CORRIGÉ DE L'ÉPREUVE MATH DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE FILIÈRE PC

Première partie

(1) (a) On a $P_j(X) = \prod_{k\neq j} \dfrac{X - x_k}{x_j - x_k}$.

(b) $P_j(x_k) = \delta_{jk}$ et $L_F(x_k) = \sum_{j=1}^{n} F(x_j)P_j(x_k) = F(x_k)$.

(c) On applique la formule précédente à $F = 1$.

(d) Si $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j = 0$ alors, en appliquant cette relation à x_k, on trouve $\lambda_k = 0$.
La famille $(P_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ est une famille libre de n éléments dans un espace vectoriel de dimension n, c'est donc une base.

(2) Directement on a

$$\begin{aligned}\forall i \in [\![1, n]\!], X^i &= \sum_{j=1}^{n} x_j^i P_j = \sum_{j=1}^{n} x_j^i \sum_{k=0}^{n-1} b_{k,j} X^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j^i b_{k,j}}_{\delta_{i,k}} \Big) X^k.\end{aligned}$$

On a ainsi

$$\sum_{k=1}^{n} b_{i-1,j} x_j^{k-1} = \delta_{i,k} \text{ i.e. } BV = I_n$$

en décalant les indices.
Remarque : en faisant le produit VB on trouve $(P_j(x_i)) = I_n$.

(3) (a) $b_{n-1,j}$ est le coefficient du terme de plus haut degré de $P_j = \prod_{k\neq j} \dfrac{X - x_k}{x_j - x_k}$ par conséquent $b_{n-1,j} = \dfrac{1}{\prod_{i\neq j}(x_j - x_i)} = \dfrac{1}{P'(x_j)}$.
On a ainsi $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{x_k^j}{P'(x_k)} = \sum_{k=1}^{n} b_{n-1,k} x_k^j = \delta_{n-1,j}$.

(b) On fait le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{(X - x_k)^{n-1}}{P'(x_k)} &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^j \binom{n-1}{j} X^{n-1-j} x_k^j}{P'(x_k)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} X^{n-1-j} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^j}{P'(x_k)} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} X^{n-1-j} \delta_{n-1,j} = (-1)^{n-1}.\end{aligned}$$

Deuxième partie

(4) (a) N est la norme 1 sur $\mathcal{E}_d$.
$\|.\|_K$ vérifie l'homogénéité et l'inégalité triangulaire et $\|Q\|_K = 0 \Rightarrow Q$ a au moins $d+1$ racines donc $Q = 0$.
Enfin N et $\|.\|_K$ sont équivalentes grâce au théorème sur l'équivalence des normes en dimension finie.

(b) On utilise l'inégalité $\big|\|P\|_K - \|Q\|_K\big| \leq \|P - Q\|_K$ qui assure la continuité de la norme.

(5) (a) On a les inégalités suivantes

$$|Q(z)| \leq \sum_{i=0}^{d} |a_i|.|z^i| \leq \sum_{i=0}^{d} |a_i|\rho^i \leq \max(1,\rho^d)\sum_{i=1}^{d} |a_i| \leq (d+1)\max(1,\rho^d)N(Q)$$

en distinguant les cas $\rho < 1$ et $\rho \geq 1$.
On écrit alors que $\|Q\|_K = \sup_{z\in K} |Q(z)| \leq (d+1)\max(1,\rho^d)N(Q)$ et en conclusion

$$\sup_{Q\in\mathcal{E}_d, Q\neq 0} \frac{\|Q\|_K}{N(Q)} \leq (d+1)\max(1,\rho^d).$$

(b) On a vu au **1.b.** que

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{j=1}^{n} Q(x_j)P_j = \sum_{j=1}^{n} Q(x_j)\sum_{i=0}^{n-1} b_{i,j}X^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} Q(x_j)b_{i,j}\right)}_{=a_i} X^i \end{aligned}$$

d'où $|a_i| \leq n\|Q\|_K \sup_{j\in[\![1,n]\!]} |b_{i,j}| \leq n\beta\|Q\|_K$.

