0,1\}$ et minimum borné de P, noté $\mu[P](y, x_1,\dots,x_n)$, le plus petit entire $n \leqslant z$ tel que $P(x, x_1,\dots,x_n) = 1$ s'il existe et 0 sinon.
Montrer que si P est RP, alors $\mu[P]$ aussi.
On suppose l'existence d'une fonction Premier de $\mathbb{N}$ dans $\{0,1\}$, qui vaut 1 pour tout nombre premier et 0 sinon.
Montrer que la fonction renvoyant le x-ième nombre premier est RP.
On suppose l'existence d'une fonction D de $\mathbb{N}^2$ dans $\{0,1\}$ telle que $\mathrm{D}(x,y) = 1$ si et seulement si x divise y et D est RP ; montrer que Premier est RP.

Planche 27 Informatique, Lyon - Saclay - Rennes
Transformation de Burrows-Wheeler : soit A un alphabet fini muni d'un ordre total et \$ une lettre n'appartenant pas à A ; soit $\omega = \omega_0 \dots \omega_{n-1} \in A^*$.
- On liste les suffixes $S_k = \omega_k \dots \omega_{n-1}$ de ω, notamment $S_n = \varepsilon$;
- on les trie par ordre lexicographique $S_{\sigma(0)}, S_{\sigma(1)}, \dots, S_{\sigma(n)}$;
- la tranformée de Burrows-Wheeler de ω est $\omega_{\sigma(0)-1}, \omega_{\sigma(1)-1}, \dots, \omega_{\sigma(n)-1}$ en posant $\omega_{-1} =$\$.

Donner la transformée de Burros-Wheeler de babar.
Décrire un algorithme permettant de calculer la transformée de Burrows-Wheeler d'un mot de longueur n en un temps $O(n^2 \log n)$ (une comparaison sur les caractères ou sur les nombres s'effectue en OCI).
On suppose que l'on dispose d'un arbre binaire de recherche (ABR) dans lequel sont disposés les suffixes $S_{k+1},\dots,S_n$; décrire un algorithme permettant d'insérer S_k dans l'arbre en un temps $O(h^2)$ où h est la hauteur de l'arbre.
Un AVL est un arbre de recherche muni d'une fonction auxiliaire, permettant en un temps $O(\log n)$ (où n est le nombre de nœuds) de rééquilibrer l'arbre, afin qu'il soit de hauteur $O(\log n)$.
Décrire un algorithme calculant la transformation de Burrows-Wheeler d'un mot de longueur m en un temps $O\big(n \log n)^2\big)$ en utilisant un AVL.
Montrer que la fonction BW qui, à un mot, associe sa tranformée de Burrows-Wheeler, est injective.
Montrer que $\mathrm{BW}(A^*) = \{\mathrm{BW}(\omega),\ \omega \in A^*\}$ est un langage rationnel.

ENS option PC

Planche 28 Ulm - Lyon - Saclay - Rennes
Soit f continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; montrer que $f^*(x) = \displaystyle\sup_{t>0}\left|\frac{1}{2t}\int_{x-t}^{x+t} f(s)\mathrm{d}s\right|$ est définie sur $\mathbb{R}$. Calculer f^* pour $f(x) = \min\{1, |x|\}$.
Trouver toutes les fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que f^* soit intégrable.

Planche 29 Ulm - Lyon - Saclay - Rennes, abordable dès la 1ère année
On dit qu'un polynôme est tempéré si toutes ses racines sont de module 1.
Donner une CNS pour qu'un polynôme unitaire complexe de degré 2 soit tempéré. Montrer que si $X^3 + bX^2 + cX + 1$ est tempéré, alors $b = \overline{c}$.

Planche 30 Ulm - Lyon - Saclay - Rennes, abordable dès la 1ère année
Montrer que $Q(X) = X^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k X^k$, avec $c_k \in \mathbb{R}_+$ et non tous nuls, admet une unique racine positive ; à quelle condition est-elle strictement positive ?
Soit z une racine de $P(X) = X^n - \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$, avec $a_k \in \mathbb{R}$.
Montrer que $|z| \leqslant \max\left(1, \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$.

Planche 34

On note $Pr = \{p_1, p_2, \cdots\}$ l'ensemble des nombres premiers ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, etc.) et, pour $s > 1$, $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.

Soit $s > 1$, pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (\lambda n^{-s})_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit-elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$ par l'intermédiaire de $\forall n \geqslant 1$, $P(\{n\}) = \lambda n^{-s}$?

Soit $s > 1$, pour λ trouvé à la question précédente, soit X une variable aléatoire suivant la loi Q_s : $P(X = n) = \lambda n^{-s}$; pour quelles valeurs de s la variable X admet-elle une espérance finie ?

Pour p nombre premier, on pose $A_p = p\mathbb{N}^*$; montrer que les $(A_p)_{p\in Pr}$ sont mutuellement indépendants pour la loi de probabilité précédente et en déduire que $\zeta(s) = \lim_{N\to+\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1-p_n^{-s}}$ qu'on note $\zeta(s) = \prod_{p\in Pr} \frac{1}{1-p^{-s}}$.

La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{p_n}$ converge-t-elle ?

Planche 35

f, g et h continues sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$, h étant à valeurs positives, vérifient $\forall t \in [a,b]$, $g(t) \leqslant f(t) + F(t)$ avec $F(t) = \int_a^t g(s)h(s)\mathrm{d}s$. Montrer que :

$\forall t \in [a,b]$, $F(t)\exp\left(-\int_a^t h(s)\mathrm{d}s\right) \leqslant \int_a^t g(s)h(s)\exp\left(-\int_a^s h(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s$.

En déduire que $\forall t \in [a,b]$, $g(t) \leqslant f(t) + \int_a^t f(s)h(s)\exp\left(\int_s^t h(u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s$.

On suppose que f est constante et vaut $c \in \mathbb{R}_+$.

Montrer que $\forall t \in [a,b]$, $g(t) \leqslant c\exp\left(\int_a^t h(s)\mathrm{d}s\right)$.

Soient ϕ et ψ continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et telles que $\phi(t) \leqslant \int_0^t \phi(s)\psi(s)\mathrm{d}s$; montrer que ϕ est nulle.

On suppose $\exists a \in [0,1[$, $\exists m \in [0,1]$, $\phi(t) \leqslant a\phi(mt) + \int_0^t \phi(s)\psi(s)\mathrm{d}s$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\phi(t) \leqslant a^n\phi(m^n t) + \sum_{k=0}^{n-1} a^k \int_0^t \phi(s)\psi(s)\mathrm{d}s$ et en déduire que ϕ est nulle.

Planche 36

I) On dit qu'une suite de variables aléatoires (X_n), à valeurs dans $\mathbb{N}$, converge en probabilité vers une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to+\infty} p(X_n = k) = p(X = k)$.

On note G_{X_n} et G_X leurs fonctions génératrices respectives, de variable t. Montrer que (X_n) converge en probabilité vers vers X si et seulement si $\forall t \in]0,1[$, $\lim_{n\to+\infty} G_{X_n}(t) = G_X(t)$.

II) On donne une suite réelle (a_n) et on note $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$, supposée définie sur $]-1,1[$. On suppose que $\lim_{x\to 1} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{n\to+\infty} na_n = 0$.

Montrer que $\forall i \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{i}{n} \leqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)^i$.

En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right) = 0$.

Conclure sur $\sum_{n\geqslant 0} a_n$.

Planche 37 Abordable dès la $1^{ère}$ année

Si A, B et C sont trois points du plan repérés par les affixes respectives a, b, c, montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si $a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 = 0$.

On note $\omega_n = \mathrm{e}^{2i\pi/n}$; déterminer le rang de V_n, la matrice de coefficient $v_{ij} = \omega_n^{i(j-1)}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n-2$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

Montrer que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{l=0}^{n-1} \omega_n^{lk} = 0$.

Déterminer une base du noyau de V_n.

Si $A_1, \ldots A_n$ sont n points du plan repérés par les affixes respectives $a_1, \ldots, a_n$, montrer que $A_1A_2\ldots A_n$ est un polygone régulier si et seulement si $\sum_{l=0}^{n-1} \omega_n^{lk} a_{l+1} = 0$.

Planche 38

I) On donne une suite (u_n) réelle, strictement positive, de limite nulle et telle que $\exists \alpha > 1$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^\alpha} = l \in \mathbb{R}^*$.

On veut montrer que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha < 2$.

Montrer que (u_n) est strictement décroissante à partir d'un certain rang N.

On suppose $\alpha < 2$; à l'aide de l'inégalité $\frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}} \leqslant \int_{u_{n+1}}^{u_n} \frac{\mathrm{d}t}{t^{\alpha-1}}$, que l'on justifiera, montrer que $\sum \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^\alpha}$ converge et en déduire que $\sum u_n$ converge.

Montrer que si $\alpha \geqslant 2$, $\sum \frac{u_n - u_{n+1}}{u_n^{\alpha-1}}$ diverge et en déduire que $\sum u_n$ diverge.

II) Montrer que la somme S de deux dés indépendants, pipés ou non, ne peut pas suivre une loi uniforme (i.e. $\forall i \in [\![2,12]\!]$, $P(S = i) = \frac{i}{11}$).

Planche 39

On appelle pavage de taille n le découpage d'un rectangle de taille $2 \times n$ en rectangles 2×1 et 1×2 et on note u_n le nombre de pavages de taille n (par exemple, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$).

Trouver une relation de récurrence liant les u_n et en déduire que $u_n = ca^n + c'b^n$ où a, b, c, c' sont des réels.

Calculer la probabilité $p_{1,n}$ qu'un pavage de taille n contienne un rectangle vertical à son extrémité gauche et montrer que $\lim_{n\to+\infty} p_{1,n} = L \in \mathbb{R}$.

Donner une expression du nombre V_n de rectangles verticaux dans un pavage de taille n (on remarquera que $V_n = \sum_{i=1}^{n} U_{i,n}$ où $U_{i,n}$ est la variable aléatoire valant 1 s'il y a un rectangle vertical en position i et 0 sinon).

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}E(V_n) = l \in \mathbb{R}$ (on pourra utiliser l'indication précédente et découper la somme sur $1 \leqslant i \leqslant \sqrt{n}$, $\sqrt{n} \leqslant i \leqslant n - \sqrt{n}$ et $n - \sqrt{n} \leqslant i \leqslant n$).

Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $V_{i,j,n}$ la variable aléatoire valant 1 s'il y a des rectangles verticaux en positions i et j et 0 sinon ; calculer $E(V_{i,j,n})$.

Planche 40

Montrer que, pour x réel fixé, $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\mathrm{ch}\, t}\mathrm{d}t = 2\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)^2 + x^2}$.

On justifiera au préalable l'existence de chacun des membres de l'égalité.

Planche 41

Soit $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $H(V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $H(V) = I_n - \frac{2}{||V||^2}V^tV$ (matrice de Householder).

On note $H_R = \{I_n\} \cup \{H(V), V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$ et $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour $V \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, montrer que $H(V) \in O_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R})$.

Soit $(X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ tel que $||X|| = ||Y||$; montrer qu'il existe $H \in H_R$ telle que $HX = Y$.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$; montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ produit d'au plus $n-1$ matrices de H_R telle que $PA = R$ avec R matrice triangulaire supérieure avec des termes diagonaux strictement positifs. Quel est le principe de construction de P et R ?

Écrire une fonction basée sur les matrices de Householder qui donne la factorisation QR d'une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Complexité attendue en termes d'opérations : $\frac{4n^3}{3} + O(n^2)$.

Planche 42

On pose $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}u_k$.

On suppose $\sum_{n\geqslant 0} u_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et on note f sa somme quand elle est définie.

Montrer que $\forall x \in]-R,R[$, $xf^2(x) - f(x) + 1 = 0$.

Montrer que $\exists r > 0$, $\forall x \in]-r,r[\setminus\{0\}$, $xf(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Donner l'expression de u_n en fonction de n.

Planche 43

Soit Φ continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall k \geqslant 0$, $\exists (a_0, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que $\Phi(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_k}{x^k} + \frac{\mathrm{e}_k(x)}{x^k}$ avec $\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}_k(x) = 0$.

À quelles conditions $\sum_{n\geqslant 1} \Phi(n)$ converge-t-elle ?

Même question pour $\prod_{n\geqslant 1} \Phi(n)$ puis pour $\sum_{n\geqslant 1} \prod_{i=0}^{n} \Phi(i)$.

Pour quelles valeurs de α, $\sum_{n\geqslant 1} \prod_{k=1}^{n} \left(2 - \mathrm{e}^{\alpha/k}\right)$ converge-t-elle ?

Planche 44

Sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on appelle pseudo produit scalaire toute application ϕ de E^2 dans $\mathbb{R}$, bilinéaire, symétrique et positive.

Soit $c > 0$, montrer que $\forall s \in]1,2[$, $I(c) = \int_0^{+\infty} t^{1-s}\mathrm{e}^{-ct}\mathrm{d}t$ existe.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$; pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, montrer que $F_t(x,y) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j \mathrm{e}^{-(a_i+a_j)t}$ et $G(x,y) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x_i y_j (a_i + a_j)^{s-2}$ sont des pseudo produits scalaires (on pourra montrer $I(c) = c^{s-2}\int_0^{+\infty} t^{s-1}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$).

On pose $K(a,b) = (a+b)^{s-2}$ et on admet l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un pseudo produit scalaire.

Montrer que $\sum_{i=k}^{\ell}\sum_{j=m}^{p} K(a_i,a_j) \leqslant \sqrt{\left(\sum_{i=k}^{\ell}\sum_{j=k}^{\ell} K(a_i,a_j)\right)\left(\sum_{i=m}^{p}\sum_{j=m}^{p} K(a_i,a_j)\right)}$.

On pose $g_{A,B}(x) = \int_A^B K(a,x)\mathrm{d}a$.

On admet que $\int_A^B g_{C,D}(x)\mathrm{d}a \leqslant \sqrt{\int_A^B g_{A,B}(x)\mathrm{d}a + \int_C^D g_{C,D}(x)\mathrm{d}a}$.

On pose, pour $s \in]1,2]$ et $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\rho_s(x,y) = \left[\frac{x^s + y^s}{2} - \left(\frac{x+y}{2}\right)^s\right]^{1/s}$.

Montrer que $\forall (x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, $\rho_s(x,y) + \rho_s(y,z) \geqslant \rho_s(x,z)$.

Montrer que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\rho_s(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

École Polytechnique-option MP

Planche 45
On dit que $F \in A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, p premier, est sans facteur carré, si et seulement si $\forall G \in A$, $G^2 | F \Rightarrow G = 1$. On notera $|F| = p^{\deg F}$.
Soit $s > 1$; montrer que la famille des $|F|^{-s}$, pour $F \in A$ unitaire, est sommable et calculer sa somme, notée $\zeta(s)$.
On note $\zeta_2(s)$ la somme de la famille des $|F|^{-s}$, $F \in A$ unitaire et sans facteur carré ; montrer que $\zeta_2(s) = \dfrac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$ (on pourra écrire $\zeta(s)$ sous la forme d'un produit rappelant le produit eulérien intervenant dans les polynômes irréductibles).
En déduire que la proportion de polynômes unitaires de degré $s \geqslant 2$, sans facteur carré, dans l'ensemble des polynômes unitaires de degré s, vaut $1 - \dfrac{1}{p}$.

Planche 46
I) Trouver $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, vérifiant $f(x)f(y) = f(\sqrt{x^2+y^2})$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.
II) $A = (X_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une matrice de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.
$B = (Y_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n+1}$ est une matrice de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Rademacher.
On note respectivement $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ les évènement « A est inversible » et « B est inversible » ; montrer que $P(\mathcal{A}) = P(\mathcal{B})$.
note D_n l'ensemble des dérangements de $[\![1, n]\!]$ et $d_n = |D_n|$.
Montrer que d_n est l'entier le plus proche de $\dfrac{n!}{\mathrm{e}}$. Exprimer simplement $\displaystyle\sum_{\sigma \in D_n} \varepsilon(\sigma)$.
On note $d_m(n)$ le nombre de permutations ne comportant aucun cycle de longueur au plus égale à m ; donner une expression de $f_m(t) = 1 + \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{d_m(n)}{n!} t^n$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Planche 47
I) Montrer que $A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{A}_{2n}(\mathbb{R})$ est, dans une base orthogonale, diagonale par blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a > 0$ (on pourra considérer A^2 et raisonner par récurrence).
II) On dit qu'une suite (u_n) d'un espace vectoriel normé E, vérifie C si, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall p \geqslant N$, $\forall q \geqslant N$, $\| u_p - u_q \| \leqslant \varepsilon$.
On dit que E vérifie B si toute suite de E vérifiant C est convergente dans E.
Montrer que l'ensemble des suites sommables, normé par $\| u \| = \displaystyle\sum_{i \geqslant 0} |u_i|$ vérifie B (on pourra commencer par traiter le cas $E = \mathbb{R}$).

Planche 48
I) Soient a, b, x, y des entiers relatifs non nuls et $k \in \mathbb{Z}$.
Montrer que $a \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} + b \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{y} = k \dfrac{\pi}{4}$ modulo π si et seulement si $(1-\mathrm{i})^k (1+x)^a (1+y)^b$ est réel.
Trouver $(x, a) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $a \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{x} - \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{239} = \dfrac{\pi}{4}$ (on pourra remarquer que tout élément de $\mathbb{Z}[\mathrm{i}]$ se décompose en produit de facteurs irréductibles : par exemple $-239 + \mathrm{i} = (1+\mathrm{i})(3+\mathrm{i})^4$).
II) Que dire de A, matrice d'un monomorphisme de $\mathbb{R}^2$, telle que :
$A([-1,1] \times [-1,1]) \subset [-1,1] \times [-1,1]$ (géométriquement, par exemple) ?

Planche 49
On donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $T \geqslant 0$.
On note $A(t)$ l'ensemble des $V \in \mathbb{R}^p$ pour lesquels il existe $u \in \mathcal{C}^0([0,T], \mathbb{R}^p)$, tel que la solution de $X'(t) = AX(t) + Bu(t)$ avec $X(0) = 0$ vérifie $X(T) = V$.
Montrer que $A(T) = \mathbb{R}^p$ si et seulement si le rang de la matrice à blocs $(B \quad AB \quad A^2B \quad \dots \quad A^{n-1}B)$ vaut n.

Planche 50
Pour f continue de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et γ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ tel que $\gamma(a) = \gamma(b)$ on pose $\displaystyle\int_\gamma f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\mathrm{d}t$.
Soit γ un tel chemin et $x_0 \in \mathbb{C}$; montrer que si $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$, $\displaystyle\int_\gamma (t - x_0)^n \mathrm{d}t = 0$ et $\displaystyle\int_\gamma \frac{\mathrm{d}t}{t - x_0}$ vaut $2\mathrm{i}\pi$ si x_0 est dans l'ouvert D délimité par γ et 0 sinon (on pourra introduire la fonction $\ln$: si $z = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta \in]-\pi, \pi[$, pour $z \notin \mathbb{R}_-$, $\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\theta$).
En déuire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1 + x^2} \mathrm{d}x$ (on pourra prendre pour γ le demi-cercle centré en O, de rayon $a > 0$ puis faire tendre a vers $+\infty$).

