 Corrigé de M. Quercia (michel.quercia@prepas.org)

Première partie

1) Si B commute avec A alors les sous-espaces propres de A sont stables par B. Ces sous-espaces sont respectivement $\mathrm{vect}(x_1), \dots, \mathrm{vect}(x_n)$ et leur stabilité par B est équivalente au fait que la matrice de B dans la base $(x_1, \dots, x_n)$ est diagonale.

2a) Soit λ une valeur propre de B : le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(B - \lambda \mathrm{id}_X)$ est non nul et stable par $A_1, \dots, A_p$ donc c'est X, ce qui implique $B = \lambda \mathrm{id}_X$.

Remarque : cette propriété est fausse dans le cas d'un espace vectoriel réel. Par exemple dans $\mathbf{R}^2$ les seuls sous-espaces stables par l'endomorphisme $A : (x, y) \longmapsto (-y, x)$ (quart de tour) sont $\{0\}$ et $\mathbf{R}^2$ pourtant A, qui commute avec lui-même, n'est pas un multiple de l'identité.

2b) Non. Soient x_1, x_2, x_3 trois vecteurs de $\mathbf{C}^2$ deux à deux linéairement indépendants et A_1, A_2 les endomorphismes de $\mathbf{C}^2$ définis par $A_1(x_1) = 0$, $A_2(x_2) = 0$, $A_1(x_3) = A_2(x_3) = x_3$. Si $B \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^2)$ commute avec A_1 et A_2 alors d'après **1)** les vecteurs x_1, x_2 et x_3 sont vecteurs propres de B et deux des trois valeurs propres au moins sont égales puisqu'on est en dimension 2. Ceci implique que B coïncide avec un multiple de l'identité sur l'une des trois bases extraite de (x_1, x_2, x_3) et donc que B est égal à ce multiple de l'identité. Pourtant il existe un sous-espace non trivial stable par A_1 et A_2 : $\mathrm{vect}(x_3)$.

Deuxième partie

3) On trouve $K_0F_0 - q^{-2}F_0K_0 = 0$ par calcul sur la base $(x_1, \dots, x_n)$.

4) Clairement, pour $1 \leqslant k \leqslant n$, le sous-espace $X_k = \mathrm{vect}(x_k, \dots, x_n)$ est stable par F_0, de même que $X_{n+1} = \{0\}$. Montrons que ce sont les seuls. Si Y est un sous-espace stable par F_0 et $p = \dim Y$ alors $F_{0|Y}$ est un endomorphisme nilpotent d'indice inférieur ou égal à p, donc $Y \subset \mathrm{Ker}(F_0^p) = X_{n-p+1}$. Par égalité des dimensions on conclut que $Y = X_{n-p+1}$. Les sous-espaces stables par F_0 et K_0 sont aussi les X_k, $1 \leqslant k \leqslant n+1$ car ces derniers sont manifestement stables par K_0.

5) On trouve $K_0E_0 - q^2E_0K_0 = 0$ par calcul sur la base $(x_1, \dots, x_n)$.

6) Vérification facile par calcul sur la base $(x_1, \dots, x_n)$.

7) Il faut chercher parmi les sous-espaces X_k trouvés en **4)** ceux qui sont stables par E_0. Seuls $X_1 = X$ et $X_{n+1} = \{0\}$ conviennent.

Troisième partie

8) Immédiat.

9) Sinon, les sous-espaces $Y_{q^{-2}\lambda}$, $Y_{q^{-4}\lambda}$, etc. seraient non nuls d'après la question précédente et le fait que K envoie un sous-espace sur un sous-espace de même dimension. Alors il existerait une infinité de complexes μ, de la forme $q^{-2k}\lambda$, valeurs propres de E ; c'est imposible.

10) On vient de voir que 0 est l'unique valeur propre éventuelle de E, donc le polynôme caractéristique de E ne peut être que $(-t)^n$, et, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $E^n = 0$.