En conclusion $N(Q) \leq (d+1)\beta\|Q\|_K$ soit $\displaystyle\sup_{Q\in\mathcal{E}_d, Q\neq 0} \frac{N(Q)}{\|Q\|_K} \leq \beta(d+1)$.

Troisième partie

(6) (a) Soit $Q = X^d$ alors $Q \in \mathcal{U}_d$ et $\|Q\|_K = \rho^d$ donc $0 \leq m \leq \rho^d$.

(b) Soit $\mathcal{A} = \{Q \in \mathcal{U}_d \mid \|Q\|_K \leq \rho^d\}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}_d$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ car $X^d \in \mathcal{A}$ et on a de manière évidente $\inf_{Q\in\mathcal{A}} \|Q\|_K = \inf_{Q\in\mathcal{U}_d} \|Q\|_K$.

(c) Montrons que $\mathcal{A}$ est un fermé borné de $\mathcal{E}_d$:
- $\mathcal{A}$ est fermé : $f \ : Q \in \mathcal{E}_d \mapsto a_d$ coefficient de degré d de Q est continue (c'est une application linéaire en dimension finie) et $\mathcal{U}_d = f^{-1}(\{1\})$, donc $\mathcal{A} = \overline{B}(0,\rho^d) \cap \mathcal{U}_d$ est fermé
- $\mathcal{A}$ est borné par définition.

$\mathcal{A}$ est un compact de $\mathcal{E}_d$ et $Q \mapsto \|Q\|_K$ est continue donc elle atteint sa borne inférieure sur $\mathcal{A}$ qui est aussi la borne inférieure sur $\mathcal{U}_d$.

Quatrième partie

(7) Soit $c_k = \rho e^{i\theta}$ et on prend, par exemple, $z = z_0 + e^{-i\theta/k}$ alors

$$|Q(z)| = Q(z) = 1 + \rho e^{i\theta}\left(e^{-i\theta/k}\right)^k = 1 + \rho > Q(z_0) = 1.$$

(8) (a) On écrit la formule de Taylor pour Q :

$$Q(X) = Q(z_0) + (X - z_0)Q'(z_0) + \cdots + \frac{(X - z_0)^d}{d!}Q^{(d)}(z_0).$$

Soit $k \geq 1$ minimal tel que $Q^{(k)}(z_0) \neq 0$ (k existe car Q n'est pas constant). En reprenant la formule ci-dessus on a

$$Q(X) = Q(z_0) + (X - z_0)^k \underbrace{\frac{Q^{(k)}(z_0)}{k!}}_{=c_k} + (X - z_0)^{k+1}S(X)$$

et comme $c_k \neq 0$, on peut écrire $S(X) = c_k R(X)$.

(b) Avec $c_k = \rho e^{i\theta}$ on prend $z = z_0 + re^{-i\theta/k}$ alors

$$\begin{aligned} Q(z) &= 1 + \rho e^{i\theta} r^k e^{-i\theta} + \rho e^{i\theta} r^k e^{-i\theta}(z - z_0)R(z) \\ &= 1 + |c_k|.|z - z_0|^k + |c_k|.|z - z_0|^k (z - z_0)R(z). \end{aligned}$$

(c) On reprend l'égalité ci-dessus, $(z - z_0)R(z) = re^{-i\theta/k}R(z) \to 0$ quand $r \to 0$ donc il existe r_0 tel que, $|(z - z_0)R(z)| < \frac{1}{2}$ pour tout $r' \leq r_0$ (avec $z = z_0 + r'e^{-i\theta/k}$) donc

$$\begin{aligned} |Q(z)| &> 1 + |c_k|.|z - z_0|^k - \frac{1}{2}|c_k|.|z - z_0|^k = 1 + \frac{1}{2}|c_k|.|z - z_0|^k \\ &> 1 \text{ en utilisant l'inégalité triangulaire } |a + b| \geq |a| - |b| \end{aligned}$$

d'où, pour tout $r > 0$, on peut trouver $r' \leq r_0$ (et z) tel que $|Q(z)| > |Q(z_0)|$.

(9) (a) Si $Q(z_0) = 0$ c'est immédiat sinon on applique le **8.c.** au polynôme $\dfrac{Q(z)}{Q(z_0)}$.