Planche 51
Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appelle racine de M toute matrice A telle que $A^2 = M$.
À quelle(s) condition(s) M diagonalisable admet-elle une racine ?
Existe-t-il une racine de M si elle admet une valeur propre réelle mais n'est pas diagonalisable ? Si elle n'admet aucune valeur propre réelle ?

Planche 52
On donne H, K, symétriques réelles de taille n, telles que $HK = KH$ et $P \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $\operatorname{tr} P = 1$; on pose $f(t_1, t_2) = \operatorname{tr}(P\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1 H + \mathrm{i}t_2 K})$.
Montrer que $\exists X$, $\exists Y$, variable aléatoires, telles que $f(t_1, t_2) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1 X + \mathrm{i}t_2 Y})$.
On choisit $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Montrer qu'il n'existe pas deux variables aléatoires X et Y telles que :
$f(t_1, t_2) = E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t_1 X + \mathrm{i}t_2 Y})$.

Planche 53
On note $A(z) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n \frac{z^n}{n!}$, $B(z) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} b_n \frac{z^n}{n!}$ et $A \equiv B\ [p] \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \equiv b_n\ [p]$.
Montrer que $(\mathrm{e}^z - 1)^3 \equiv 2\left(\dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \dots\right)$ [4].
Si $m > 4$ est non premier, montrer que m divise $(m-1)!$.
Pour un tel entier m, montrer que $(\mathrm{e}^z - 1)^{m-1} \equiv 0\ [m]$ (on pourra remarquer que $\dfrac{(\mathrm{e}^z - 1)^n}{n!} = \displaystyle\int_0^z \frac{(\mathrm{e}^x - 1)^{n-1}}{(n-1)!} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$).
Soit p premier, supérieur ou égal à 3 ; montrer que $(p-1)! \equiv -1\ [p]$ puis trouver la congruence de $(\mathrm{e}^z - 1)^{p-1}$ modulo p.

Planche 54
On donne un entier $n \geqslant 1$ qui n'est pas de la forme $\dfrac{k(3k \pm 1)}{2}$ et on s'intéresse aux partitions de n, c'est à dire aux écritures de n de la forme $n = \displaystyle\sum_{i=1}^r n_i$ avec $1 \leqslant n_1 < n_2 < \dots < n_r$; on note $Q(n)$ leur ensemble.
Construire une involution de $Q(n)$ dans lui-même qui change la parité du nombre de termes dans la partition.
En déduire $\displaystyle\prod_{n \geqslant 1} (1 - x^n) = 1 + \sum_{k \geqslant 1} (x^{k(3k-1)/2} + x^{k(3k+1)/2})$ pour $0 \leqslant x < 1$.

Planche 55
On note $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ les racines complexes distinctes ou confondues d'un polynôme P unitaire de degré d à coefficients entiers. On suppose $\forall i \in [\![1, d]\!]$, $|\lambda_i| \leqslant 1$.
Montrer que $f(n) = \displaystyle\sum_{k=1}^d \lambda_k^n$ est à valeurs entières.
Montrer que $\exists N \in \mathbb{N}$, $\exists p \neq 0$, $\forall n \geqslant N$, $f(n+p) = f(n)$.
On suppose qu'aucune racine n'est nulle ; montrer qu'elles sont racines de l'unité.

Planche 56
On veut calculer $g(y) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}yx} \mathrm{d}x$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{j=-N}^{N} \left(1 - \frac{|j|}{N+1}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}jx} = \frac{1}{N+1} \left(\frac{\sin \frac{(N+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2$.
Montrer que $\displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2N+2} \left(\frac{\sin((N+1)x)}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x = \left(1 - \frac{|k|}{2n+2}\right)^+$, pour $k \in \mathbb{Z}$; on note cette quantité $f_{N,k}$.
Montrer que $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \left| f_{N,k} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2N+2} \left(\frac{\sin((N+1)x)}{\sin \frac{x}{2}}\right)^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \mathrm{d}x \right| = 0$.
Montrer que $g(y) = \pi \left(1 - \dfrac{|y|}{2}\right)^+$.

Planche 57
Montrer que $f(z) = \dfrac{(\mathrm{e}^z - 1)^k}{k!}$ est développable en série entière au voisinage de 0 pour $k \geqslant 1$; on écrit ce développement sous la forme $\displaystyle\sum_{j \in \mathbb{N}} c(k, j) \frac{z^j}{j!}$.
Soient $(X)_0 = 1$ et $(X)_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} (X - k)$; montrer que $((X)_i)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ puis que $X^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} c(i, j)(X)_i$ (on pourra écrire $(1 + \mathrm{e}^3 - 1)^X = \mathrm{e}^{3X}$).
Montrer que $c(i, j) \in \mathbb{N}$ puis que $c(i, j) = \displaystyle\sum_{k_1 + \dots + k_i = j-1} 1^{k_1} 2^{k_2} \dots i^{k_i}$.

Planche 58
Un jeu de cartes compte n cartes rouges et n noires ; face au paquet mélangé, un adulte et un enfant prédisent la carte du dessus ; on la regarde et on la défausse. Les prédictions correctes rapportent 1 point. Le score final est le nombre de points accumulés par le joueur à la fin du dernier tirage.
L'enfant prédit aléatoirement rouge ou noire, avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$; l'adulte compte le nombre de cartes rouges et noires déjà tirées et en déduit les proportions restantes dans le paquet, il mise systématiquement sur la couleur majoritaire. En cas d'égalité, il prédit aléatoirement, comme l'enfant.
On note X_e la variable aléatoire donnant le score final de l'enfant et X_a celle donnant celui de l'adulte ; montrer que $E(X_a - X_e) \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi n}$ (on pourra fixer une configuration du jeu de cartes et considérer l'ensemble des chemins dans $\mathbb{Z}^2$ où l'abscisse et l'ordonnée représentent respectivement le nombre de cartes rouges et celui de cartes noires restant dans le paquet).

Planche 59
I) On note $g(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et h une fraction rationnelle réelle ; montrer que hg n'est pas une primitive de g.
Montrer que, si f et h sont deux fractions rationnelles réelles, la dérivée logarithmique de h n'est pas la dérivée de f.
Soient g, $a_0, \dots, a_{n-1}$ des fractions rationnelles réelles ; montrer qu'il est impossible d'avoir $\mathrm{e}^{ng} + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k \mathrm{e}^{kg} = 0$ sur un intervalle $I \neq \emptyset$ et $I \neq \{a\}$.
II) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$; montrer que $\exists (Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tels que $P = Q^2 + R^2$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $P(x) \geqslant 0$; montrer que $\exists (A, B, Q, R) \in \mathbb{R}[X]^4$ tels que $P = Q^2 + R^2 + X(A^2 + B^2)$.

École Polytechnique-ESPCI-option PC

Planche 60 I abordable dès la $1^{ère}$ année
I) Montrer que les racines de $P(X) = 4X^3 + 3X^2 + X + 1$ sont de module strictement inférieur à 1.
II) Trouver une CNS sur (a_n), une suite d'éléments de $[0,1]$, pour que $(f,g) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{f(a_n)g(a_n)}{2^n}$ soit un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

Planche 61 Abordable dès la $1^{ère}$ année
I) Montrer que, pour $n \geqslant 2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) = x^n + ax + b$ admet au plus trois racines réelles distinctes.
Trouver une telle fonction ayant trois racines réelles distinctes.
II) Soient P et Q deux polynômes distincts et non constants, à coefficients dans $\mathbb{Z}$. f, définie sur $\mathbb{R}$ privé des racines de Q par $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, est-elle polynomiale ?
On suppose f polynomiale et P et Q à coefficients dans $\mathbb{N}$; montrer que si P et Q sont de degré au plus égal à 2, $f \in \mathbb{R}_+[X]$.
Même question si P et Q sont de degré quelconque.

Planche 62
I) Montrer qu'un endomorphisme diagonalisable f d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension n, a n valeurs propres distinctes, si et seulement si il existe $v \in E$ tel que $\big(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v)\big)$ est libre.
II) On donne $(a_0, b_0, c_0) \in \mathbb{R}^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Donner le comportement asymptotique de $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{b_n + c_n}{\alpha} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + c_n}{\alpha} \\ c_{n+1} = \dfrac{b_n + a_n}{\alpha} \end{cases}$

Planche 63 Abordable dès la $1^{ère}$ année
I) u, endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, vérifie $u^2 \neq 0$ et $u^3 = 0$; trouver l'ensemble des endomorphismes commutant avec u.
II) Montrer que si f est $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nulle en $a < b$ et $a > 0$, alors $\displaystyle\int_a^b |ff'| \leqslant \frac{b-a}{2} \int_a^b f'^2$.

Planche 64
$\forall x \in [0,1]$, on pose $f(x) = \ln \dfrac{1-x}{1+x}$; montrer que $|f(x) - 2x| \leqslant \dfrac{x^3}{(1-x^2)^2}$.

Soit $A_n = \dfrac{(n^2-1)\dots(n^2-n)}{(n^2+1)\dots(n^2+n)}$; montrer que $A_n = \mathrm{e} + \dfrac{\mathrm{e}}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ quand n tend vers $+\infty$

Planche 65 Abordable dès la $1^{ère}$ année
I) Soit u un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension n ; montrer que $\exists k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$, $\mathrm{Im}(u^k) \oplus \mathrm{Ker}(u^k) = E$.
II) Trouver $P \in \mathbb{Z}[X]$ qui ait (au moins) pour racines $\cos\dfrac{2\pi}{7}$, $\cos\dfrac{4\pi}{7}$ et $\cos\dfrac{6\pi}{7}$.

Planche 66
I) Comportement quand a tend vers $+\infty$ de $I(a) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(a+t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

II) Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $\mathrm{e}^A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} A^n$.

Montrer que, si A est diagonalisable, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\sum \frac{1}{n!} A^n x$ est convergente.
Montrer que cette propriété persiste dans le cas général.
Trouver $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{e}^B = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Planche 67
Pour $n \in \mathbb{N}$, trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+1) - P(X) \in \mathrm{Vect}\ X^n$.
Indications : quelle est la structure de l'ensemble des solutions ? Est-ce un espace vectoriel de dimension finie ? Si oui, préciser sa dimension.

Planche 68 Abordable dès la $1^{ère}$ année
Calculer le déterminant de ϕ qui à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe sa transposée.

Planche 69
Soient $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 = 1\}$ et $f(x,y) = x + ixy$; représenter $f(E)$.
La courbe présente-t-elle des points multiples ? Si oui, les déterminer.

Planche 70 ESPCI
Soit G un sous-ensemble de $GL_n(\mathbb{R})$ stable pour $\times$, tel que $\forall M \in G$, $M^{-1} \in G$ et $\forall M \in G$, $M^2 = I_n$. Montrer que $\forall (M, M') \in G^2$, $MM' = M'M$.
Montrer que toute matrice de G est diagonalisable.
En déduire que G est de cardinal fini.

Planche 71 ESPCI, II abordable dès la $1^{ère}$ année
I) On note $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Pour $p \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{d}\theta$.

Montrer que, s'il existe deux réels a et b, et un entier d tels que $|f(z)| \leqslant a|z|^d + b$, alors f est un polynôme.
II) Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, A^2 \Leftrightarrow \mathbb{C}^n = \mathrm{Ker}\, A \oplus \mathrm{Im}\, A$.

Concours Commun Mines-Ponts-option MP

Planche 72
I) On pose $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de partitions de $[\![1, n]\!]$.

Montrer que $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$ et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant n!$.

Donner la valeur de $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_k}{k!} x^k$ quand elle est définie.

II) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; résoudre, pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $X^n = A$.

Planche 73
I) On note $f_{p,q}(t) = \dfrac{t^p + 1}{tq + 1}$ avec $t \in]-1, 1[$ et p et q dans $\mathbb{N}^*$.
Trouver une équation différentielle (non triviale) linéaire homogène à coefficients polynomiaux vérifiée par $f_{p,q}$ puis trouver les solutions de cette équation.
II) Un sac contient b jetons blancs et n jetons noirs, avec $|b - n| \leqslant 2$. À chaque tirage, on tire deux jetons sans remise ; déterminer la loi de X, variable aléatoire qui compte le nombre de tirages fait pour obtenir deux jetons identiques.

Planche 74 I abordable dès la $1^{ère}$ année
I) Trouver les sous groupes de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \times)$ qui ne sont pas sous groupe de $GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que tous les éléments d'un tel sous-groupe sont de même rang.
II) Rayon de convergence, comportement aux bords et calcul de $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n \mathrm{d}t$.

Planche 75
I) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ on pose $u_n(x) = x^n\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ et $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

Déterminer l'ensemble I de définition de f puis montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
Donner un équivalent de f en 1^- ; f est-elle développable en série entière au voisinage de 0 ?
II) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée, montrer qu'il existe $P \in O(n)$, ${}^tPM^tMP = {}^tMM$.

Planche 76
I) Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et centrées.
On pose $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\sigma_k = \sigma(X_k)$ et $\sigma = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$; $S_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$;

pour $k \geqslant 2$: $A_k^\varepsilon = \{|S_k| \geqslant \varepsilon\} \cap \left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1} \{|S_i| < \varepsilon\}\right)$ avec $\varepsilon > 0$.

Exprimer $\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\}$ en fonction des A_i^ε pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Montrer que $E\big((S_n - S_k)^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}\big) = E(S_n^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}) = E(S_k^2 \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon})$ (on pourra considérer $E\big((S_n - S_k)S_k \mathbf{1}_{A_k^\varepsilon}\big)$). En déduire que $P(\{\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \dfrac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.
Comparer avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchef.
II) Montrer que $\phi(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, définie pour $x \geqslant \mathrm{e}$, admet une bijection réciproque ψ puis donner la nature de $\sum \dfrac{1}{\psi(n)}$.

Planche 77 II abordable dès la $1^{ère}$ année
I) On donne $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda]-1, 1[$ et $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \lambda f(x) + f(\lambda x)\}$.
Déterminer les fonctions de $\mathcal{E}$ développables en série entière de rayon de convergence infini, puis déterminer $\mathcal{E}$.
II) On pose $[AB] = AB - BA$; montrer que $\mathrm{Vect}\{[AB],\ (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2\}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Planche 78
I) $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$ où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que, dans chacun des cas suivants, s'ils sont non nuls, u et v possèdent un vecteur propre commun :
i) $u \circ v = 0$; ii) $\exists \alpha \in \mathbb{C}$, $u \circ v = \alpha u$; iii) $\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, $u \circ v = \alpha u + \beta v$.
II) Étudier $f(x) = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{Arc}\tan(n + x) - \mathrm{Arc}\tan n$ puis tracer son graphe.

Planche 79
I) On note $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^3)^{n+1}}$.
Calculer J_0 puis trouver une relation entre J_n et J_{n+1}.
Montrer qu'il existe A tel que quand n tend vers $+\infty$, $J_n \sim \dfrac{A}{\sqrt[3]{n}}$.
II) $f \in \mathcal{L}(E)$, $\mathbb{R}$-espace de dimension finie, vérifie $f^2 = -\mathrm{Id}$.
Montrer que si $a \neq 0$, $\big(a, f(a)\big)$ est libre ; on pose $F(a) = \mathrm{Vect}\big(a, f(a)\big)$.

Montrer qu'il existe $(a_1, \dots, a_n) \in E^n$ tels que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} F(a_i)$.

En déduire que E est de dimension paire et trouver une base dans laquelle la matrice de f est simple.
III) Cours : théorème du rang avec éléments de preuve ; un projecteur est-il diagonalisable ? Lien entre le rang et la trace d'un projecteur.

Planche 80 II abordable dès la $1^{ère}$ année
I) Soit F de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Déterminer la limite de (nu_n) quand n tend vers $+\infty$
II) Montrer que si $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geqslant 0$, ile existe deux polynômes Q et R dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = Q^2 + R^2$.

Planche 81

I) Montrer que $P_n(X) = X^n - nX + 1$ admet une unique racine x_n dans $[0,1]$.
Déterminer la limite de (x_n) puis donner un équivalent de x_n et un développement asymptotique à deux termes.
II) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, à valeurs propres positives.
Montrer que $(\det A)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \operatorname{tr} A$. Étudier le cas d'égalité.
On suppose que les valeurs propres de A sont strictement positives ; montrer que $(\det A)^{1/n} \geqslant \dfrac{n}{\displaystyle\sum_{\lambda \in SpA} \frac{1}{\lambda}}$. Étudier le cas d'égalité.
III) Soient $p > 0$ et (a_n) une suite strictement positive et telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p = O(a_n^p)$; montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = O(a_n)$.
IV) Cours : Wronskien, forme pour une équation différentielle d'ordre 2 ; montrer qu'il vérifie une équation différentielle, qu'il est nul en un point si et seulement s'il est nul en tout point, etc.

Planche 82

I) On donne $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & y & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & y^2 & 2y & 2 \\ x^3 & 3x^2 & y^3 & 3y^2 & 6y \\ x^4 & 4x^3 & y^4 & 4y^3 & 12y^2 \end{vmatrix}$; montrer que $D = 0 \Leftrightarrow x = y$.
II) À l'aide du changement de variable $u = xy$, $v = \dfrac{x}{y}$, déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ telles que $x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + y^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$.

Planche 83 I abordable dès la 1$^{\text{ère}}$ année

I) Montrer que ϕ, qui à $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P\left(\frac{k}{n}\right) X^k (1-X)^{n-k}$ est un automorphisme.
Déterminer les antécédents par ϕ des polynômes de la base canonique.
II) Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(x+n)}$ est définie et continue sur $]1, +\infty[$.
Déterminer un équivalent de f quand x tend vers $+\infty$

Planche 84

I) $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, variables aléatoires mutuellement indépendantes sur (Ω, T, P) suivent toutes une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
On pose $q = 1 - p$, $\Pi_n = \displaystyle\prod_{m=1}^{n-1} (1 - q^m)$, $A_n = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} \geqslant X_i + s)$ où $s \in \mathbb{N}$, $B_{n,k} = (X_1 = k) \cap A_n$, $a_n = P(A_n)$ et $b_{n,k} = P(B_{n,k})$.
Montrer que $b_{n+1,k} = pq^{k-1} \displaystyle\sum_{i=s}^{+\infty} b_{n,k+i}$.
Montrer que $\forall (n,k) \in \mathbb{N}^{*2}$, $b_{n,k} = \dfrac{1}{\Pi_n} p^n q^n \left(k - 1 + \dfrac{n(n-1)}{2} s\right)$.
Trouver a_n et montrer que $\exists c > 0$, $a_n \sim c p^n q^{n(n-1/2s}$.
II) Trouver l'ensemble de définition puis expliciter $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{1+t^x}}$.

Planche 85

I) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui, à P associe le reste de la division euclidienne de $(aX^{p+1} - (a+1)X^p + 1)P$ par $(X-1)^2$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}^*$; f est-il diagonalisable ?
II) Montrer que $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Étudier F, en donner un équivalent en 0 (on pourra utiliser $F(x+1) + F(x)$) et un équivalent en $+\infty$.

