

A. Préliminaires.

1. a/ $x \mapsto f(x)e^{-2i\pi x\xi}$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ pour tout réel ξ .
b/ $\xi \mapsto f(x)e^{-2i\pi x\xi}$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout réel x
c/ Pour tout réel ξ , on a $|f(x)e^{-2i\pi x\xi}| \leq |f(x)|$ continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$

Donc si $f \in \mathcal{L}$ alors $\widehat{f}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

2. Commençons par quelques remarques :

a/ Soient f et g deux éléments de $\mathcal{L}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et $h = f + \lambda g$. Alors la linéarisation de l'intégrale définissant $\widehat{h}$ est licite car les deux intégrales convergent et on a donc $\widehat{h} = \widehat{f} + \lambda \widehat{g}$.

b/ $f \in \mathcal{L}^*$ si et seulement si f est continue et si il existe $\alpha > 1$ tel que $f(x) = O(\frac{1}{|x|^\alpha})$ au voisinage de $\pm\infty$ puisque f est bornée sur tout compact de $\mathbb{R}$.

c/ Il en découle immédiatement que $\mathcal{L}^*$ est un sous-ensemble de $\mathcal{L}$.

En outre c'est bien un sous-espace car si $f(x) = O(\frac{1}{|x|^\alpha})$ et $g(x) = O(\frac{1}{|x|^\beta})$ alors $h(x) = f(x) + \lambda g(x) = O(\frac{1}{|x|^\gamma})$ avec $\gamma = \min(\alpha, \beta) > 1$.

La remarque a/ implique immédiatement que $\mathcal{W}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}$ et la remarque c/ que $\mathcal{W}^*$ est un sous-espace de $\mathcal{L}^*$. En outre si $f \in \mathcal{W}^*$ alors f et $\widehat{f}$ appartiennent à $\mathcal{L}^*$ donc à $\mathcal{L}$ puisque $\mathcal{L}^* \subset \mathcal{L}$ et ainsi $f \in \mathcal{W}$. Donc $\mathcal{W}^*$ est bien un sous-espace de $\mathcal{W}$. $\square$

3. Le changement de variable $x \mapsto u = \alpha x$ admissible car $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur lui-même fournit immédiatement que $\widehat{f_\alpha}(\xi) = \frac{1}{\alpha} \widehat{f}(\frac{\xi}{\alpha})$. $\square$

Par le changement $x \mapsto u = x + y$ on obtient $\widehat{f_{y,v}}(\xi) = e^{2i\pi y(v+\xi)} \widehat{f}(v + \xi)$. $\square$

On en déduit immédiatement que si f appartient à $\mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{W}^*$) il en va de même de f_α et $f_{y,v}$. $\square$

4. • $\widehat{s}(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi x\xi} dx$ donc $\widehat{s}(0) = 1$ et $\widehat{s}(\xi) = \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}$ pour $\xi \neq 0$. $\square$

(on vérifie que $\widehat{s}$ est bien continue)

$$\bullet \widehat{t}(\xi) = \int_{-1}^0 (1+x)e^{-2i\pi x\xi} dx + \int_0^1 (1-x)e^{-2i\pi x\xi} dx.$$

Pour $\xi \neq 0$ une intégration par parties montre que la première intégrale vaut $\frac{-1}{2i\pi\xi} + \frac{1-e^{2i\pi\xi}}{4\pi^2\xi^2}$ et la seconde

$$\frac{1}{2i\pi\xi} + \frac{1-e^{-2i\pi\xi}}{4\pi^2\xi^2} \text{ donc } \widehat{t}(\xi) = \frac{1-\cos(2\pi\xi)}{2\pi^2\xi^2} = \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2 \text{ et par ailleurs } \widehat{t}(0) = 1 \quad \square$$

(là encore on vérifie que $\widehat{t}$ est bien continue)