11) Prendre un vecteur propre de $E_{|\,\mathrm{Ker}\,E}$. Il y en a car on est dans C et $\mathrm{Ker}\,E \neq \{0\}$ vu la question précédente ($n \neq 0$ car $E \neq 0$).

12a) $\operatorname{Ker} E$ est de dimension 1 car E est non nul et nilpotent. De plus, c'est un sous-espace stable par K d'après **i)**, donc $K_{|\operatorname{Ker} E}$ est une homothétie. On prend pour λ le rapport d'homothétie et pour x_1^0 un vecteur quelconque de $\operatorname{Ker} E$.

12b) $E^2 = 0$ donc $\operatorname{Im} E \subset \operatorname{Ker} E = \operatorname{vect}(x_1^0)$. Ainsi il existe $\mu \in \mathbf{C}$ tel que $Ex_2^0 = \mu x_1^0$ et $\mu \neq 0$ car $x_2^0 \notin \operatorname{vect}(x_1^0) = \operatorname{Ker} E$.

12c) (x_1, x_2^0) est une base de X donc il existe $\beta, \gamma \in \mathbf{C}$ tels que $Kx_2^0 = \beta x_1 + \gamma x_2^0$. On a alors $KEx_2^0 = Kx_1 = \lambda x_1$ et $q^2 EKx_2^0 = q^2 E(\beta x_1 + \gamma x_2^0) = q^2 \gamma x_1$ d'où $\gamma = q^{-2}\lambda$.

12d) $\alpha = \dfrac{\beta q^2}{\lambda(1-q^2)}$ convient (le dénominateur est non nul car $q^2 \neq 1$ et $\lambda \in \operatorname{spec}(K) \subset \mathbf{C}^*$ d'après **ii)**).

Quatrième partie

13) Vérification facile par récurrence sur m en écrivant $EF^{m+1} - F^{m+1}E = (EF^m - F^mE)F + F^m(EF - FE)$.

14) Remarque :On a $E \neq 0$ sans quoi $K - K^{-1} = (q - q^{-1})(EF - FE)$ serait nul ce qui contredirait **i)**. Les résultats de la partie **III** sont donc applicables, en particulier E est nilpotent et $\operatorname{Ker} E$ est un sous-espace non nul stable par K. Il en résulte qu'il existe v_1, vecteur de $\operatorname{Ker} E$ propre pour K. On a alors par récurrence immédiate $Kv_m = \lambda q^{2-2m} v_m$.

15) Conséquence de deux questions précédentes.

16a) Ce sont des vecteurs propres pour K associés à des valeurs propres distinctes.

16b) On est en dimension finie, donc il existe m_0 maximal tel que $(v_1, \ldots, v_{m_0})$ soit libre, et $m_0 \geqslant 1$ puisque $v_1 \neq 0$. le vecteur suivant, v_{m_0+1}, est combinaison linéaire de $v_1, \ldots, v_{m_0}$ par choix de m_0, et il est nul d'après **16a)**. Les vecteurs suivants le sont aussi puisque ce sont des itérés de F sur v_{m_0+1}.

16c) $\operatorname{vect}(v_1, \ldots, v_{m_0})$ est non nul, stable par K, E d'après **14)** et **15)**, et aussi stable par F par construction des v_k et par le fait que $Fv_{m_0} = 0$. D'après **v)**, cet espace est égal à X et en particulier sa dimension, m_0, est égale à n.

16d) Car $Ev_{n+1} = Ev_{m_0+1} = 0 = (q - q^{-1})^{-2}(q^n - q^{-n})(q^{1-n}\lambda - q^{n-1}\lambda^{-1})v_n$, et le seul facteur pouvant être nul est $q^{1-n}\lambda - q^{n-1}\lambda^{-1}$.

17) Pour $\lambda = q^{n-1}$ on retrouve les propriétés définissant K_0, E_0, F_0 au **II**. Pour $\lambda = -q^{n-1}$, le triplet $(-K, E, -F)$, associé à la base $(v_1, -v_2, v_3, \ldots, (-1)^{n-1}v_n)$ satisfait à ces mêmes propriétés définissantes.