Planche 86

I) Une urne contient deux fois plus de boules noires que de blanches.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages, avec remise, nécessaires pour obtenir deux boules noires consécutives ; on pose $u_n = P(X \geqslant n)$.
Montrer que $u_{n+2} = \frac{1}{3} u_{n+1} + \frac{2}{9} u_n$ et trouver la loi de X.
Montrer que X admet un moment de tout ordre et donner son espérance.
II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}_+)$; montrer que $\forall X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ tel que $X(0) \geqslant 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $X'(t) = AX(t)$ alors $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $X(t) \geqslant 0$.
En déduire que, pour y solution sur $\mathbb{R}_+$ de $y^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)}$ où les a_k sont des réels positifs, vérifiant $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $y^{(k)}(0) \geqslant 0$, alors y est $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $y^{(k)}(t) \geqslant 0$.

Planche 87

I) Soient $v_1, \ldots, v_n$ n vecteurs de $\mathbb{R}^n$; montrer que $\dim \operatorname{Vect}(v_i - v_j)_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \leqslant n-1$.
Soit H_k le sous-espace d'équation $x_k = 0$; montrer que si $v_1, \ldots, v_n$ sont tous distincts, il existe k tel que les projections orthogonales des v_i sur H_k soient toutes distinctes.
II) Montrer que f, dérivable de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, non identiquement nulle et telle que $\exists M \geqslant 0$, $\forall x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant M |f(x)|$ ne s'annule pas sur $[0,1]$.

Planche 88

I) Montrer que la somme de deux sous-espaces affines est soit vide, soit un autre sous-espace affine.
Soient E de dimension finie, A un hyperplan affine de E et B un sous-espace affine tel que $A \cap B = \emptyset$.
Montrer que la direction de B est contenue dans la direction de A.
II) Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=0}^{n} (1 + x^{2^k})$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Planche 89 II abordable dès la 1$^{\text{ère}}$ année

I) Limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{2+2x}}}}}$.
II) Soit E un espace vectoriel de dimension finie ; caractériser l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes inversibles.
III) Un magasin dispose d'un stock de produits. Le nombre de clients arrivant dans une journée suit une loi de Poisson de paramètre t. Un client achète le produit avec une probabilité p (ou repart sans rien).
Quelle est la probabilité d'avoir rupture de stock ?

Planche 90 I abordable dès la 1$^{\text{ère}}$ année

I) Déterminer toutes les matrices semblables à la matrice diagonale D, dont les coefficients diagonaux sont les $d_{ii} = i$, et qui commutent avec elle.
II) Nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \sin x}$.

Planche 91

I) Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$ quand n tend vers $+\infty$.
Montrer que $S_n - 2\sqrt{n}$ admet une limite l dont on donnera le signe.
Déterminer un équivalent de $S_n - 2\sqrt{n} - l$.
II) Trouver une CNS pour que $A \in O_3(\mathbb{R})$ soit triangulaire, puis généraliser à $O_n(\mathbb{R})$.

Planche 92 I abordable dès la 1$^{\text{ère}}$ année, II incomplet

I) Montrer que $\phi(P) = P - P'$ est une bijection de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.
Montrer que $\forall Q \in \mathbb{R}[X]$, $\exists! R \in \mathbb{R}[X]$, $Q = R - R'$.
On suppose $Q(x) \geqslant 0$; montrer que $R(x) \geqslant 0$ (on pourra poser $f(x) = e^{-x} R(x)$).
On suppose R scindé à racines simples, montrer que Q l'est aussi.
II) $S(t) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \ln(1 + e^{-nt})$ est -elle intégrable sur $[1, +\infty[$? Sur $]0,1]$?
Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx$.

Planche 93 I abordable dès la 1$^{\text{ère}}$ année

I) Soit u un endomorphisme d'un espace E de dimension n.
Trouver une CNS pour qu'il existe un projecteur de E tel que $u = p \circ u - u \circ p$.
II) Trouver l'ensemble des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'(x) = xf(-x)$.
III) Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt$.

Planche 94

I) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan}(xt) e^{-t} dt$ est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.
Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(0)$.
Montrer que $\forall x > 0$, $f'(x) < 1$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$.
Tracer la courbe de f.
II) Montrer que ϕ qui, à la suite de terme général x_n, associe la suite de terme général $2x_{n+1} + x_n$ est linéaire et déterminer son noyau.
Déterminer les éléments propres de ϕ.
On suppose (a_n) convergente et d'antécédent (u_n) par ϕ ; (u_n) est-elle convergente ?

Planche 95

I) Pour $a > -1$, montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + a\sin^2 t} = \frac{\pi}{2\sqrt{1+a}}$ à l'aide du changement de variable $x = \tan t$.
Nature, en fonction de α, de $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{\pi} \frac{dt}{1 + (n\pi)^\alpha \sin^2 t}$.
Même question pour $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2 t}$.
En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 + t^\alpha \sin^2 t}$ suivant α.
II) Montrer que ϕ, défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P)(X) = X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right)$ est un endomorphisme.
Montrer de plusieurs manières que ϕ est diagonalisable.
Trouver une base de vecteurs propres de ϕ.

Planche 96 I abordable dès la 1$^{\text{ère}}$ année

I) On note E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, r et s deux scalaires distincts.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $(f - r\operatorname{Id}) \circ (f - s\operatorname{Id}) = 0$.
Montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - r\operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - s\operatorname{Id})$.
Retrouver le résultat concernant l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du second ordre, ayant r et s pour racines de l'équation caractéristique.
Retrouver le résultat concernant l'ensemble des solutions d'une équation récurrente linéaire d'ordre 2, ayant r et s pour racines de l'équation caractéristique.
II) Convergence simple de la suite de fonctions $f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+$.
À quelle(s) condition(s) sur α a-t-on convergence uniforme ?
Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n} e^{-nx}) dx$

Planche 97 I abordable dès la $1^{ère}$ année

I) On donne deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, u linéaire de E dans F.
On note E' et F' respectivement, un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E et de $\operatorname{Im} u$ dans F.
Montrer qu'il existe une unique application v de F dans E telles que $\operatorname{Ker} v = F'$, $\operatorname{Im} v = E'$, $u \circ v \circ u = u$ et $v \circ u \circ v = v$.

II) Montrer que $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} e^{-xt} dt$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.
Calculer F sur $\mathbb{R}_+^*$.

Planche 98

I) Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{Z})$ telles que $\forall k \in [\![0, 2n]\!]$, $\det(A + kB) = \pm 1$.
Déterminer $\det A$ et $\det B$.

II) Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\exists a \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{p=0}^{n} f^p(a)$ soit bornée.
Montrer que f admet au moins un point fixe.

Planche 99

I) Résoudre $\begin{cases} x' = x - 8y + te^{-t} \\ y' = 2x + y + e^{-2t} \end{cases}$

II) Soit $p \in]0, 1[$; X et Y, deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifient :
$P(X = k, Y = n) = \binom{n}{k} a^n p(1 - p)^n$ avec $a \in \mathbb{R}$ si $k \leqslant n$ et 0 sinon.
Déterminer a puis la loi marginale de Y.
Montrer que $\forall x \in]-1, 1[$, $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{1}{(1 - x)^{k+1}}$.
En déduire la loi marginale de X.
X et Y sont-elles indépendantes ?

Planche 100

I) Nature de $\displaystyle\sum \frac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}$ suivant $\alpha \in \mathbb{R}$.

II) Deux variables aléatoires X et Y de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ vérifient :
$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2$, $P(X = j, Y = k) = a \dfrac{j + k}{2^{j+k}}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer a puis les lois marginales de X et Y.
X et Y sont-elles indépendantes ? Déterminer $P(X = Y)$.

III) Résoudre $\begin{cases} x' = x + 2y + te^t \\ y' = 8x + y + e^{-t} \end{cases}$

Planche 101

I) Soit (u_n) une suite réelle telle que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} n(u_{n+1} - u_n) = 1$.
$\sum u_n$ converge-t-elle ?

II) Donner la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Trouver une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables.

III) Soient deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant une loi géométrique de paramètres respectifs p et q.
Quelle est la probabilité que $A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Planche 102

I) Une urne contient une proportion p de boules blanches ; on procède à des tirages d'une boule avec remise et on note X_n la probabilité associée aux nombres de tirages successifs nécessaires pour obtenir n boules blanches.
Déterminer la loi de X_1 et sa fonction génératrice.
Déterminer G_{X_n}
Déterminer la loi et l'espérance de X_n.
Calculer la loi de X_n d'une autre manière.

II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$.
Que dire de A si elle est diagonalisable ?
Soit X de classe C^1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $X' = AX$; montrer que $f(t) = \| X(t) \|$ est constante.

III) Étudier la série de terme général donné par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n}$.

Planche 103

I) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$; montrer que la trace de ϕ qui, à M, associe $\phi(M) = AM + MA$, vaut $2n \operatorname{rg} A$.

II) Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \Big(1 + \ln \operatorname{sh}(x^\alpha) - \operatorname{sh}\big(\ln(1 + x^\alpha)\big)\Big) dx$ pour $\alpha > 0$.

Planche 104 II abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Domaine de définition et continuité de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin(at)}{1 + t^2} dt$ avec $a > 0$.
f est-elle $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$?
Trouver une équation différentielle du second ordre vérifiée par f.
Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f'(x)$ puis expliciter f.

II) Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de rang 1 si et seulement s'il existe X et Y non nuls dans $\mathbb{R}^n$, tels que $A = X^tY$.

Planche 105

I) Deux machines C_1 et C_2 produisent des pièces qui peuvent être défectueuses avec les probabilités respectives p et $2p$. La proportion de pièces produites par C_1 est α.
On sélectionne une pièce et on s'aperçoit qu'elle est défectueuse : quelle est la probabilité qu'elle provienne de C_1 ?
X_1 est la variable aléatoire qui compte le nombre de pièces produites par C_1 en une heure, parmi ces pièces, D_1 est la variable aléatoire qui compte celles qui sont défectueuses ;
Si X_1 suit une loi de Poisson de paramètre λ, donner la loi de D_1.
X_2, qui suit une loi de Poisson de paramètre μ, est la variable aléatoire qui compte le nombre de pièces produites par C_2 en une heure.
Donner la loi de D, la variable aléatoire qui compte le nombre total de pièces défectueuses produites en une heure.

II) Convergence et calcul de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \int_0^1 \cos(nt^2) dt$.

Planche 106 II abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Convergence simple puis uniforme, sur $[0, 1]$, de la suite $f_n(x) = n^\alpha x(1-x)^\alpha$.
Convergence simple puis uniforme de la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$ sur $[0, 1]$.

II) Soient E un espace vectoriel de dimension finie ; pour$f \in \mathcal{L}(E)$, on note $K_n = \operatorname{Ker}(f^n)$et $I_n = \operatorname{Im}(f^n)$.
Montrer que $K = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n$ et $I = \displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
Montrer que $\exists N \leqslant \dim(E)$, $\forall k \geqslant 0$, $K_{k+N} = K_N$, puis que $E = I \oplus K$.

Planche 107 I abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Donner le rang de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis donner une base de son image et de son noyau.

II) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1 + t^2} dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $f'(x) = -\displaystyle\int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$.
On pose $g(x) = f(x^2)$; montrer que $g'(x) = -2e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt$, puis que $g(x) + \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 = \dfrac{\pi}{4}$. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Planche 108

I) Montrer que $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x \ln t}{t - 1} dt$ existe pour $x \in D =]-1, +\infty[$.
Montrer que I est $\mathcal{C}^\infty$ et donner sa dérivée d'ordre k.
Exprimer I sous forme d'une somme.

II) Soit f un endomorphisme de E, $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, qui laisse stable toute droite de E. Montrer que $\forall x \neq 0$, $\exists \lambda_x \in \mathbb{K}$, $f(x) = \lambda_x x$.
Montrer que si x et y sont non nuls, $\lambda_x = \lambda_y$.
Montrer que $\forall k \in [\![0, n - 1]\!]$, si f laisse stables les sous-espaces de E de dimension k, alors f est une homothétie.

Planche 109

I) Soit f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) \in \mathbb{R}$.
Limites en 0 et $+\infty$ de $g(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x f(t) \sin(x - t) dt$, définie sur $]0, +\infty[$.

II) Soient A et B diagonalisables ; montrer que :
$AB = BA \Leftrightarrow \exists C \in GL_n(\mathbb{C}), \exists (P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$, $A = P(C)$ et $B = Q(C)$.

Planche 110 Abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Montrer que $F_k(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kt} \sin(xe^t) dt$ est définie et continue pour $k \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que, pour $k \geqslant 2$, F_k est solution de $xy' - ky = \sin x$.

II) On note z_1, z_2, z_3 les racines de $X^3 + aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$.
Trouver une CNS sur a, b, c pour que $0, z_1, z_2, z_3$ forment un carré.

Planche 111

I) On cherche y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (E) : $-2y'' + xy' + y = 0$ avec $y(0) = \sqrt{\pi}$ et $y'(0) = 0$. Y a-t-il existence et/ou unicité d'une solution au problème posé ? En donner une expression explicite.
On rappelle la valeur de l'intégrale de Gauss : $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.
Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx - t^2} dt$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et trouver une équation différentielle vérifiée par f. Conclure.

II) Soit $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ stable par produit et par passage à l'inverse :
$\forall (A, B) \in G^2$, $AB \in G$ et $A^{-1} \in G$ et tel que $\forall A \in G$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $A^p = I_n$.
On pose $F = \operatorname{Vect}(G)$ et on en donne une base $(M_1, \dots, M_r)$.
Montrer que ϕ, défini par $\phi(A) = (\operatorname{tr}(AM_1), \dots, \operatorname{tr}(AM_r))$ est un isomorphisme de F dans $\mathbb{C}^r$, puis que $\operatorname{Im}(f)$ est un ensemble fini. Conclure.

Planche 112

I) Soient f et g deux fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 ; montrer que $cov\big(f(X), g(X)\big) \geqslant 0$ (on pourra introduire une variable aléatoire Y, indépendante de X, suivant la même loi, et montrer que $\big(f(X) - f(Y)\big)\big(g(X) - g(Y)\big) \geqslant 0$.
On donne deux suites croissantes (a_n) et (b_n) ; montrer que :
$\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} b_i\right)$.

II) Développer $f(x) = \dfrac{x \operatorname{sh} \alpha}{x^2 - 2 \operatorname{ch} x + 1}$ en série entière.

Planche 113

I) Existence et calcul de $T(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt} - 1}{t} e^{-t} dt$.

II) Montrer que $S \in S_n^+(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXSX \geqslant 0$.
Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S = A^tA \in S_n^+(\mathbb{R})$.
Montrer réciproquement que $\forall S \in S_n^+(\mathbb{R})$, $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $S = A^tA$.

Planche 114

I) Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent une loi géométrique de paramètre p ; donner la loi de $T = \min(X, Y)$, son espérance et sa fonction génératrice. Montrer que $\dfrac{1}{T(T+1)}$ admet une espérance et la calculer.

II) Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^n \ln x$ puis montrer que :

$$\exists(a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \int_0^1 x^2\,|\ln x - ax - b\,|^2\,\mathrm{d}x = \inf_{(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2} \int_0^1 x^2\,|\ln x - \alpha x - \beta\,|^2\,\mathrm{d}x.$$

Planche 115

I) Montrer que $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si $\forall P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, $\exists M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = A$.

II) Étudier et représenter $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^{-x \tan t}\mathrm{d}t$.

Étudier (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
f est-elle intégrable sur $\mathbb{R}_+$? Sur $\mathbb{R}_-$?

Planche 116

I) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$; pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \dfrac{1}{n^a}\displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{Arc}\tan(t)}{t^b}\,\mathrm{d}t$.

Si $b > 0$ et $b \neq 1$, à quelles conditions sur a et b la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge-t-elle ?

Même question pour $b \leqslant 0$, puis pour $b = 1$.

II) Soient E un espace vectoriel normé et deux vecteurs non nuls a et b de E.
$f(t) = \|a + tb\|$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Est-elle lipschitzienne ?
Si elles existent, calculer $\displaystyle\lim_{t\to\pm\infty} f(t)$.

Montrer que $I = \{t \in \mathbb{R},\ a + tb \in B(0,1)\}$ est un intervalle ouvert ou vide.

Planche 117

I) Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et une famille $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de E qui vérifie la relation : $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} < x, e_k >^2$.

Montrer que B est une base orthonormée de E.

II) Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1 + x + x^2}\,\mathrm{d}x$ est définie et que (I_n) converge.

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ et trouver un équivalent de I_n en $+\infty$.

Planche 118

I) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, puis qu'elle y est dérivable et calculer f'. Trouver des équivalents de f en 0 et $+\infty$.

Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.

II) Soit f endomorphisme de matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$; trouver les endomorphismes g de $\mathbb{R}^3$ tels que $g^3 + 2g = f$.

Planche 119

I) Soient E euclidien et u un endomorphisme de E tel que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$.
Soit v un autre endomorphisme de E tel que $\forall (x,y) \in E^2,\ (u(x)|y) = (x|v(y))$.

Montrer que $E = \mathrm{Im}(u) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(v)$ et en déduire que $u + v$ est inversible.

II) Pour $x \in \mathbb{R}$, justifier l'existence de $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{sh}(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Montrer que F est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et donner son développement.

Planche 120

I) On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les valeurs propres distinctes de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable, $m_1, \ldots, m_r$ leurs ordres de multiplicité respectifs.
Montrer qu'il existe un polynôme annulateur de A de degré r et que tout polynôme annulateur de A est de degré supérieur ou égal à r.
On note $\mathbb{K}[A] = \{P(A),\ P \in \mathbb{K}[X]\}$; montrer que $\dim \mathbb{K}[A] = r$.

On pose $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AB = BA\}$; montrer que $\dim C(A) = \displaystyle\sum_{s=1}^{r} m_s^2$.

Montrer que $\dim C(A) = r \Leftrightarrow \dim \mathbb{K}[A] = n \Leftrightarrow n = r \Leftrightarrow C(A) = \mathbb{K}[A]$.

II) Étudier (x_n) définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = \sqrt{\dfrac{n+1}{2}}$.

On pose $u_n = 1 - x_n$; donner la nature de $\sum u_n$.

Planche 121

I) Montrer que $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est définie et munit $\mathbb{R}_n[X]$ d'un produit scalaire. On note $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) = 0\}$.
Soit $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ la base orthonormalisée à partir de la base canonique.
Calculer $P_k(0)^2$, trouver une base de $F^\perp$ et en déduire $d(1, F)$.

II) Pour $x \in E$, $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé on pose $f(x) = \dfrac{x}{1 + \|x\|}$.

Montrer que f est bijective de E dans $B_0(0,1)$ puis qu'elle est k-lipschitzienne.

Planche 122

I) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ puis trouver les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M^2 + M = A$.

II) Calculer $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-k}{n-k}(-1)^k$.