(b) L'ensemble $\overline{D}(0, 1) = \{|z| \leq 1\}$ est un compact et $z \mapsto |Q(z)|$ est continue donc il existe $z_0 \in \overline{D}(0, 1)$ qui réalise le maximum de $|Q(z)|$.
Si $z_0 \in D(0, 1)$ alors il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset D(0, 1)$ et on a vu dans ce cas qu'il existait $z \in D(z_0, r)$ tel que $|Q(z)| > |Q(z_0)|$ ce qui est contradictoire.
Conclusion : le maximum est atteint uniquement en un point de la frontière.

(c) On écrit $\dfrac{Q(z)}{z^d} = Q_1(1/z)$ alors

$$\begin{aligned} \sup_{|1/z| \leq 1} |Q_1(1/z)| &= \sup_{|z|=1} |Q_1(1/z)| \\ &= \sup_{|z| \geq 1} \left| \frac{Q(z)}{z^d} \right| = \sup_{|z|=1} |Q(z)| \end{aligned}$$

car $\left| \dfrac{Q(z)}{z^d} \right| = |Q(z)|$ pour $|z| = 1$.

(d) Tout d'abord on a $\|Q_0\|_K = 1$ donc $m \leq 1$. Soit $Q \in \mathcal{U}_d$, $Q \neq Q_0$ alors $\dfrac{Q(z)}{z^d} = 1 + \dfrac{a_{d-1}}{z} + \cdots + \dfrac{a_0}{z^d}$ soit $Q_1(z) = 1 + a_{d-1}z + \cdots + a_0 z^d$ et les a_k ne sont pas tous nuls. $Q_1(0) = 1$ et on a vu au **8.c.** qu'il existait $z' \in \mathbb{C}$ tel que $|z' - z_0| = |z| \leq 1$ et vérifiant $|Q_1(z')| > 1$.
En prenant $Z = 1/z'$ alors $\dfrac{Q(Z)}{Z^d} > 1$ soit $\sup\limits_{|z| \geq 1} \left| \dfrac{Q(z)}{z^d} \right| = \sup\limits_{|z|=1} |Q(z)| > 1$.
On a ainsi $m \geq 1$ et donc $m = 1 = \|Q_0\|_K$.

Cinquième partie

(10) Si $z_1 = \lambda z_0$ avec $\lambda > 0$ alors $|z_1 + z_0| = |(\lambda+1)z_0| = (\lambda+1)|z_0| = |z_1| + |z_0|$.
Réciproque : on pose $z_0 = e^{i\theta_0}|z_0|$ et $z_1 = e^{i\theta_1}|z_1|$ et on élève au carré la relation $|z_0 + z_1| = |z_0| + |z_1|$ d'où, après simplification, $z_0\overline{z_1} + \overline{z_0}z_1 = |z_0|.|z_1|$. On divise par $|z_0|.|z_1|$ d'où $e^{i(\theta_0-\theta_1)} + e^{-i(\theta_0-\theta_1)} = 2$ i.e. $\cos(\theta_0 - \theta_1) = 1$ soit finalement $\theta_0 = \theta_1 + 2k\pi$ ce qui se traduit par $z_1 = \lambda z_0$ avec $\lambda > 0$.

(11) (a) $Q_t \in \mathcal{U}_d$ donc $\|Q_t\|_K \geq m$ puis $\|Q_t\|_K \leq t\|Q_1\| + (1-t)\|Q_0\| \leq m$ d'où $\|Q_t\|_K = m$.

(b) Supposons (par exemple) que $z \notin \mathcal{M}(Q_0)$ alors $|Q_0(z)| < \|Q_0\|_K$ ce qui donne
$$|Q_t(z)| \leq t\underbrace{|Q_1(z)|}_{\leq m} + (1-t)\underbrace{|Q_0(z)|}_{<m} < m.$$
On obtient alors une contradiction avec l'hypothèse $|Q_t(z)| = m$.
Conclusion : $z \in \mathcal{M}(Q_0)$ et, par symétrie, $z \in \mathcal{M}(Q_1)$.
Si $z \in \mathcal{M}(Q_0) \cap \mathcal{M}(Q_1)$ alors $|Q_t(z)| = m = t|Q_1(z)| + (1-t)|Q_0(z)|$. On applique alors le résultat du **11.** avec $z_0 = (1-t)Q_0(z)$ et $z_1 = tQ_1(z)$. z_0 et z_1 ont même argument puis $Q_0(z)$ et $Q_1(z)$ ont même module et même argument, ils sont égaux.