Planche 123

On note $S(A) = \{P^{-1}AP,\ P \in GL_n(K)\}$ où A est une matrice donnée.
Déterminer la limite de la suite $(Q_q^{-1}TQ_q)_{q\in\mathbb{N}^*}$ où T est triangulaire supérieure et $Q_q = Diag(q^n, q^{n-1}, \ldots, q)$.
Montrer que A est trigonalisable si et seulement si l'adhérence de $S(A)$ contient une matrice diagonale (on pourra utiliser le polynôme caractéristique).
Montrer que T est nilpotente si et seulement si $S(A)$ contient une matrice supérieure à diagonale nulle, si et seulement si l'adhérence de $S(A)$ contient la matrice nulle.

Planche 124 Avec Python

Montrer que $2 < \mathrm{e} < 3$ puis que $\mathrm{e}^2 + 1 < 4\mathrm{e}$.
Comparer $\mathrm{ch}\, t$ et $1 + t^2$ pour $t \in [0, 1]$.

Écrire une fonction Python qui approche $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^n}\,\mathrm{d}x$; en déduire un équivalent à une constante c dont on donnera une valeur approchée.

On donne $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$; nature de $\sum I_n$, $\sum \dfrac{1}{(\mathrm{ch}\,1)^n}$, $\sum J_n$.

Donner un équivalent de I_n puis un équivalent de J_n.

Planche 125 Avec Python

Soit $u \in \mathbb{R}^n$ muni de sa norme euclidienne et de sa base canonique.

On pose $H_u = I_n - 2\dfrac{uu^T}{u^Tu}$ si $u \neq 0$ et $H_u = I_n$ sinon.

Montrer que H_u est la réflexion par rapport à $u^\perp$.
Si r est une réflexion, montrer qu'il existe u tel que H_u soit la matrice de r dans la base canonique.
Coder une fonction Python qui donne H_u pour tout vecteur u.

Donner la matrice de la réflexion de $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ par rapport au plan $x + y + z = 0$.

Montrer que, si v est non colinéaire à e_1, $u = v - \|\,v\,\|\, e_1$ vérifie $H_u(v) = \|\,v\,\|\, e_1$.
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $\exists u \in \mathbb{R}^n$, $\exists a \in \mathbb{R}$, $\exists B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que

$$H_uA = \begin{pmatrix} a & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Planche 126

Pour $s > 1$, on pose $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$, on donne une variable aléatoire X qui suit la loi ζ : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X = n) = \zeta(s)\,\dfrac{1}{n^s}$ et on note A : «n divise X».

Calculer la probabilité de cet évènement pour tout n.
Si $n_1, \ldots, n_k$ sont des nombres premiers entre eux, montrer que les évènements «n_i divise X» sont mutuellent indépendants.
On note (p_n) la suite des nombres premiers rangés dans l'ordre croissant ; montrer que $\displaystyle\prod_{n\in\mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) = \frac{1}{\zeta(s)}$ puis montrer que $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{p_n}$ est divergente.

Planche 127

On donne A, matrice de taille n dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux de l'antidiagonale qui valent $a_{i,n+1-i} = a_i \in \mathbb{C}$.
Rappeler la définition du polynôme minimal d'une matrice M et donner une CNS sur ce polynôme pour que M soit diagonalisable.
Déterminer $\det A$ et $\det(A^2)$.
Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ tel que u^2 soit diagonalisable ; montrer que u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Ker}\, u = \mathrm{Ker}\, u^2$ puis en déduire que A est diagonalisable.

Planche 128

On note $R = \{(X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ \|\,X\,\| = \|\,Y\,\| = 1 \text{ et } (X|Y) = 0\}$.
Pour $S \in S_n(\mathbb{R})$, on pose $f_S(X) = X^TSX$.
Énoncer le théorème spectral sous sa forme matricielle.
Si S est diagonale, exprimer $f_S(X)$ en fonction des coordonnées de X.
Exprimer X^TSY en fonction de f_S
Soiten $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$ les valeurs propres de S.
Montrer que $\lambda_n - \lambda_1 \leqslant 2 \displaystyle\sup_{(X,Y)\in R} \left|\,X^TSY\,\right|$ puis montrer l'inégalité inverse.

Planche 129 Avec Python

Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien, on note $C(r) = \{u \in \mathbb{Z}^2,\ \|\,u\,\| \leqslant r\}$ et $C^+(r) = \{u \in \mathbb{N}^2,\ \|\,u\,\| \leqslant r,\ r > 0\}$.
Écrire en Python des fonctions calculant $N(r) = cardC(r)$ et $N^+(r) = CardC^+(r)$.
Conjecturer le comportement de $AN^+(r) - N(r) - 4\lfloor r\rfloor$ puis prouver la conjecture émise.

Tracer le graphe de $\dfrac{N(r)}{r^2}$ et conjecturer le comportement de $N(r)$ à l'infini.

Montrer que $N^+(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\lfloor\sqrt{n - 2 - k^2}\rfloor + 1)$ et en déduire une preuve de la conjecture précédente.

Écrire une fonction Python qui calcule le cardinal de $C^d(r) = \{u \in \mathbb{N}^d,\ \|\,u\,\| \leqslant r\}$ (on préconise l'utilisation d'une fonction récursive et des valeurs de r et d pas trop grandes).
Soient (a_n) et (b_n) deux suites équivalentes de réels strictement positifs ; montrer que, si $\sum a_n$ diverge et si $\sum a_n x^n$ admet 1 pour rayon de convergence, $\sum b_n x^n$ admet aussi 1 pour rayon de convergence.
Si on note respectivement f et g les sommes des deux séries, montrer que $f(x) \sim g(x)$ en 1^-.
Quel est la rayon de convergence de $\sum x^{n^2}$?

On note ϕ la somme de la série ; montrer que $\dfrac{1}{1-x}\,\phi(x)^2 = \displaystyle\sum_{n\geqslant 0} N^+(\sqrt{n})x^n$ et en déduire un équivalent de $\phi(x)$ en 1^-.
Déduire des questions précédentes la valeur de l'intégrale de Gauss.

Planche 130 Avec Python

Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier que $p(n)$, l'entier le plus proche de $\sqrt{n}$, existe et est unique.

On pose $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-p(n)} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+p(n)}$

Écrire une fonction sur Python donnant $p(n)$ pour tout n.

Représenter la suite des sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} u_n$ de 0 à 100 et émettre une conjecture sur la convergence de $\sum u_n$.

Afficher les listes de $n+p(n)$ et $n-p(n)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 100$; quelles particularités remarque-t-on ?

Afficher les couples $\big(n, p(n+1) - p(n)\big)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 100$.

Montrer que $\sum u_n$ converge.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, p(n+1) - p(n) \in \{0, 1\}$; pour quels n a-t-on $p(n+1) - p(n) = 1$ (on pourra utiliser les couples $\big(n, p(n+1) - p(n)\big)$ affichés) ? Calculer $\sum_{n \geqslant 0} u_n$.

Planche 131

I) E est un ensemble infini muni d'une loi interne ; on note a_n le nombre de parenthésages d'une expression à n éléments de E ; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.

Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$.

Lorsqu'il y a convergence, on note $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ et on suppose $R > 0$.

Montrer que $\forall x \in]-R, R[$, $f(x)^2 - f(x) + x = 0$; donner a_n en fonction de n.

II) Montrer qu'il n'existe pas quatre points A_0, A_1, A_2, A_3 de $\mathbb{R}^2$, tels que $\forall (i,j) \in [\![0,3]\!]^2$, $\| A_i A_j \| \in 2\mathbb{N} + 1$ (on pourra considérer les $(\overrightarrow{A_0 A_i} | A_0 A_j)$).

Planche 132 Avec Python

Soit ϕ, 2-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $\phi(x) = x$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $\phi(x) = 2 - x$ pour $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Pour $y \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$, on note $\alpha_m = \frac{1}{4^m} \lfloor 4^m y \rfloor$ et $\beta_m = \frac{1}{4^m} (\lfloor 4^m y \rfloor + 1)$.

On pose, sous réserve d'existence, $f(x) = \sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x)$.

Écrire une fonction phi prenant en argument x et qui renvoie $\phi(x)$.

Tracer $S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k \phi(4^k x)$ sur $[0, 2]$ pour $n \in [\![1, m]\!]$.

Que peut-on conjecturer sur la régularité de f ?

Calculer numériquement $| \phi(4^n \alpha_m) - \phi(4^n \beta_m) |$ pour $y \in [0, 2]$, $m \in [\![5, 15]\!]$ généré aléatoirement et $n \in [\![2, m+5]\!]$; que peut-on conjecturer ?

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, $| \phi(4^n \alpha_m) - \phi(4^n \beta_m) |$ vaut 0 si $n > m$ et 1 si $n \leqslant m$.

Planche 133

Montrer que $P(X) = X^3 - X^2 - X - 1$ admet une unique racine réelle dans $]1, 2[$ et deux racines complexes de module strictement inférieur à 1.

On lance n fois une pièce de manière indépendante et on note A_n l'évènement «on a obtenu pour la première fois 3 piles d'affilée aux lancers $n-2$, $n-1$, n».

Montrer, en s'intéressant aux premiers lancers, que $u_n = P(A_n)$ suit une relation de récurrence d'ordre 3.

Nature de $\sum 2^n u_n$. S'il y a convergence, calculer la somme.

Planche 134 Avec Python

On pose $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n(X) = \prod_{k=0}^{n-1} (X + k) = \sum_{k=0}^{n} s_{n,k} X^k$.

On note R_k le rayon de convergence de $\sum_{n \geqslant k} \frac{s_{n,k}}{n!} x^n$.

Écrire une fonction $\mathrm{P}(n)$ qui renvoie P_n et en déduire une fonction $\mathrm{s}(n, k)$ qui renvoie $s_{n,k}$; la tester en vérifiant les valeurs de $s_{n,0}$ et $s_{n,n}$ pour différentes valeurs de n.

Tracer les courbes de $n^{-2k} s_{n,n-k}$ en fonction de n, pour $1 \leqslant k \leqslant 3$ et $k \leqslant n \leqslant 20$. Que peut-on conjecturer sur les comportement de la suite de terme général $n^{-2k} s_{n,n-k}$ quand n tend vers $+\infty$.

Proposer une méthode numérique permettant de calculer R_k pour $1 \leqslant k \leqslant 5$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; calculer $s_{n,1}$ et $\sum_{k=0}^{n} s_{n,k}$.

Trouver une relation entre $s_{n+1,k}$, $s_{n,k}$ et $s_{n,k-1}$.

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $s_{n,k} \sim \frac{(n-1)!}{(k-1)!} \ln(n)^{k-1}$ au voisinage de $+\infty$ (on pourra procéder par récurrence).

Cela est-il en accord avec les résultats obtenus pour le calcul de R_k ?

Planche 135

Justifier que sin est développable en série entière et donner ce développement.

Montrer que $\Re e \left(\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-a e^{-it}} \right) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k a^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$.

En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$.

Planche 136

On munit l'espace vectoriel E des fonctions continues de $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de la norme de la convergence uniforme et on note A l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients entiers.

Montrer que $\overline{A}$ est un sous-anneau de E.

Pour $p \in \mathbb{N}$, montrer que $Q_p(X) = \frac{1}{p} \left(1 - X^p - (1 - X)^p\right)$ est dans A.

Majorer $\left\| \frac{1}{p} - Q_p \right\|_\infty$ et montrer que A est dense dans E.

Concours Commun Centrale-Supélec-option PC

Planche 137

Montrer que $f(x) = < a, x > b + < b, x > a$, où a et b sont fixés, non colinéaires, dans E euclidien de dimension n, est un endomorphisme symétrique.

Déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

Planche 138

On note E l'espace des fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$.

Montrer que $N(f) = \| f + 2f' + f'' \|_\infty$ définit une norme sur E.

Montrer que $\exists a > 0$, $\| f \|_\infty \leqslant a N(f)$.

Existe-t-il $b > 0$ tel que $N(f) \leqslant b \| f \|_\infty$?

Planche 139 Avec Python

Montrer que l'ensemble E des f, continues sur $\mathbb{R}_+$, telles que $\int_0^{+\infty} f^2(x) \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$ converge, est un espace vectoriel contenant $\mathbb{R}[X]$.

Montrer que $\forall (f, g) \in E^2$, $< f, g > = \int_0^{+\infty} f(x) g(x) \mathrm{e}^{-x} \mathrm{d}x$ définit un produit scalaire.

Montrer qu'il existe une famille de polynômes $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que : $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, $< E_m, E_n > = \delta_{n,m}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $E_n^{(n)} \geqslant 0$.

On donne $f_n(x) = \mathrm{e}^{-x} \frac{x^n}{n!}$; écrire $f_n^{(n)}(x)$ sous la forme $\mathrm{e}^{-x} P_n(x)$ en explicitant P_n avec des coefficients binomiaux.

Écrire une fonction Python renvoyant $< P, Q >$, où P et Q sont deux polynômes, à l'aide de l'écriture précédente.

Écrire une fonction Python renvoyant P_n.

Planche 140

Montrer que $f(x) = \int_0^{\pi} \ln(1 - 2x \cos t + x^2)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et paire.

Montrer que $f(x^2) = 2f(x)$ et calculer f explicitement (on distinguera les cas $|x| > 1$, $|x| < 1$ et $|x| = 1$).

Planche 141 Avec Python

Montrer que tout élément de $P_n = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exists p \in \mathbb{N}^*, A^p = I_n\}$ est inversible.

Montrer que $P_2 \cap \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est infini.

Montrer que si $A \in P_n \cap \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable, alors $A^2 = I_n$.

On donne $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $f_p(z) = z^p \prod_{k=1}^{p} (1 - z^k)$.

Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1 \Rightarrow \sum_{p \geqslant 1} f_p(z)$ converge.

Montrer que $z \in P_1 = \{z \in \mathbb{C}, \exists p \in \mathbb{N}^*, z^p = 1\} \Rightarrow \sum_{p \geqslant 1} f_p(z)$ converge.

On pose $F_p(A) = A^p \prod_{k=1}^{p} (I_n - A^k)$ et $F_0(A) = I_n$.

Montrer que $\forall A \in P_n$, $\sum_{p \in \mathbb{N}} F_p(A)$ converge.

Montrer que tout élément de P_2 est diagonalisable.

On admet ce résultat pour P_n ; définir une fonction Python $\mathrm{F}(p, M)$ qui calcule $F_p(M)$ et calculer $\sum_{p=0}^{+\infty} F_p(A)$, $\sum_{p=0}^{+\infty} F_p(B)$.

Établir une conjecture puis la démontrer.

Planche 142 Avec Python

Un glacier reçoit un nombre aléatoire N_t de commandes au temps t, avec $N_0 = 0$. On suppose que :

- N_{t+s} ne dépend pas de N_s ;
- N_s et $N_{t+s} - N_s$ sont indépendants mais suivent la même loi ;
- au voisinage de $h = 0^+$, $P(N_h > 1) = o(h)$.

On note $G_u(s) = E(s^u)$ et on suppose que l'application qui à $u \in [0, 1]$ associe $G_u(s)$ est dérivable en 0 de dérivée $-\theta(s)$.

Montrer que $G_u + G_v = G_u G_v$.

On note T_k le temps de la k-ème commande.

On donne le programme simu(n) qui crée le tableau des temps $[T_0, \ldots, T_n]$ et le programme freq(n) :

```
def freq(n) :
  p = np.zeros(n + 1)
  for i in range(100000)
  t =simu(n + 1)
  test=True
  k = 0
  while(test) :
    test=False        if (k < n + 1) and (t[k + 1] ⩽ 1) :
      test=True
      k = k + 1
  if k < n + 1 :
      p[k] = p[k] + 1/100000
  return p.
```

Expliquer pourquoi freq(n) renvoie une approximation de la loi $P(N_1 = k)$, $0 \leqslant k \leqslant n$.

À l'aide de freq(50), afficher les valeurs de la suite de terme général $(k+1) \frac{p_{k+1}}{p_k}$ pour $10 \leqslant k \leqslant 30$; quelle valeur revient souvent ?

Conjecturer la loi de N_1 et comparer, grâce à une courbe, cette conjoncture et les valeurs calculées.

Planche 143

Intégrer $(1 - x^2) y'' - x y' + a^2 y = 0$ pour $x \in]-1, 1[$ et $a = 0$.

On suppose $a \neq 0$; donner une base de solutions développables en série entière.

À quelle(s) condition(s) l'équation admet-elle une solution polynomiale ?

Donner les solutions polynomiales dans le cas $a = 2$.

Planche 144
Résoudre $e^z = z_0 \in \mathbb{C}$.
Si $f \in C^1([0,2\pi],\mathbb{C})$ ne s'annule pas et vérifie $f(0) = f(2\pi)$, montrer que $\alpha = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{f'(t)}{f(t)}\,dt \in \mathbb{Z}$.
Que vaut α pour $f(t) = \cos(nt) + i\sin(nt)$?
Conjecturer la valeur de α pour $f(t) = 1 + R\cos(nt) + i\big(1 + R\sin(nt)\big)$ puis la calculer.

Planche 145
On donne $A(i,j) = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ où $(i,j) \in \{0,1\}^2$ et $B = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; parmi ces matrices, lesquelles sont semblables ?
Montrer que deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, non proportionnelles à I_2, sont semblables si et seulement si elles ont même trace et même déterminant.

Planche 146 Avec Python
On donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$; calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt$.
X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Poisson de paramètre λ.
Écrire $P(X = Y)$ sous forme d'une somme.
Écrire un programme Prob(lamb) qui calcule la probabilité p_λ que l'évènement $(X = Y)$ se réalise pour 10^4 valeurs de X et Y.
Tracer $\sqrt{\lambda\pi}p_\lambda$ pour $0,015 \leqslant \lambda \leqslant 10$ (on donne une instruction plt.axis pour fixer les axes) ; quel est l'équivalent de p_λ quand λ tend vers $+\infty$?
Écrire un programme calculant $w_k = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2k}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$ et tracer les suites de terme général $(2k+1)(w_k - w_{k+1})$ et w_{k+1} pour $0 \leqslant k \leqslant 20$.
Que peut-on conjecturer ? Le démontrer.

Planche 147 Avec Python
Pour $n \geqslant 1$ on note $f_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + t + \ldots + t^{n-1}}}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$.
Vérifier que u_n est définie, calculer u_2 puis montrer que (u_n) converge.
Montrer que $\forall t \in [0,1]$, $\forall n \geqslant 1$, $0 \leqslant f_n(t) - \sqrt{1-t} \leqslant \dfrac{t^n}{\sqrt{1 + t + \ldots + t^{n-1}}}$.
Montrer que la suite de fonctions f_n converge uniformément.
Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{2}{3}$.
On donne $(x+1)^\alpha = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^j + o(x^n)$ au voisinage de 0 ; rappeler l'expression des a_k, montrer que $a_0 = 1$ et que $a_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha - k}{k+1}$.
Écrire une fonction Python qui calcule a_n.
On note d_n le coefficient du terme de puissance n dans le développement limité de f_n en 0.
Calculer d_3 puis écrire une fonction Python permettant de calculer d_n.

Planche 148 Abordable dès la 1[ère] année
Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose $\psi_A(M) = AM - MA$.
ψ_A est-elle surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même ?
On suppose $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$; soit X_0 tel que $A^{n-1}X_0 \neq 0$.
Déterminer une base de $\mathbb{K}^n$ en utilisant A et X_0.
Déterminer une base de $\operatorname{Ker}\psi_A$.

Planche 149
Déterminer une solution développable en série entière de $f'(x) = f(x)f(\lambda x)$ où f est dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\lambda \in\,]-1,1[$.
Existe-t-il d'autres solutions ?

Planche 150 Avec Python
Pour f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}^*$, on pose $\Delta_a(f)(x) = \dfrac{f(x+a) - f(x)}{a}$.
Si f est de classe C^2, montrer que $\displaystyle\lim_{a\to0} \Delta_a(f)(x) = f'(x)$ et $\displaystyle\lim_{a\to0} \Delta_a^2(f)(x) = f''(x)$.
Écrire une fonction Delta(f,a) qui prend en argument f et a et renvoie $\Delta_a(f)$.
Écrire une fonction Derive(f,n,x) qui renvoie $\Delta_a^n(f)(x)$.
On choisit g et h de classe C^2, h ne s'annulant pas, et on pose $f = \dfrac{g}{h}$.
Donner les dérivées successives de g en fonction de celles de f et h.
On pose $a_{i,j}(x) = \binom{i}{j}h^{(i-j)}(x)$ si $j \leqslant i \leqslant n$, $a_{i,j}(x) = 0$ si $i < j < n$ et $a_{i,n}(x) = g^{(i)}(x)$; on note $A(x) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de coefficients $a_{i,j}(x)$.
Montrer, à l'aide d'une opération sur les colonnes, que $\det A(x) = f^{(n)}(t)\big(h(t)\big)^{n+1}$.
Tracer les graphes de $f^{(n)}$ et $\dfrac{\det A}{h^{n+1}}$ sur $[0,1]$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\tan^{(n)}(0)$ est un entier.

Planche 151
Une compagnie de métro vend ses tickets 1\$/pièce et facture la première fraude 40\$, la deuxième 200 et 400 les suivantes.
La présence d'un contrôleur a une probabilité p.
Un voyageur choisit de frauder jusqu'à la deuxième amende, puis s'arrête ; déterminer la loi de T, variable qui compte le nombre de voyages qu'il a pu effectuer jusqu'à la deuxième amende. Calculer $E(T)$ et $V(t)$.
la compagnie souhaite qu'il y ait une chance sur soixante que la fraude soit rentable pour le voyageur ; quelle doit-être la fréquence p des contrôles ?

Planche 152
Pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2\backslash\{(0,0)\}$, on pose $f(x,y) = \dfrac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}$ et $f(0,0) = 0$.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^2$ et étudier ses extrema globaux.

Planche 153
A et B sont symétriques réelles et vérifient $A^{2019} = B^{2019}$.
Justifier que si A est inversible, A^{2019} l'est aussi.
Exprimer les valeurs propres de A^{2019} en fonction de celles de A.
Montrer que $A = B$. Si $A^2 = B^2$, a-t-on $A = B$?

Planche 154
I) On dit que f est une contraction de E euclidien si $\forall x \in E$, $\| f(x) \| \leqslant \| x \|$.
Montrer que $f \in S_n(E)$ est une contraction si et seulement si $\forall \lambda \in Sp(f)$, $|\lambda| \leqslant 1$.
Montrer que, si $f \in S_n(E)$ et $P \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x \in E$, $\| P(f)(x) \| \leqslant \displaystyle\sup_{\lambda\in Sp(f)} |P(\lambda)|\,\| x \|$.
Soit f un automorphisme de E, de matrice M dans la base canonique ; montrer qu'il existe une matrice S symétrique, à valeurs propres strictement positives, telle que ${}^tMM = S^2$.
II) Cours : inégalité de Markov.

Planche 155 Avec Python
On donne $u_0 \in [0,\pi]$ et on pose $u_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{u_k}{n+1}\cdot$
Écrire une fonction Python qui retourne les p premiers termes de la suite en fonction de u_0 ; quelle est la complexité spatiale ? Temporelle ?
Montrer que $\forall x \in [0,\pi]$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$ et $\forall m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \leqslant \frac{1}{2m^2}\cdot$
On pose $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$; montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - \dfrac{\pi^3}{6(n+2)^2} \leqslant u_{n+1} \leqslant v_n$ et en déduire que $-\dfrac{\pi^3}{6(n+2)^3} \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.
Montrer que (u_n) converge.
Écrire un algorithme qui permet de calculer la limite de (u_n) en fonction de u_0 à ε près fixé. Tracer le graphe de f qui, à u_0, associe la limite de (u_n).

Planche 156 I abordable dès la 1[ère] année
I) Montrer que $\phi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
Trouver les polynômes P tels que $\dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)\,dt\right)^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt$.
On donne $P_0 = 1$, $P_1 = X$, $P_2 = X^2 - \dfrac{1}{3}$; montrer que (P_0, P_1, P_2) est une famille orthogonale et donner $\operatorname{Vect}(P_0, P_1, P_2)$.
Calculer le projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$.
Calculer $\inf\left\{\displaystyle\int_{-1}^{1} P^2(t)\,dt,\ P \in \mathbb{R}_3[X] \text{ et } P \text{ unitaire}\right\}$.
II) Cours : formule de Taylor pour les polynômes ; démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité ; théorème spectral.

Planche 157 Avec Python
On note $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient $a_{ij} = \max\{i,j\}$.
Écrire un programme qui renvoie A_n et la représenter pour $n \in \{3,4,5\}$.
Est-elle inversible ? Calculer A_n^{-1} avec Python pour $n \in \{3,4,5\}$.
A_n est-elle diagonalisable ? Donner la dimension de ses sous-espaces propres pour $n \in \{3,4,5\}$ puis conjecturer la dimension de ses sous-espaces dans le cas général et prouver cette conjecture.
On note $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient $m_{ij} = i + j$.
Écrire un programme qui renvoie M_n, donner son rang pour $n \in \{3,4,5\}$, puis conjecturer son rang dans le cas général et prouver cette conjecture.
Donner, sans calcul, une valeur propre de M_n et prouver qu'elle en admet au moins deux autres. Trouver ces deux valeurs d'abord grâce aux traces de M_n et M_n^2, puis grâce à $(\operatorname{Ker} M_n)^\perp$.

Planche 158
Existence de $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,dt$ pour $a > 0$.
Soit $a \in\,]0,\pi[$; on pose $f(x) = \dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
Montrer que f est C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ (on pourra remarquer que $f(x) = -\dfrac{\frac{\sin(x) - x}{x^2}}{\frac{\sin(x)}{x}}$).
Soit $f \in C^1([a,b])$; montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt = 0$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,dt - \int_a^b \frac{\sin(nt)}{t}\,dt$.
On donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nt)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$; déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^a \frac{\sin(nt)}{\sin(t)}\,dt$ pour $a = \dfrac{\pi}{2}$, $a < \dfrac{\pi}{2}$, $a > \dfrac{\pi}{2}$.
II) Cours : formule de Taylor avec reste intégral.

Planche 159 Abordable dès la 1[ère] année
Montrer que, pour $n \geqslant 2$, $P_n(X) = X^n - X + 1$ admet au plus une racine réelle.
Donner les racines de P_n' et montrer que P_n est à racines simples.
Calculer $\begin{vmatrix} 1+r_1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+r_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1+r_3 \end{vmatrix}$ où r_1, r_2, r_3 sont les racines de P_3.

Planche 160 Avec Python

Le candidat est amené à utiliser les logiciels Pyzo et Scilab pour la recherche et la résolution du problème.
Soient $h > 0$, suffisamment petit, et la suite (t_i) définie par $\forall i \in \mathbb{N},\ t_i = ih$.
L'équation différentielle linéaire $(E) : y'' + \omega^2 y = 0$ régit le comportement d'un oscillateur harmonique.
Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est en bijection avec l'ensemble des solutions de $(E') : X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} X$.

Justifier que les suites (y_i) et (z_i) définies par $\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hz_i \\ z_{i+1} = z_i - h\omega^2 y_i \end{cases}$, fournissent une approximation des solutions de (E) et de (E').
Écrire avec Pyzo une fonction Euler qui affiche la solution obtenue par la méthode d'Euler de l'équation (E) ; on tracera aussi la solution exacte de l'équation (E). Que remarque-t-on après plusieurs périodes ?

Réécrire la fonction Euler pour les suites $(\bar{y}_i)$ et $(\bar{z}_i)$: $\begin{cases} \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h\bar{z}_i \\ \bar{z}_{i+1} = \bar{z}_i - h\omega^2 \bar{y}_{i+1} \end{cases}$
Montrer que (y_i) est solution d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et en déduire l'expression de y_i. Conclure sur le caractère borné de la solution.
Montrer que $(\bar{y}_i)$ est solution d'une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 et en déduire l'expression de $\bar{y}_i$. Le résultat est-il en accord avec la réécriture de la fonction Euler ?

Planche 161

Pour $x \in [1, +\infty[$, on pose $u_0(x) = x$ et $u_{n+1}(x) = u_n(x) + \dfrac{1}{u_n(x)}$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(x)$ est défini. La suite $\big(u_n(x)\big)$ admet-elle une limite ?
On pose $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{u_n(x)}$; montrer que $\sum f_n$ converge simplement.
Montrer que la fonction somme f est continue sur $[1, +\infty[$.
Montrer que $\sum f_n$ ne converge pas normalement.

Planche 162 Avec Python

On donne $u_0 = 1$ et $u_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} u_j$.

Écrire une fonction Python qui renvoie $n!$ et une seconde qui renvoie u_n (on pourra utiliser scipy.special as sp et sp.binom(n, i)).
Afficher les valeurs des deux fonctions pour $5 \leqslant n \leqslant 15$ et comparer u_n et $n!$.
Pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on pose $u(n, k) = \dfrac{k^n}{k!}$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{k \geqslant 0} u(n, k)$ converge, on notera S_n sa somme.

Écrire une fonction qui renvoie $S(n, p) = \dfrac{1}{p} \displaystyle\sum_{k=0}^{p} u(n, k)$.
Quelle conjecture émettre sur $S(n, p)$ et u_n ?
Montrer que, pour $n \geqslant 1$, $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} S_j$ et démontrer la conjecture précédente.
Montrer que $\sum \dfrac{u_n}{n!} x^n$ a un rayon de convergence non nul, on note $f(x)$ sa somme ; trouver une équation différentielle vérifiée par f, la résoudre et donner f.

Planche 163

On assimile le plan $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$; montrer que f, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, est $\mathbb{R}$-linéaire si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$.
Les constantes α et β sont-elles uniques ?
Déterminer une CNS sur α et β pour que f soit un automorphisme de $\mathbb{C}$.
Soit $\tau \in]0, \pi[$; déterminer l'expression complexe de la réflexion r_τ par rapport à la droite engendrée par le vecteur $\vec{v}$ dont les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont $(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

Planche 164 Avec Python

Justifier que la donnée de $z_1 = 1$ et la relation $z_{n+1} = z_n + \mathrm{i}\,\dfrac{z_n}{|z_n|}$ définissent une suite dont on calculera les premiers termes avec Python.
Soit g de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\forall t > 0$, $g(t+1) - g(t) = \operatorname{Arctan} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $g(1) = 0$ et $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} g'(t) = 0$.
Écrire g' sous forme d'une série de fonctions (on pourra utiliser $g'(t+1) - g'(t)$).
En déduire que $g(t) = \displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty} \left(\operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{p+1}} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{\sqrt{p+t}} \right)$.
Tracer simultanément le support Γ de l'arc paramétré : $\begin{cases} x(t) = \sqrt{t} \cos g(t) \\ y(t) = \sqrt{t} \sin g(t) \end{cases}$ pour $t > 0$ et le début de polygones $(A_n)_{n \in [\![1,5]\!]}$ des points d'affixe z_n.
Émettre une conjecture et la démontrer.

Planche 165 Avec Python

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $S(P) = \displaystyle\sum_{k \geqslant 0} \frac{P(k)}{k!}$.
Montrer que $S(P)$ est définie et que S est une forme linéaire sur $\mathbb{R}[X]$.
Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{50} \frac{P(k)}{k!}$ pour $P(X) = X^d$, $0 \leqslant d \leqslant 10$; commenter.
On pose $H_0(X) = 1$ et $H_{n+1}(X) = (X - n) H_n(X)$.
Montrer que $(H_n)_{n \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Calculer $S(H_n)$ puis $S(P)$ pour P quelconque.

Planche 166

Domaine de définition de $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\, \mathrm{d}t$.
Montrer que F est $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine.
Montrer que F est développable en série entière et donner le rayon de convergence.

Concours Communs Polytechniques-option PH-MP

Planche 167

I) Exercice N°2 de la banque CCP (série entière)
II) Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, suivent une loi de Bernoulli de même paramètre p.
Déterminer la loi suivie par $Y_n = X_n X_{n+1}$ et en déduire $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
Déterminer $cov(Y_i, Y_j)$ pour $i \neq j$; les Y_n sont-elles mutuellement indépendantes ?
Déterminer l'espérance et la variance de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
On pose $Z_n = \dfrac{1}{n} S_n$; montrer que $\forall a > 0$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P(\big| Z_n - p^2 \big| \geqslant a) = 0$.

Planche 168 II abordable dès la 1ère année

I) Exercice N°7 de la banque CCP (série numérique).
II) Déterminer le noyau et l'image de g, qui à $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ associe $P(X+1) - P(X)$ (on pourra étudier le degré de P). Montrer que g est surjectif de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Planche 169

I) Exercice N°8 de la banque CCP (série numérique, série de fonctions).
II) Valeurs propres possibles de $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 + M = A$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; en utilisant det A, montrer qu'au moins une des valeurs propres de M est 0 ou -1. Qu'en déduit-on sur le polynôme caractéristique de M ?
Montrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Trouver 4 matrices vérifiant $M^2 + M = A$.

Planche 170 II abordable dès la 1ère année

I) Exercice N°9 de la banque CCP (suite de fonctions).
II) Soit f un morphisme d'un groupe G dans un groupe G'.
Montrer que si $x \in G$ est d'ordre fini n, $f(x)$ est d'ordre fini divisant n.
Trouver tous les morphismes de $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}, +)$ puis de $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, +)$ dans $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.

Planche 171

I) Exercice N°15 de la banque CCP (série de fonctions).
II) Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ et l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n, dont tous les coefficients diagonaux sont strictement positifs, noté T_n^+, sont des sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ et prouver que $O_n(\mathbb{R}) \cap T_n^+ = \{I_n\}$.
Montrer que, si $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $\exists O \in O_n(\mathbb{R})$ et $T \in T_n^+$ uniques, telles que $A = OT$ (on pourra s'intéresser à une base orthonormale donnée par Gram-Schmidt).

Planche 172 II abordable dès la 1ère année

I) Exercice N°18 de la banque CCP (série entière).
II) Montrer que $< P, Q > = \displaystyle\int_0^1 P(t) Q(t) \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
Trouver a et b réels tels que $\displaystyle\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 \mathrm{d}t$ soit minimal, d'abord en utilisant une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$, puis en montrant que $X^2 - aX - b \in \mathbb{R}_1[X]^\perp$.

Planche 173

I) Exercice N°25 de la banque CCP (intégrale impropre/généraisée).
II) Montrer que si f est un endomorphisme symétrique, défini et positif de $\mathbb{R}^n$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $(f(h)|h) \geqslant 0$.
Montrer que g, définie par $g(x) = \dfrac{1}{2}(f(x)|x) - (u|x)$ où u est un vecteur fixé dans $\mathbb{R}^n$, est différentiable en tout point et exprimer sa différentielle.
Montrer que g admet un unique point critique de Z_0 tel que $Z_0 = f^{-1}(u)$; est-ce un extremum global (on pourra étudier le signe de $g(Z_0 + h) - g(Z_0)$).

Planche 174 II abordable dès la 1ère année

I) Exercice N°37 de la banque CCP (norme, normes équivalentes).
II) Pour U et V vecteurs de $\mathbb{R}^n$ on pose $M = I_n + U^t V$ et $t = \mathrm{tr}(U^t V)$.
Montrer que $M^2 - (t+2)M + (t+1)I_n = 0$ (on pourra remarquer que ${}^t UV \in \mathbb{R}$).
En déduire les cas où M est inversible et exprimer M^{-1} en fonction de U et V.

Planche 175

I) Exercice N°44 de la banque CCP (topologie d'espace vectoriel normé).

II) On donne $d_0 = 1$, $d_1 = \dfrac{1}{2}$ et $d_n = \begin{vmatrix} \frac{n}{n+1} & \sqrt{\frac{1}{n+1}} & 0 & \cdots & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{n+1}} & \frac{n-1}{n} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{2}{3} & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{\frac{1}{3}} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$

Calculer d_2 et d_3.
Montrer que $\forall n \geqslant 2$, $(n+1) d_n = n d_{n-1} + d_{n-2}$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|d_n| < 1$ et en déduire une information sur le rayon de convergence R de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} d_n x^{n+1}$; on notera S la fonction somme définie sur $]-R, R[$ et on admet que $(1-x)S'(x) - xS(x) = 1$.
Montrer que $\forall x \in]-R, R[$, $S(x) = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{1-x}$. Déterminer d_n.

Planche 176

I) Exercice N°47 de la banque CCP (série entière).
II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et $(I_n, A, \ldots, A^{n-1})$ est libre.
Montrer que tr $A = 0$.

Planche 177
I) Exercice N°57 de la banque CCP (fonction de deux variables)
II) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? Donner le polynôme caractéristique de $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $B^2 = A$; conclure à une absurdité.
Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Planche 178
I) Exercice N°60 de la banque CCP (endomorphisme).
II) On pose $f(t) = (0,0)$ si $t \in]-1,0]$ et $f(t) = \left(t^2 \sin\frac{1}{t}, t^2\cos\frac{1}{t}\right)$ si $t \in]0,1[$.
Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$. Calculer $\| f'(t) \|_2^2$ pour tout $t \in]-1,1[$
.
$f'(]-1,1[)$ est-il connexe par arcs ? $f(]-1,1[)$ est-il connexe par arcs ?

Planche 179
I) Exercice N°65 de la banque d'exercices CCP (polynôme d'endomorphisme).
II) On pose $G(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,dt$.
Justifier que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.
Montrer que G est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $G'(x)$.
Montrer que G est constante sur $\mathbb{R}$ et calculer sa valeur.
En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Planche 180
I) Exercice n°71 de la banque CCP (projecteur)
II) Montrer que $S_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x - 1} e^{-nx}dx$ existe pour $p \in \mathbb{N}$ puis que $T(a,b) = \int_0^{+\infty} x^a e^{-bx}dx$ existe. La calculer sachant que $T(n-1,1) = (n-1)!$.
Montrer que $S_0 = (p+1)!\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{p+2}} + S_n$ et en déduire que (S_n) converge.
Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x-1}\,dx = (p+1)!\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{p+2}}$.