(c) Soit $t \in]0,1[$ alors $Q_0(z) - Q_1(z) = 0$ et comme les polynômes Q_0, Q_1 sont unitaires, $\deg(Q_0 - Q_1) < d$ donc il y a au plus $d-1$ éléments dans $\mathcal{M}(Q_t)$.

(12) (a) Soient $z_1, z_2, \ldots, z_k$ les éléments de $\mathcal{M}(Q)$ ($k \leq d$), il suffit de prendre pour L le polynôme d'interpolation de Lagrange de Q aux points z_i.

(b) $Q_p \in \mathcal{U}_d$ donc $\|Q_p\|_K \geq m = \|Q\|_K$ et par conséquent il existe $z_p \in K$ tel que $|Q_p(z_p)| = \|Q_p\|_K \geq \|Q\|_K$ (K étant un compact, la borne supérieure est effectivement atteinte).
On admet ensuite la propriété de Bolzano-Weierstrass : de toute suite de K compact on peut extraire une suite convergente.

(c) On a $Q_{n_p}(z_{n_p}) = \left|Q(z_{n_p}) - \dfrac{1}{n_p}L(z_{n_p})\right| \geq \|Q\|_K$ et, en passant à la limite quand $p \to +\infty$, $|Q(l)| = \|Q\|_K$ i.e. $l \in \mathcal{M}(Q)$ et finalement $Q(l) = L(l)$.

(d) Comme Q est continue, $Q(z_{n_p}) \to Q(l)$ et $Q(l) \neq 0$ on écrit $Q(z_{n_p}) = Q(l)(1+\varepsilon_p)$ avec $\lim\limits_{p\to+\infty} \varepsilon_p = 0$. Comme $|Q(z_{n_p})| \leq |Q(l)|$ ($l \in \mathcal{M}(Q)$) alors $|1+\varepsilon_p| \leq 1$.
De même $L(z_{n_p}) \to L(l) = Q(l)$ et par conséquent $\dfrac{L(z_{n_p})}{1+\varepsilon_p} \to Q(l)$ ce que l'on peut encore écrire $L(z_{n_p}) = Q(l)(1+\varepsilon_p)(1+\varepsilon'_p)$ avec $\lim\limits_{p\to+\infty} \varepsilon'_p = 0$.
On en déduit que
$$Q_{n_p}(z_{n_p}) = Q(z_{n_p}) - \frac{1}{n_p}L(z_{n_p}) = Q(l)(1+\varepsilon_p)\left[1 - \frac{1}{n_p}(1+\varepsilon'_p)\right]$$
$$|Q_{n_p}(z_{n_p})| \leq \|Q\|_K \left|1 - \frac{1}{n_p}(1+\varepsilon'_p)\right| < \|Q\|_K$$
en choisissant p suffisamment grand pour que $|1+\varepsilon_p| > \dfrac{1}{2}$.

(13) On a obtenu une contradiction entre le résultat du **12.b** ($|Q_p(z_p)| \geq \|Q\|_K$) et celui du **12.d** ($|Q_{n_p}(z_{n_p})| < \|Q\|_K$).
On obtient le résultat intermédiaire suivant : pour tout $Q \in \mathcal{U}_d$ réalisant $\|Q\|_K = m$ alors card $(\mathcal{M}(Q) > d$.
Or, s'il existe Q_0 et Q_1 deux polynômes distincts de $\mathcal{U}_d$ tels que $\|Q_0\|_K = \|Q_1\|_K = m$ alors, pour tout $t \in]0,1[$, card $(M(Q_t)) < d$ (cf. **11.c**). Comme $Q_t \in \mathcal{U}_d$ et que $\|Q_t\|_K = m$ on arrive à une contradiction avec le résultat intermédiaire ci-dessus.
Conclusion : il existe un unique polynôme $Q_0 \in \mathcal{U}_d$ tel que $\|Q_0\|_K = m$.