Planche 181
I) Exercice N°75 de la banque CCP (trigonalisation, système différentiel).
II) Déterminer les points critiques de $f(x,y) = x\left[(\ln x)^2 + y^2\right]$ définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Admet-elle un extrémum global ? Si (a,b) est un point critique, quelle est l'équation du plan tangent à la surface Σ définie par f en $(a,b,f(a,b))$? Quel est le plan tangent en $(1,0)$? Donner la différentielle de f en $(1,1)$.

Planche 182
I) Exercice N°77 de la banque CCP (espace euclidien, orthogonalité).
II) On note l^∞ l'ensemble des suites réelles bornées et E le sous-ensemble de ces suites telles que $u_0 = 0$.
Montrer que $N_\infty(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} | u_n |$ est une norme sur l^∞.
Montrer que $N(u) = \sup_{n\in\mathbb{N}} | u_{n+1} - u_n |$ en est une sur E ; en est-ce une sur l^∞ ?
Comparer N_∞ et N dans E.
L'ensemble F des suites nulles à partir d'un certain rang est-il un fermé ?

Planche 183
I) Exercice N°79 de la banque CCP (produit scalaire).
II) Ensemble de définition de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arcsin} x$
Donner le développement en série entière de f.

Planche 184 I abordable dès la 1ère année
I) Montrer que si p et q sont deux projecteurs, $p+q$ en est un si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
Montrer que, dans ce cas, $\operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ et $\operatorname{Ker} p + q = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.
II) Exercice n°98 de la banque CCP (variable aléatoire).

Planche 185
I) Exercice N°104 de la banque CCP (variable aléatoire).
II) Soit $g_n(t) = e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$ définie sur $[0,1]$.
Montrer que $\forall t \in [0,1]$, $|g_n'(t)| \leqslant \frac{e^t}{n}$ puis que $\left|e^{-t} - \left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right| \leqslant \frac{t}{n}$.
Étudier les convergences simple et uniforme de la suite de fonctions de terme général $\int_0^x g_n(t)dt$ sur $[0,1]$.

Planche 186
I) Exercice N°107 de la banque CCP (probabilités, tirage).
II) f, endomorphisme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3 a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ dans la base $B = (e_1, e_2, e_3)$.
On note $E(x)$ l'espace engendré par les $f^k(x)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
Donner $E(e_1)$.
Calculer le polynôme caractéristique de f et vérifier que 2 est valeur propre.
Chercher les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.
f est-il diagonalisable ?
Donner tous les x tels que $E(x) \neq E$.

Concours Communs Polytechniques-option-PC

Planche 187
I) On note u l'endomorphisme de matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{C}^3$.
Donner le rang de $A - I_3$ et en déduire que A n'est pas diagonalisable.
Donner $\operatorname{Ker}(u-2\operatorname{Id})$, $\operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id})^2$ et montrer que $\mathbb{C}^3 = \operatorname{Ker}(u-2\operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id})^2$.
On note v un endomorphisme de matrice X vérifiant $X^n = A$.
Montrer que u et v commutent et en déduire que $\operatorname{Ker}(u-2\operatorname{Id})$ et $\operatorname{Ker}(u-\operatorname{Id})^2$ sont stables par v.
Montrer que X est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$ et $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; montrer que $JY = YJ$ et en déduire que $Y \in \operatorname{Vect}(I_2, J)$.
Résoudre $X^n = A$.
II) Montrer que $f(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{iyt}dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Planche 188 II abordable dès la 1ère année
I) On pose $U_0 = 1$, $U_{n+1} = (n+1)U_n + (-1)^{n+1}$, $V_n = \frac{U_n}{n!}$.
Calculer V_0, V_1, V_2, V_3 puis exprimer V_{n+1} en fonction de V_n et n.
Montrer que la suite (V_n) converge et déterminer sa limite.
On note $S(x)$ la somme de la série $\sum V_n x^n$, calculer son rayon de convergence.
Déterminer une équation différentielle dont S est solution.
Montrer que $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$ est développable en série entière sur un intervalle que l'on précisera et exprimer son développement en série entière en fonction de V_n.
Sur quel intervalle f est-elle égale à la somme de la série trouvée ?
II) Soient E espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg}(f^2) = \operatorname{rg}(f)$.
Montrer que $\operatorname{Im}(f^2) = \operatorname{Im}(f)$, $Ker(f^2) = \operatorname{Ker}(f)$ puis que $E = \operatorname{Im}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f)$.

Planche 189
I) Montrer que $\ln(t + \sqrt{1+t^2})$ est une primitive de $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ et en déduire $\tilde{f}_0(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$. On note $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$.
Montrer que $I_n = \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \int_0^1 \frac{t^{n+2}}{(n+1)(1+t^2)^{3/2}}$.
En déduire que, quand n tend vers $+\infty$, $I_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
Pour f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on pose $\phi(f)(x) = \tilde{f}(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$.
Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ dont on déterminera le noyau.
Montrer que $\operatorname{Im}\phi = \{g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ g(0) = 0\}$.
Déterminer, en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonctions f telles que $\phi(f) = \lambda f$ et en déduire les valeurs propres de ϕ.
Montrer que, si f est développable en série entière, $\phi(f)$ l'est aussi.
II) On donne deux variables aléatoires X et Y, définies sur Ω et telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X = i, Y = j) = \frac{a}{i!2^{j+1}}$, $a \in \mathbb{R}$.
Déterminer a puis les lois marginales de X et Y.

Planche 190 I abordable dès la 1ère année
I) Montrer que $(A|B) = \operatorname{tr}({}^tAB)$ munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'un produit scalaire.
Montrer que toute matrice symétrique est orthogonale à toute matrice antisymétrique puis que $A_n(\mathbb{R})$ et $S_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires et orthogonaux.
En déduire que ${}^tAA = A^2 \Leftrightarrow A \in S_n(\mathbb{R})$.
Montrer que, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, pour $n \geqslant 3$, il existe A non symétrique et telle que ${}^tAA = A^2$ (on les cherchera sous la forme $V{}^tU$ avec U et V dans $\mathbb{C}^n$).
On choisit $n = 2$; montrer que toutes les solutions à coefficients complexes de ${}^tAA = A^2$ sont symétriques.
II) $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^n}\,dx$; quelle est la nature de I_1 ? Celle de I_n ? Calculer I_n.

Planche 191
I) Montrer que ϕ, qui à P associe $Q(X) = (X+2)P(X) - XP(X+1)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Pour $P \in \operatorname{Ker}\phi$, calculer $P(0)$ et $P(-1)$.
Montrer que $\exists R \in \mathbb{R}[X]$, $P(X) = X(X+1)R(X)$ et $R(X) = R(X+1)$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $R(k) - R(0)$ et en déduire que R est une constante.
Trouver $\operatorname{Ker}\phi$ et $\operatorname{Im}\phi$ (on pourra utiliser la matrice de ϕ dans la base canonique).
Déterminer le spectre de ϕ ; est-il diagonalisable ?
II) Calculer la limite de la suite de terme général $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx$.
Calculer $I_n + I_{n+1}$ et en déduire la valeur de $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Planche 192 I abordable dès la 1ère année
I) Résoudre $\sin\big((2n+1)\theta\big) = 0$, $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$; montrer que :
$(\cos\theta + i\sin\theta)^{2n+1} = \cos\big((2n+1)\theta\big) + i\sin\big((2n+1)\theta\big) =$
$\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(-1)^k\cos^{2n+1-2k}\theta\sin^{2k}\theta + i\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\cos^{2n-2k}\theta\sin^{2k+1}\theta$
(après avoir développé, on pourra séparer les termes pairs et les termes impairs).
Montrer que $\exists!\, P_n \in \mathbb{R}_n[X]$, $P_n\left(\frac{1}{\tan^2\theta}\right) = \frac{\sin\big((2n+1)\theta\big)}{\sin^{2n+1}\theta}$ et expliciter P_n.
Trouver les racines de P_n, leur produit, leur somme.
II) Pour $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose $f(x,y) = g\left(\frac{x}{y}\right)$.
Montrer que si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y}{x^2}$, g vérifie une équation différentielle que l'on explicitera ; en déduire f et g.

Planche 193

I) Montrer que $f(x,y)=(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.
Déterminer les points critiques de f et donner leur valeur.

On pose $P(t)=\left(t\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+\left(t\sqrt{y}+\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2$; montrer que $\deg P=2$ et calculer Δ. En déduire que f admet un minimum global.

On pose $g(x_1,\dots,x_n)=\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right)$; en s'inspirant de la question précédente, montrer que $g(x_1,\dots,x_n)\geqslant n^2$ et trouver au moins un n-uplet vérifiant l'égalité.

Montrer que $g(x_1,\dots,x_n)=n+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}\right)$ et en déduire une nouvelle méthode pour montrer le résultat précédent.

II) On pose $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$; montrer que $I_{n+1}=\frac{2(n+1)}{2n+5}I_n$ et en déduire que $I_n=(2^{n+1}n!)^2\,\frac{n+1}{(2n+3)!}$.

Planche 194 I abordable dès la $1^{\text{ère}}$ année

I) On donne $D_n=\begin{vmatrix}3&1&0&\dots&0\\2&3&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&3&1\\0&\dots&0&2&3\end{vmatrix}$, de taille n.

Montrer que $\forall n\geqslant 2$, $D_{n+2}=3D_{n+1}-2D_n$; calculer D_n en fonction de n.
II) Donner les variations de $\phi(x)=-x\ln x$ sur $]0,1]$ et montrer que ϕ est prolongeable par continuité en 0.
Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, on pose $p_n=P(X=n)\neq 0$.

Lorsque $\sum\phi(p_n)$ converge, on dit que X admet une entropie $H(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}\phi(p_n)$.

Montrer que $\lim_{n\to+\infty}p_n=0$ et en déduire $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\geqslant n_0$, $0\leqslant-\sqrt{p_n}\ln p_n\leqslant 1$.
Montrer que si X suit une loi géométrique, elle admet une entropie et la calculer.
Dans le cas général, on suppose que X admet une espérance ; montrer, à l'aide de l'inégalité établie, que $\exists n_0\in\mathbb{N}^*$, $\forall n\geqslant n_0$, $\phi(p_n)\leqslant\max\left\{\frac{1}{n^{3/2}},3\sqrt{n}\ln p_n\right\}$.

Montrer que X admet une entropie.

Planche 195 II abordable dès la $1^{\text{ère}}$ année

I) On donne $u_0\in\,]-1,0[$ et $u_{n+1}=u_n+u_n^2$.
Étudier les variations de $f(x)=x^2+x$ et montrer que $\forall x\in\,]-1,0[$, $f(x)\in\,]-1,0[$.
Montrer que $(u_n)\subset\,]-1,0[$, en déduire que (u_n) converge et donner sa limite.
Conclure à la convergence de $\sum u_n^2$ et donner sa somme en fonction de u_0.
Étudier $\sum(-1)^n u_n$.

Montrer que la suite de terme général $a_n=\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}$ converge et donner sa limite l.

On admet que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k=l$; en déduire un équivalent de u_n et la nature de $\sum u_n$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k=l$.

II) Donner une base orthonormale de $F=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ z=0,\ x+y+t=0\}$.
Expliquer comment obtenir la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur F.

Planche 196

I) Montrer que $\forall(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$, $ac+bd\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$ (on pourra utiliser Cauchy-Schwarz).

Montrer que $x(t)=\int_0^t\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u+u^2}}$ et $y(t)=\int_0^t\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^3}}$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$, calculer $x'(t)$ et $y'(t)$, en déduire que tous les ponts de l'arc γ ainsi défini sont réguliers. Donner l'équation cartésienne de la tangente D au point $O(0,0)$.
Montrer que x et y admettent en $+\infty$ des limites finies respectives a et b que l'on ne calculera pas.
On donne $a=2,6$ et $b=2,8$ à 10^{-1} près et on note $\gamma'=\gamma\cup A(a,b)$.

Calculer $\lim_{t\to+\infty}\frac{y'(t)}{x'(t)}$, notée l, puis donner l'équation de la droite D' passant par A et de coefficient directeur l.
Montrer que $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $0\leqslant y(t)-x(t)\leqslant b-a$; que peut-on en déduire ?
II) Donner le rang et une base de l'image de la matrice qui a des 1 sur les première et dernière lignes, les première et dernière colonnes, et des 0 partout ailleurs. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

Planche 197 I abordable dès la $1^{\text{ère}}$ année

I) On note $E=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$; montrer que ϕ qui, à $f\in E$, associe g donnée par $g(x)=f'(x)-xf(x)$, est un endomorphisme.
Résoudre $y'-xy=0$ et en déduire $\operatorname{Ker}\phi$; ϕ est-elle injective ? Surjective ?
Soit $g(x)=(1+x^2)\mathrm{e}^{x^2}$; écrire les solutions de $y'-xy=g$ à l'aide de $\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2/2}\mathrm{d}t$.

Déterminer $h(x)$ telle que $f(x)=h(x)\mathrm{e}^{x^2}$ soit solution de $y'-xy=g$ avec $f(0)=0$ puis en déduire la valeur de $\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2/2}\mathrm{d}t$.

Montrer que la restriction ψ de ϕ au sous-espace P des fonctions polynomiales est un endomorphisme ; est-il injectif ? Surjectif ?
II) X et Y, variables aléatoires indépendantes, suivent une loi géométrique de paramètre $p\in\,]0,1[$. Donner les lois de $U=\max(X,Y)$ et $V=\min(X,Y)$.
Quelle est la loi conjointe de (U,V) ?

Planche 198

I) Soit (a_n) une suite réelle positive ; on pose $u_n=\frac{a_n}{(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)}$.
Calculer u_1+u_2 puis généraliser.
Vérifier que $\sum u_n$ converge puis calculer sa somme pour $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$.

II) On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

Vérifier que $<f,g>=\int_0^1 f(t)g(t)t^2\mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur E.

Vérifier l'existence et calculer $\int_0^1 x^n\ln x\,\mathrm{d}x$ puis donner le projeté orthogonal de $x\ln x$ sur le sous-espace des fonctions affines de E.

Calculer $\inf_{a,b\in\mathbb{R}^2}\int_0^1(at+b-t\ln t)^2t^2\mathrm{d}t$.

Planche 199 I abordable dès la $1^{\text{ère}}$ année

I) Montrer que $f(x,y)=\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$ pour $(x,y)\neq(0,0)$ et $f(0,0)=0$ est continue, puis qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Étudier l'existence de $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

II) Déterminer le rang de $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{1,i}=a_{i,1}=i$, $\forall i\in[\![1,n]\!]$ et tous les autres sont nuls. En déduire $\operatorname{Ker}A$. Est-elle diagonalisable ?
Que peut-on dire de la multiplicité de la valeur propre 0 ?
Montrer que A a trois valeurs propres, 0, λ et $1-\lambda$.
Trouver un polynôme annulateur de A de degré 3.

Planche 200

I) Montrer que $x^n+x\sqrt{n}-1=0$ admet, pour $n\in\mathbb{N}^*$, une unique solution $u_n\in[0,1]$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty}u_n$ et la nature de $\sum u_n$.
Nature de $\sum(-1)^n u_n$; on pourra prouver, en posant $f_n(x)=x^n+x\sqrt{n}-1$, que $f_{n+1}(u_n)=(u_n-1)-u_n\sqrt{n}\left(u_n-\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)$.

II) Soient $(A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ telles que $AB=BA$ et $M=\begin{pmatrix}A&B\\0&A\end{pmatrix}$.
Montrer que, si U et V sont semblables, $\forall P\in\mathbb{C}[X]$, $P(U)$ et $P(V)$ aussi.
Exprimer $P(M)$ en fonction de $P(A)$, $P'(A)$ et B.
Montrer que si A est diagonalisable et $B=0$, alors M est diagonalisable.
Étudier la réciproque et conclure.

Planche 201

I) Définir le rayon de convergence puis déterminer le rayon de convergence R de $S(x)=\sum u_nx^n$ où $u_n=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t$.
Montrer qu'il existe trois réels a, b et c, tels que $\forall x\in\,]-R,R[$, $\forall t\in[0,1]$, $\frac{1}{(1+t^2)(1-tx)}=\frac{at+b}{1+t^2}+\frac{c}{1-tx}$.
Calculer $S(x)$ pour $x\in\,]-R,R[$. Montrer que $S(-1)$ existe et la calculer.
II) f et g sont deux endomorphismes d'un espace E de dimension finie, vérifiant $f^2=g^2=\mathrm{Id}$ et $f\circ g+g\circ f=0$.
Montrer que f et g sont des automorphismes, que $Sp(f)=Sp(g)=\{-1,1\}$ et que f est diagonalisable.
Montrer que g induit un isomorphisme de $\operatorname{Ker}(f-\mathrm{Id})$ dans $\operatorname{Ker}(f+\mathrm{Id})$ et en déduire que E est de dimension paire notée $2n$.
Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de f et g sont $\begin{pmatrix}I_n&0\\0&-I_n\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&I_n\\I_n&0\end{pmatrix}$.

Planche 202 Abordable dès la $1^{\text{ère}}$ année

I) Donner les solutions polynomiales de $(x^2-1)y''+2xy'-2y=0$.
On pose $y(x)=xz(x)$; écrire l'équation différentielle vérifiée par z.
Déterminer trois réels a, b et c, tels que $\frac{2-4x^2}{x(x^2-1)}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+1}$, en déduire z puis résoudre l'équation initiale sur $]-1,1[$.

II) Montrer que $<P,Q>=\int_0^1 P(t)Q(t)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Déterminer une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1(t^2-at-b)^2\mathrm{d}t$.

Planche 203

I) Un endomorphisme f d'un espace E de dimension n admet n valeurs propres distinctes $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.
Montrer que l'application qui à $P\in\mathbb{R}_{n-1}[X]$ associe $\big(P(\lambda_1),\dots,P(\lambda_n)\big)\in\mathbb{R}^n$ est un isomorphisme.
Montrer que si $g\circ f=f\circ g$, tout vecteur propre de f l'est de g et en déduire que f et g admettent une base commune de vecteurs propres.
II) X et Y suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ ; montrer que $Z=X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.
Calculer $P(X=k|Z=n)$ et reconnaître cette loi de probabilité.

Planche 204

I) Montrer que, si u est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel possédant un polynôme annulateur dont 0 est racine simple, $\operatorname{Ker}u=\operatorname{Ker}u^2$.
Montrer que si u est nilpotent, alors $u=0$.
II) Soient $a_0=a_1=1$ et $a_{n+2}=a_{n+1}+(n+1)a_n$. Montrer que $\forall n\geqslant 0$, $\frac{a_n}{n!}\leqslant 1$.

Déterminer une équation différentielle vérifiée par $f(x)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{a_n}{n!}x^n$.

Résoudre cette équation et expliciter a_{2p} et a_{2p+1}.

Planche 205

I) Convergence sur $\mathbb{R}_+$ de $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ avec $u_n = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n}$.
La fonction somme est-elle continue sur son ensemble de définition ?
Montrer qu'elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ puis la déterminer.

II) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on pose $B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Diagonaliser $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Si A est diagonalisable, prouver que B l'est aussi et déterminer ses valeurs propres en fonction de celles de A.

Planche 206

I) Convergence et calcul éventuel de $I_{k,n} = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-nt} dt$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Déterminer le rayon de convergence R de $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{n!}{n^{n+1}} x^n$.
Justifier que $\forall x \in]-R, R[, \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^{n+1}} x^n = \int_0^{+\infty} \frac{tx}{e^t - tx} dt$.

II) $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^3 - 4M^2 + 4M = 0$ et $\operatorname{tr} M = 0$.
Montrer que les valeurs propres de M sont racines de $X^3 - 4X^2 + 4X$ et en déduire l'ensemble des matrices qui vérifient ces hypothèses.

Planche 207

I) On pose $f_n(x) = \dfrac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geqslant 0$ et $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.
Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f à déterminer.
Montrer que (f_n') converge simplement sur $\mathbb{R}$ et ne converge pas uniformément sur $[-1,1]$.

II) Rappeler une CNS pour qu'une matrice soit diagonalisable.
Montrer que si $A^2 - 5A + 6I_n = 0$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont racines de $x^2 - 5x + 6$.
Soit D la matrice diagonalisée de A ; montrer que f, l'application qui, à $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,associe $MD + DM$, est un endomorphisme.
Montrer que f est diagonalisable (on pourra décomposer les matrices en blocs).
Montrer que g défini par $g(M) = MA + AM$ est diagonalisable.

Planche 208 II abordable dès la $1^{\text{ère}}$ année

I) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $u_n(x) = \dfrac{\ln x}{x^n \ln n}$ et on note $S(x) = \sum_{k\geqslant 2} u_k(x)$.
Donner le domaine de convergence simple D de S.
Montrer que S ne converge pas normalement sur D.
Montrer que, pour $x \in D$, $\left|\displaystyle\sum_{k\geqslant n+1} u_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{\ln(n+1)}$.
Montrer que S est continue sur D. Est-elle intégrable sur D ?

II) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique. Montrer que $\operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Ker}(f - 2\operatorname{Id})$ sont en somme directe.
Trouver un vecteur de $\operatorname{Ker} f^2$ qui n'est pas dans $\operatorname{Ker} f$.
Trouver une base B' dans laquelle f a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$
Montrer que si $g^2 = f$, $\operatorname{Ker} f^2$ est stable par g ; que peut-on en déduire ?

Planche 209

I) X et Y, variables aléatoires discrètes et indépendantes, suivent la même loi ; $Z = X + Y + 1$ suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer en fonction de p.
Calculer la fonction $G_X(t) = E(t^X)$, génératrice de X et en déduire la loi de X.

II) Montrer que $< f, g > = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ munit $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$ d'un produit scalaire.
Soient $F = \{f \in E, \forall x \in [0,1], f(x) = 0\}$ et $G = \{f \in E, \forall x \in [-1,0], f(x) = 0\}$; montrer que ce sont deux sous-espaces orthogonaux de E ; sont-ils supplémentaires ?
Justifier que $G \subset F^\perp$. On veut montrer que $G = F^\perp$.
Pour $g \in F^\perp$, on pose $f_n(x) = 0$ si $x \in [0,1]$, $f_n(x) = g(0)$ si $x \in \left[-1, -\frac{1}{n}\right]$ et $f_n(x)$ est affine sur $\left[-\frac{1}{n}, 0\right]$; calculer $< f_n, g >$ et montrer que $g(0)\displaystyle\int_{-1}^{0} g(t)dt = 0$.
On choisit f nulle sur $[0,1]$ et $f(x) = g(x) - g(0)$ sur $[-1,0]$; montrer que $g \in G$ et conclure.

Planche 210

I) Trouver les x réels tels que la suite de fonctions $f_n(x) = xe^{-\sqrt{n|x|}}$ converge.
Calculer $\sup_{n\in\mathbb{R}} |f_n(x)|$; qu'en déduit-on ?
Déterminer le domaine de convergence D de $\sum f_n$; la convergence est-elle absolue sur D ? Normale ? Que dire de la convergence de la série sur $\mathbb{R}\backslash]-a, a[$, $a > 0$?

II) Définir une norme ; $N_0(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,dt$, $N_1(f) = \left|\int_0^1 f(t)dt\right| + \int_0^1 |f'(t)|\,dt$ et $N_2(f) = \left|\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right| + \left|\int_0^1 f'(t)dt\right| + \left|\int_0^1 f''(t)dt\right|$ définissent-elles des normes sur $E = \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$?
Montrer que $\forall f \in E, \exists c \in [0,1], f(c) = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.
Montrer que $\forall f \in E$, $N_0(f) \leqslant N_1(f)$; peut-il y avoir égalité ?
Montrer qu'il n'existe aucun réel a tel que $N_1(f) \leqslant aN_0(f)$.

Planche 211 ICNA

I) Soit $P(X) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{k_i} \in \mathbb{C}[X]$; exprimer $\dfrac{P'}{P}$ comme combinaison linéaire des $\dfrac{1}{X - a_i}$ et en déduire la valeur de $\dfrac{nX^{n-1}}{X^n - 1}$.
Soit f continue de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{C}$; montrer que le théorème des sommes de Riemann peut s'appliquer à $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt$ puis éduire des questions précédentes la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{x - e^{it}}$ où x est un complexe de module différent de 1.
Retrouver la valeur de I en utilisant une série de fonctions.

II) On doit transmettre une information I à N personnes numérotées de 1 à N ; chacune d'elles peut donner l'information reçue avec une probabilité p ou en donner le contraire avec une probabilité $1-p$; on note p_n la probabilité que la personne n donne l'information I ; calculer p_2 et p_3.
Trouver une relation entre p_{n+1} et p_n puis exprimer p_n en fonction de n.

Planche 212 Navale

I) Soient p et q deux projecteurs orthogonaux.
Montrer que le polynôme caractéristique de $u = p + q$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.
Montrer que $Sp(u) \subset [0,2]$. Déterminer $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker}(u - 2\operatorname{Id})$.

II) Continuité sur $\mathbb{R}_+\backslash\{1\}$ de $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.

Planche 213 Navale

I) Soient f et g continues sur $[a,b]$.
On suppose $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b (f(t) + xg(t))dt \geqslant \int_a^b f(t)dt$; déterminer $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$.
On suppose f strictement positive et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^b |f(t) + xg(t)|\,dt \geqslant \int_a^b f(t)dt$; déterminer $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$. Que peut-on dire si f est seulement positive ?

II) Soient A et B matrices complexes de taille n.
On suppose que $AM = MB$ si et seulement si $M = 0$; montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire sous la forme $AN - NB$.
On suppose que A et B n'ont aucune valeur propre commune ; montrer que $AM = MB$ si et seulement si $M = 0$. Est-ce toujours le cas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Planche 214 Navale

I) Montrer que $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln x}}{(x-1)\sqrt{x}}$ est intégrable sur $]1, +\infty[$.
Montrer que $\displaystyle\int_2^3 f(x)dx \leqslant \frac{\ln 3}{2}$.

II) On munit E euclidien d'une base quelconque $(e_1, \ldots, e_n)$.
Montrer que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x|e_k)e_k$ est un endomorphisme symétrique dont les valeurs propres sont strictement positive.
Montrer qu'il existe un endomorphisme symétrique g tel que $g^2 = f^{-1}$.
Montrer que $(g(e_1), \ldots, g(e_n))$ est une base orthonormale de E.

Planche 215 Navale

I) Si u est un endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien, montrer que $u \circ u = \operatorname{Id} \Leftrightarrow u$ est diagonalisable $\Leftrightarrow$ le polynôme caractéristique de u est scindé.

II) Si (a_n) est une suite à temes positifs telle que $\sum a_n$ converge, a-t-on $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$? Si, de plus, (a_n) est décroissante, a-t-on $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$?

Planche 216 IMT, abordable dès la $1^{\text{ère}}$ année

I) Que dire de la matrice, dans une base orthonormée, d'un endomorphisme f de E euclidien, vérifiant $\forall (x,y) \in E^2$, $< f(x), y > = - < x, f(y) >$? Le démontrer.
Montrer que, si $\dim E = 2$, l'ensemble $A(E)$ de ces endomorphismes est inclus dans $C(E)$, celui des endomorphismes g qui commutent avec tout élément f de $A(E)$ (on pourra commencer par déterminer $C(E)$).

II) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0, f de classe $\mathcal{C}^n$ de I dans $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et g définie sur I par $g(0) = f'(0)$ et $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$ pour $x \neq 0$.
Montrer que $\forall x \in I$, $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)dt$ puis que g est de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur I.

Planche 217 IMT, I abordable dès la $1^{\text{ère}}$ année

I) Soient deux entiers naturels non nuls m et n tels que n divise m.
Montrer que $X^n - 1$ divise $X^m - 1$.
Dans le cas général, à quelle(s) condition(s) $X^n - 1$ divise-t-il $X^m - 1$?

II) Convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln(x + e^{\alpha x})dx$ suivant $\alpha \in \mathbb{R}$.

Planche 218 IMT

I) Combien y a-t-il de 0 à la fin de 2019! ?

II) Ensemble de définition I de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)dt$.
Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur I et donner une équation différentielle qu'elle vérifie.
Montrer que f est développable en série entière en 0 et écrire ce développement.

Planche 219 IMT

I) Pour a et b donnés dans $\mathbb{R}^n$, f défini par $f(x) = < a, x > b$ est-il diagonalisable ?

II) Domaine de définition, continuité et dérivabilite de $f(x) = \sum_{n\geqslant 1} \operatorname{Arc\,tan}(nx)n^2$.

Planche 220 IMT, I abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Calculer $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \dots & 0 \\ -x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \dots & 0 & -x & 1+x^2 \end{vmatrix}$.

II) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 x^x \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

Planche 221 IMT

I) Résoudre $f(x) - \displaystyle\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t = 1$ avec f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

II) Nature de $\sum u_n$ avec $u_n = \cos\left(n^2\pi \ln \dfrac{n-1}{n}\right)$.

Planche 222 IMT, II abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Nature, selon $a \in \mathbb{R}$, de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a \ln(x + \mathrm{e}^{ax})\mathrm{d}x$.

II) Soient $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer $X \in \mathbb{R}^3$ pour lequel $\inf\limits_{X \in \mathbb{R}^3} \| AX - B \|$ est atteint.

Planche 223 IMT

I) Donner le rang, le noyau, l'image et les éléments propres de $N \in \mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ qui a des 1 sur la diagonale, la première et la dernière colonne, et des 0 partout ailleurs.
II) Étudier $\sum\big(\mathrm{Arc}\tan(n+\alpha) - \mathrm{Arc}\tan n\big)$ (on pourra utiliser l'inégalité des accroissements finis).

Planche 224 IMT

I) $M = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 6 \\ 3 & 5 & -6 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Écrire $\begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n - \frac{3}{4}v_n + \frac{3}{2}w_n \\ v_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{5}{4}v_n - \frac{3}{2}w_n \\ w_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{3}{4}v_n - w_n \end{cases}$ sous forme matricielle $X_{n+1} = AX_n$
et en déduire X_n en fonction de A^n et X_0.
Exprimer u_n, v_n, w_n en fonction de n et de u_0, v_0, w_0.
II) Donner un équivalent de $\ln(n!)$ (on rappelle que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Planche 225 IMT

I) Montrer que f défini par $f(P)(X) = 2XP'X) + (X^2-1)P''(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on donnera les valeurs propres.
Montrer que f est symétrique pour le produit scalaire $\displaystyle\int_{-1}^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
II) Si X_1, X_2 et X_3 sont des variables aléatoires indédendantes suivant une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$, que vaut $p(X_1 = X_2 = X_3)$?

Planche 226 IMT, I abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Montrer que, si $e_1, \dots, e_n$ sont des vecteurs unitaires de E euclidien, tels que $\forall x \in E$, $\| x \|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^n < x, e_k >^2$, ils constituent une base orthonormale.

II) Convergence et limite de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^n (2 - \sqrt[k]{3})$.

Planche 227 IMT, III abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n + \cos n}$.

II) Suivant la valeur de $a \in \mathbb{R}$ discuter de l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^a \ln(x + \mathrm{e}^{ax})\mathrm{d}x$.

III) Montrer que $\forall (A, X) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $det(A+X) = \det X \Leftrightarrow A = 0$.

Planche 228 IMT

I) Calculer $\displaystyle\int_0^1 x^{3n+1}\mathrm{d}x$.

Nature de $\sum \dfrac{(-1)^n}{3n+2}$ et calcul de la somme.
II) Montrer que f donné par $f(P)(X) = P(1)X - P(3)(25 - X^2)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ dont on donnera le noyau et l'image.
Déterminer les valeurs propres de f.

Planche 229 IMT, I abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Énoncer le théorème du rang.
Montrer que, en dimension finie, un endomorphisme est injectif si et seulement si il est surjectif.
$\phi(P) = P'$ est-il injectif sur $\mathbb{R}[X]$? Surjectif ?
II) Montrer que si $y(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} a_n x^n$ est solution de $4y'' + 2y' + y = 0$, alors $a_{n+1} = -\dfrac{a_n}{(2n+2)(2n+1)}$.
Trouver, sans utiliser le critère de d'Alembert, le rayon de convergence de $y(x)$; que peut-on conclure ?
Montrer que $a_n = \dfrac{(-1)^n a_0}{(2n)!}$ et donner les solutions développables en série entière de l'équation sur $\mathbb{R}_+$, à l'aide des développements en série entière connus.
Montrer que $\sin\sqrt{x}$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Planche 230 ICNA

I) Pour quels réels a et b, $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2})\mathrm{d}t$ converge-t-elle ?

Dans ce cas, calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2})\mathrm{d}t$.
II) Que dire de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $A^p = I_n$?

Planche 231 Navale

I) Déterminer les solutions développables en série entière de $xy'' + 4y' - 3x^3y = 0$.
$f(x) = \dfrac{x^2}{\mathrm{ch}\, x}$ est-elle solution sur $\mathbb{R}_+^*$? sur $\mathbb{R}_-^*$?
II) Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; si $(AB)^2 = 0$, a-t-on nécessairement $(BA)^2 = 0$ (on pourra considérer différentes valeurs de n) ?

Planche 232 Navale, I abordable dès la $1^{ère}$ année

I) $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x}$, définie sur $\mathbb{R}^*$, est-elle prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$?
Dérivable sur $\mathbb{R}$?
Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
f^{-1} est-elle continue ? Dérivable ?
II) Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et donner un vecteur propre associé à chaque valeur propre.
Que dire de $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X^2 + X = A$?
Donner ses éléments propres.
Préciser l'ensemble des matrices vérifiant cette égalité.

Planche 233 Navale

I) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $(f^2 + \mathrm{Id}) \circ f = f \circ (f^2 + \mathrm{Id}) = f^3 + f = 0$.
Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f$.
Montrer que si λ est valeur propre de f, $\lambda^3 + \lambda = 0$.
En déduire que f admet au moins une valeur propre réelle.
Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est le plus simple possible.
II) Nature que $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n n^b}$ en fonction de a et b réels.

Planche 234 IMT

I) Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs a et b.
Touver la loi suivie par leur somme, d'abord en utilisant la somme des probabilités, puis en utilisant les fonctions génératrices.
Application : calculer $\dfrac{Cov(U,V)}{\sigma(U)\sigma(V)}$ si $U = X + Y$ et $V = X - Y$.
II) Montrer que u, défini par $u(x) = k(a|x)a + x$ où $a \in E$ est unitaire et $k \in \mathbb{R}$, est un endomorphisme symétrique de E euclidien.
Montrer que u est un automorphisme orthogonal en écrivant sa matrice dans une base bien choisie et le caractériser.

Planche 235 IMT, I abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n(x) = \sin x \cos^n(x)$ et $f_n(x) = xg_n(x)$.
Étudier les variations de g_n sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Étudier la suite de terme général f_n puis $\sum f_n$.
II) n personnes lancent simultanément n pièces équilibrées.
Déterminer la probabilité qu'une personne au moins n'ait pas le même résultat que les autres.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires pour qu'au moins une personne n'ait pas le même résultat que les autres.
Déterminer l'espérance et la variance de X.

Planche 236 IMT, II abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(1 - t\,\mathrm{Arc}\tan\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$.

La calculer à l'aide du calcul de $\displaystyle\int_0^x t\,\mathrm{Arc}\tan\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$.
II) Soient un espace E de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E tels que $E = \mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g = \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Ker}\, g$; montrer que ces sommes sont directes.

Planche 237 IMT, I abordable dès la $1^{ère}$ année

I) Donner le rang de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficient $a_{i,j} = \sin(i+j)$.
II) Donner le domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{\mathrm{Arc}\tan(nx)}{n^2}$.
Étudier la continuité puis le caractère C^1 de f.

Planche 238 IMT

I) Existe-t-il une matrice B telle que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

II) Montrer que $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\frac{2t}{\pi} \leqslant \sin t$.
Déterminer la limite de la suite de fonctions f_n définies par $f(x) = \left(1 - \sin\frac{x}{n}\right)^n$ si $0 \leqslant x \leqslant n\frac{\pi}{2}$ et $f_n(x) = 0$ si $n\frac{\pi}{2} < x$, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(t)\mathrm{d}t$.

Planche 239 IMT, I abordable dès la $1^{ère}$ année

I) On tire simultanément deux cartes dans un jeu de 52 ; chaque carte tirée rapporte sa valeur, le valet valant 11, la dame 12, le roi 13.
On note respectivement X et Y les variables aléatoires représentant la carte de plus basse et plus haute valeur tirées.
Déterminer la loi conjointe de (X, Y), leur loi marginale et leur covariance.
II) Donner le développement en série entière de $\mathrm{sh}\, t$.
Trouver une solution développable en série entière de $tx'' + 2x' - x = 0$, puis une autre solution.

Concours Banque PT

Planche 240 Groupe Saclay

I) On pose $\forall i \neq n+1,\ t(e_i) = e_1$ et $t(e_{n+1}) = \sum_{k=1}^{2n+1} e_k$ où $B = (e_1, \dots, e_{2n+1})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{2n+1}$; donner la matrice T de t dans B.
On choisit $n = 1$; donner les valeurs propres puis les sous espaces propres de t. T est-elle diagonalisable ? t est-il bijectif ?
On revient au cas $n \in \mathbb{N}^*$; vérifier que l'on peut définir un endomorphisme $\tilde{t}$ de $\operatorname{Im} t$ par $\tilde{t}(x) = t(x)$.
Montrer que $\left(e_1, \sum_{k=1}^{2n+1} e_k\right)$ est une base de $\operatorname{Im} t$ et donner la matrice de $\tilde{t}$ dans cette base.
II) Cours : formule de Taylor-young à l'ordre n, développement limité à l'ordre n en 0 de $\sqrt{1+x}$; peut-on simplifier $\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$ sous forme de factorielles lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$?

Planche 241 Groupe Saclay

I) Déterminer l'ensemble des points du plan vérifiant $x^2+xy+y^2-3x-4y+2 = 0$.
Soient trois points A, B, C d'une droite (D) ; trouver l'ensemble des points M du plan pour lesquels il existe un cercle tangent à (AM), (CM) et à (D) en B.
II) Cours : formule de Taylor-young à l'ordre n, développement limité à l'ordre n en 0 de $\ln(1+x)$.

Planche 242 Groupe Saclay, I abordable dès la 1ère année

I) On note F un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, s_F la symétrie orthogonale par rapport à F et p_F le projecteur orthogonal sur F. Que dire de l'application $s_F \circ p_F - p_F \circ s_F$? s_F et p_F sont-ils des automorphismes orthogonaux ?
Donner leur trace et leur déterminant.
Pour $n = 4$, on définit F par $X \in F \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{i=1}^{4} (-1)^i x_i = 0$ où les x_i sont les coordonnées de X dans la base canonique.
Déterminer la matrice de p_F dans la base canonique, celle de s_F et celle de $s_F \circ p_F + p_F \circ s_F$. Quel est ce dernier endomorphisme ?
II) Cours : donner les développements en série entière de $\cos x$ et $\cos^2 x$; pourquoi le rayon de convergence est-il infini ?

Planche 243 Groupe Saclay

I) Cours : définition du produit mixte dans $\mathbb{R}^3$, propriétés générales dans un espace vectoriel, interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^3$.
II) Montrer que $f(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \sin t)dt$ est C^2 sur $\mathbb{R}$.
Montrer que f est solution de $xy'' + y' + xy = 0$ à l'aide d'une intégration par parties de f'.
Soit ϕ de classe C^2 sur $]0, \pi[$ et $g(x) = f(x)\phi(x)$.
Trouver une équation différentielle vérifiée par ϕ' et en déduire une expression de g en fonction d'une intégrale dépendant de f.
En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle.

Planche 244 Groupe Saclay

I) Donner le rang de $M = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ en fonction de $a \in \mathbb{R}$.
Donner son polynôme caractéristique et ses valeurs propres.
Pour quelles valeurs de a, M est-elle diagonalisable ?
On choisit $a = 1$; soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$; en posant $u = x + y + z$, déduire la forme générale des solutions du système différentiel $X' = MX$.
II) Cours : définir une série géométrique, calculer la série géométrique dérivée ; calculer $\sum_{n \geqslant 1} \frac{2n+3}{5n}$.

Planche 245 Groupe Saclay

I) On cherche à déterminer les fonctions de classe C^2 sur $U = \mathbb{R}_+^{*2}$, à valeur dans $\mathbb{R}$ et telles que $\forall (x, y) \in U,\ x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.
On pose $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ de sorte que $(u, v) \in U$ et $F(u, v) = f(x, y)$.
Exprimer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonction des dérivées partielles de F.
Montrer que l'équation devient $\frac{\partial F}{\partial v} - 2u \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} = 0$ puis la résoudre.
II) Cours : comment calculer la probabilité d'une intersection d'évènements ?

Planche 246 Groupe Saclay

I) Si A est symétrique, carrée de taille n, à coefficients réels non tous nuls, dire pourquoi il existe une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $A = PDP^T$.
Montrer que $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} D$ et que $\operatorname{tr} A^2 \geqslant 0$.
Montrer que $\forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m,\ \left(\sum_{k=1}^m x_k\right)^2 \leqslant m \sum_{k=1}^m x_k^2$ et en déduire que $\operatorname{rg} A \geqslant \frac{(\operatorname{tr} A)^2}{\operatorname{tr}(A^2)}$. Étudier le cas d'égalité.
II) Cours : expliquer la méthode des rectangles ; quelle est la somme obtenue ?
Calculer $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2+n^2}$.

Planche 247 Groupe Saclay

I) On donne $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$; monotonie et limite de (u_n).
Étudier $\sum \frac{1}{u_n}$; converge-t-elle ?
On admet que si $a_n \sim b_n$ et $\sum b_n$ diverge alors $\sum_{k=0}^n a_k \sim \sum_{k=0}^n b_k$.
Calculer $\lim_{n \to +\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$ et en déduire un équivalent de u_n.
Trouver un équivalent $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et en déduire un équivalent de $\sum \frac{1}{u_k^2}$.
II) Cours : définition et propriétés de l'orthogonal d'un sous-espace ; a-t-on toujours $E = F + F^\perp$? Cette somme est-elle directe ? Calculer $F \cap F^\perp$.

Planche 248 ENSAM

I) Avec Python : écrire une fonction alenvers qui prend un entier n en argument et qui renvoir cet entier écrit à l'envers (par exemple 12345 devient 54321).
Écrire une fonction estpalindrome qui renvoie un booléen si l'entier est un palindrome. Donner la liste des entiers $n \in [\![0, 3000]\!]$ dont le carré est un palindrome. Donner la liste des plaindromes de cette liste.
Donner alenvers en version récursive.
II) Montrer que ϕ, définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$ est linéaire.
Calculer $\phi(X^k)$ et en déduire que ϕ est un endomorphisme.
Donner la matrice de ϕ dans la base canonique.
ϕ est-elle inversible ? Diagonalisable ?
Comparer $\phi(P')$ et $\phi(P)'$.

Planche 249 ENSAM

I) Avec Python : chaque résultat doit être affiché et chaque fonction testée.
Pour $n = 12$ créer la liste Z composée de n complexes d'argument $\frac{2k\pi}{n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et de module aléatoire dans $[0, 1]$ (on pourra utiliser la fonction rand de la bibliothèque random).
Créer W la rotation de Z telle que le premier élément de W est le complexe de partie imaginaire la plus faible.
Modifier W de manière à fermer la figure polygonale. Tracer «l'étoile».
Créer la fonction EC d'argument P une liste de complexes, décrite par l'algorithme suivant :
$q \leftarrow$ complexe de P ayant la partie imaginaire la plus faible
$Q \leftarrow$ liste composée de q
$R \leftarrow$rotation de P telle que q est le dernier élément de R
Pour r dans R :
Si $r \neq q$ et pour tout p dans P imag(*)$\geqslant 0$:
$q \leftarrow r$ ajouter q à la fin de Q
retourner la liste Q
Afficher $EC(Z)$ et W.
II) Montrer que $\forall t \in [0, 1]$, $\operatorname{Arccos} t + \operatorname{Arcsin} t = \frac{\pi}{2}$.
On pose $f(x) = \int_0^{\cos^2(x)} \operatorname{Arccos}(\sqrt{t})dt + \int_0^{\sin^2(x)} \operatorname{Arcsin}(\sqrt{t})dt$; calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
Montrer que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ puis qu'elle est π-périodique.
Montrer que f est constante et la déterminer.

Planche 250 ENSAM, II abordable dès la 1ère année

I) Avec Python : Un tableau de taille n est rempli de nombres réels : $T = [t_0, \dots, t_{n-1}]$.
Une liste de taille $\leqslant n$ est dite croissante si les indices $i_0 < i_1 < \dots < i_p$ des nombres pris dans T restent dans un ordre croissant mais pas obligatoirement consécutif, et la liste $t_0 \leqslant t_1 \leqslant \dots \leqslant t_p$ est extraite de T.
Déterminer à la main la plus grande liste croissante de $L = [5, 4, 22, 3, 45, 88, 5]$; y a-t-il unicité ?
Pour pouvoir obtenir une telle liste, il est proposé d'établir une liste intermédiaire $A = [a_0, \dots, a_{n-1}]$ de taille n, remplie de la manière suivante : $\forall j < i,\ t_j > t_i,\ a_i = 1$; sinon $a_i = 1 + \max\{a_j,\ j < i,\ t_j \leqslant t_i\}$.
Écrire à la main la liste A obtenue en appliquant ce principe à L.
Écrire la fonction longueur(T) qui crée la liste A à partir d'une liste T.
Définir une relation entre la longueur de la liste croissante et A ; comment obtenir la plus grande liste croissante à partir de A ? En déduire la fonction L_croissant(T, A) qui renvoie la plus grande liste croissante de T à partir de A.
II) Montrer que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}$ pour $n \geqslant 3$.

Planche 251 ENSAM, II abordable dès la 1ère année

I) Avec Python : Deux poins A et B se déplacent sur $n+1$ cases numérotées de 0 à n ; on lance un dé à 6 faces non truqué, on avance le pion situé sur la case de plus petit numéro en lui ajoutant le chiffre donné par le dé. La partie s'arrête quand les pions se rejoignent sur une même case.
Créer une fonction lancer qui modélise le lancer du dé, à l'aide de la fonction random et du module rand cn, renvoyant le résultat du lancer de dé.
Créer une fonction avancée qui prend en argument la position $p = [a, b]$ des points A et B respectivement et qui renvoie leur position après un lancer.
Définir une fonction avancée qui simule une partie et qui renvoie la case d'arrivée (lorsque la partie s'arrête).
Estimer la probabilité que les pions se retrouvent sur la case k et la tracer sur un graphique.
Donner le plus petit entier k tel que la probabilité que les pions soient arrivés sur une case de numéro au plus égal à k soit de 99%.
Quel est la probabilité que les pions se rejoignent au bout de 10 lancers ?
II) Trouver l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont le noyau est égal à l'image.

Planche 252 ENSAM, I abordable dès la 1ère année

I) Continuité, dérivabilité, parité et périodicité de $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{\sin x}$.

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} f_n(x)\mathrm{d}x$; calculer I_1 et I_2.

Calculer $I_{n+2} - I_n$ et en déduire I_n.

II) Avec Python : écrire une fonction d'argument V qui restitue un booléen si V est de dimension 9 et est constitué de tous les entiers de 1 à 9.

Importer le fichier algo129-sudoku1.txt du dernier data qui contient 9 lignes de 9 entrées séparés par des espaces, tous pris dans $[\![1, 9]\!]$; mémoriser les chiffres dans une grille de sudoku.

Planche 253 ENSAM

I) Avec Python : on cherche des entiers naturels non nuls n tels que $n = 2^k3^l5^m$ qu'on appellera entiers de type H.

Écrire une fonction d'argument n renvoyant une booléen qui détermine si n est un entier de type H (méthode récursive ou itérative).

Afficher les 100 premiers entiers de type H.

Si n est un entier de type H, que peut on dire de $\dfrac{n}{3}$, $\dfrac{n}{5}$ et $\dfrac{n}{2}$?

En déduire une fonction qui prend en argument une liste d'entier de type H, triée par ordre croissant, et qui retourne l'entier de type H suivant.

II) Reconnaître la surface S d'équation $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Que dire des droites horizontales $D(\lambda)$ passant par $A(\lambda)$ de coordonnées $(0, 0, \lambda)$ et qui coupent une seule fois S ? En existe-t-il pour toutes les valeurs de λ ?

Donner une équation cartésienne de la réunion de ces droites si λ décrit $\mathbb{R}$.

Planche 254 ENSAM

I) Avec Python : on cherche un point c d'annulation d'une fonction f ; on pose $x_{k+1} = x_k + \mathrm{d}xf(x_k)$.

Quel est le signe de $\mathrm{d}x$?

Écrire une fonction C_1 prenant $(f, x_0, \mathrm{d}x, \varepsilon)$ en arguments et qui renvoie c à ε près ; la tester avec $|\,\mathrm{d}x\,| = 0, 1$, $x_0 = 0$, $f(x) = x^7 - \mathrm{e}^{-x}$, $\varepsilon = 10^{-7}$.

Afficher f sur $[0, 1]$.

On pose $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ (en supposant f de classe $\mathcal{C}^\infty$) ; écrire une nouvelle fonction C_2 qui prend $(f, f^{(p)}, x_0, \varepsilon)$ en argument et comparer la convergence.

II) Trouver le plan tangent à (S) d'équation $2x^2 - 3yz + 4z - 1 = 0$ en un point (a, b, c) régulier.

Parmi ces plans, trouver ceux qui contiennent la droite $D : \begin{cases} y = 2 \\ x = z \end{cases}$.

Planche 255 IMT, I abordable dès la 1ère année

I) Déterminer une base orthonormale de F engendré par les vecteurs u et v de coordonnées respectives $(1, 2, -1, 1)$ et $(0, 0, 1, 0)$.

Donner la distance à $F^\perp$ de A, de coordonnées $(1, 0, 0, 0)$.

II) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arc\,tan}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ est définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (on pourra se placer sur un segment).

Montrer que $\forall x \in]0, 1[$, $f'(x) = \dfrac{\ln x}{1 - x^2}$.

Planche 256 IMT, abordable dès la 1ère année

I) $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ est-elle orthogonale ?

Donner ses éléments caractéristiques.

II) Donner les points réguliers de $f(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$.

Donner les vecteurs $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$ de la base de Frénet et donner $\alpha = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T})$.

En déduire la courbure aux points réguliers.

Planche 257 IMT, II abordable dès la 1ère année

I) Domaine de définition I de $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{x}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

Expliciter f sur I.

II) Donner le lien entre la trace et le rang d'un projecteur d'un espace de dimension finie.

Si $\operatorname{rg} f = 1$ et $\operatorname{tr} f = 1$, f est-il un projecteur ?

Planche 258 IMT, I abordable dès la 1ère année

I) Pour f et g continues de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$, montrer que $< f, g >= \displaystyle\int_0^\pi f(t)g(t)\mathrm{d}t$ est un produit scalaire.

Donner la projection de $f(x) = x$ sur $\operatorname{Vect}(\cos, \sin)$.

Dire ce que représente $\min\limits_{a \in F} \| a - f \|$ où F est un sous-espace de l'espace des fonctions de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$.

Que vaut $\min \displaystyle\int_0^\pi (t - a\cos t - b\sin t)^2\mathrm{d}t$?

II) La matrice carrée J dont tous les coefficients valent 1, est-elle diagonalisable ?

0 est-il valeur propre de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ de rang 1 ? Si oui, donner la dimension du sous-espace associé et dire si f est diagonalisable.

Planche 259 IMT

I) Montrer que f défini par $f(P)(X) = (X^2 - 1)P'(X) - 2XP(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$; est-il diagonalisable ?

II) Montrer que $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $C(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$. Montrer que S est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Montrer que $C(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}xS(x)$ et déterminer S et C.

Concours TSI

Planche 260 CCS

On place n boules dans n tiroirs et on note Y_n le nombre de tiroirs non vides. Calculer l'espérance de Y_n et celle de la proportion de tiroirs non vides.

Planche 261 CCS, Avec Python

Soit f continue sur $J \subset \mathbb{R}$, F une primitive de f, u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans J.

Montrer que $H(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur I et donner sa dérivée.

Montrer que, pour $x > 0$, $\operatorname{Arc\,tan} x + \operatorname{Arc\,tan}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

Montrer que $G(x) = \displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{t\operatorname{Arc\,tan} t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ et calculer $G'(x)$.

Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\operatorname{Arc\,tan} t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^b \frac{t\operatorname{Arc\,tan} t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$.

Écrire une fonction G qui calcule $\displaystyle\int_{1/x}^{x} \frac{t\operatorname{Arc\,tan} t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ où x est un paramètre.

Tracer côte à côte le graphe de G avec la droite $y = \dfrac{\pi}{8}$ et le graphe de la fonction $y = \dfrac{\pi}{8}\,\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ avec la droite $y = \dfrac{\pi}{8}$.

Planche 262 CCS, avec Python

Montrer que $\phi(M) = \operatorname{tr}(M)I_n$ et $\psi(M) = M - \operatorname{tr}(M)I_n$ sont des endomorphismes de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\operatorname{Im}\phi = \operatorname{Vect} I_n$ et $\dim\operatorname{Ker}\phi = n^2 - 1$.

Montrer que ψ a pour matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; ψ est-il diagonalisable ?

Trouver une matrice P orthogonale telle que ${}^tPAP$ soit diagonale.

Déterminer $\operatorname{Ker}\psi$ et en déduire que ψ est bijective.

Montrer que $1 \in Sp(\psi)$ et donner la dimension du sous-espace propre associé.

Écrire une fonction Python qui renvoie la trace d'une matrice.

Écrire des fonctions Python qui permettent de calculer $\phi(M)$ et $\psi(M)$.

Tester ces 3 fonctions pour des matrices choisies aléatoirement et commenter.

Planche 263 CCS

Étudier la nature de $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{a^n n!}{n^n}$ en fonction de $a > 0$.

Planche 264 CCS, abodable dès la 1ère année

On se place dans $\mathbb{R}^3$; trouver la matrice, dans la base canonique, de la symétrie orthogonale par rapport à $D : 2x = 6y = 3z$.

Planche 265 CCS, avec Python

Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)\cos(nx)\mathrm{d}x$ par la méthode des trapèzes ; on prendra $n = 1000$ et on choisira $0,001$ comme borne inférieure.

Montrer l'existence de I_n et de $J_n = \displaystyle\int_0^\pi \cos(nx)\,\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$.

Exprimer I_n en fonction de J_n (on pourra procéder à une intégration par parties sur I_n). Calculer $J_{n+1} - J_n$ puis exprimer I_n. Calculer J_0.

Montrer que $\displaystyle\int_0^\pi \ln\big(\sin(nx)\big)\mathrm{d}x = \int_0^\pi \ln\big(\cos(nx)\big)\mathrm{d}x$.

Donner une valeur de I_n et J_n.

Planche 266 CCINP, I abodable dès la 1ère année

I) Montrer que E, ensemble des suites réelles de période $p \in \mathbb{N}^*$, c'est à dire telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$, est un espace vectoriel contenant la suite U^i définie par $u_n^i = 1$ si $n = i + kp$ et $u_n^i = 0$ sinon.

Montrer que $(U^i)_{i \in [\![0, p-1]\!]}$ est une famille libre.

Déterminer une base de E et donner sa dimension.

II) Série entière et rayon de convergence de $f(t) = \operatorname{Arc\,tan}\dfrac{1-t^2}{1-t^2}$.

Planche 267 CCINP, I abordable dès la 1ère année

I) Donner un développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\sin x$.

Montrer que $x\ln x - \sin x\ln(\sin x) \sim \dfrac{x^3}{6}\ln x$ au voisinage de 0.

II) Trouver les valeurs de m pour lesquelles $A_m = \begin{pmatrix} m+1 & m+1 & 1 \\ -m & -m & -1 \\ m & m-1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable puis exprimer A_m^n en fonction d'une matrice diagonale.

Planche 268 CCINP, I abordable dès la 1ère année

I) Calculer A^2 avec $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; que peut-on en déduire ?

Donner une base de $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} A$ puis montrer qu'ils sont supplémentaires.

Quelle est la matrice de l'endomorphisme dans cette nouvelle base ?

II) Nature de $S(k) = \displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \binom{n}{k}\left(\frac{k+1}{k+2}\right)^n$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Planche 269 CCINP, II abordable dès la 1ère année

I) Montrer que $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{-x}\sqrt{1-t}\mathrm{d}t$ est définie sur $]-\infty, 1[$.

Déterminer le sens de variation de f.

Montrer que $\forall x \in]-\infty, 1[$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1-x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{1-x}$ et en déduire les limites de f aux bornes de son intervalle de définition. Calculer $f(0)$.

Donner un équivalent de f quand x tend vers 1^-.

II) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; montrer que $f(M) = AM$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et calculer $\det f$ en fonction de $\det A$.