5. s appartient à $\mathcal{L}$ mais n'appartient pas à $\mathcal{W}$ car classiquement $u \mapsto \frac{\sin u}{u}$ n'est pas intégrable au voisinage de l'infini. Donc $\mathcal{W}$ et a fortiori $\mathcal{W}^*$ sont distincts de $\mathcal{L}$. $\square$

6. Soit (f_n) une suite de $\mathcal{W}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| dx = \varepsilon_n$.

Alors pour tout réel ξ , il vient $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f_n}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| dx = \varepsilon_n$. $\square$

B. Formule sommatoire de Poisson.

Remarque: Dans la suite on envisage des sommations sur $\mathbb{Z}$: $S = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n$.

On considérera dans ce texte qu'une telle série converge si les deux séries $S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ et $S_2 = \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}$ convergent et on notera $S = S_1 + S_2$. Cela entraîne naturellement la convergence au sens de la sommation symétrique de Cauchy avec la même valeur pour la somme.

7. Soit $f \in \mathcal{L}^*$ et $x \in [-a, a]$ avec a réel positif quelconque. Par définition de $\mathcal{L}^*$ il existe $M > 0$ et $\alpha > 1$ tel que $|x + n|^\alpha |f(x + n)| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

$$\text{Il en résulte que } |f(x + n)| \leq \frac{M}{(|n| - a)^\alpha} \quad \forall |n| > a \quad \forall x \in [-a, a]$$

Ce qui prouve que la série définissant $\tilde{f}$ converge localement normalement donc localement uniformément sur $\mathbb{R}$. Comme $x \mapsto f(x + n)$ est continue sur $\mathbb{R}$ il en va de même de $\tilde{f}$ qui est en outre clairement 1-périodique. $\square$

8. La série définissant $\tilde{f}$ converge en particulier uniformément sur $[0, 1]$ d'après ci-dessus, on peut donc intégrer terme à terme dans le calcul de $c_n(\tilde{f})$ ce qui fournit $c_n(\tilde{f}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} I_k$ avec :

$$I_k = \int_0^1 f(x + k) e^{-2i\pi n x} dx = \int_k^{k+1} f(u) e^{-2i\pi n(u-k)} du = \int_k^{k+1} f(u) e^{-2i\pi n u} du.$$

$$\text{Comme } \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-2i\pi n u} du \text{ converge on a } c_n(\tilde{f}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} I_k = \int_{\mathbb{R}} f(u) e^{-2i\pi n u} du = \hat{f}(n) \quad \square$$

9. Si $\hat{f} \in \mathcal{L}^*$ alors il existe $\alpha > 1$ tel que $\hat{f}(n) = O(\frac{1}{n^\alpha})$ au voisinage de $\pm\infty$ ce qui implique que la série trigonométrique $S(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi n x}$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$. Il en découle qu'elle est continue et classiquement qu'elle est égale à la somme de sa série de Fourier.

Ainsi $\tilde{f}$ et S sont continues périodiques et admettent la même série de Fourier. Donc elles sont égales. $\square$

$$\text{Si } f \in \mathcal{W}^* \text{ alors } \hat{f} \in \mathcal{L}^* \text{ et l'égalité ci-dessus fournit en particulier } \tilde{f}(0) = S(0) \text{ soit } \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) \quad \square$$

C. Application à la formule d'inversion de Fourier.

- 10 Si $f \in \mathcal{W}^*$ alors $f_{x,\xi}$ également par la question 3 et on peut donc appliquer la formule de Poisson. Il vient

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{x,\xi}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + n) e^{-2i\pi n \xi} \text{ et par la question 3 } \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f_{x,\xi}}(n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{2i\pi x(n+\xi)} \hat{f}(n + \xi).$$

$$\text{Ainsi } \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + n) e^{-2i\pi n \xi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n + \xi) e^{2i\pi x(n+\xi)} \quad \forall f \in \mathcal{W}^* \quad \square$$

Par définition même de F_x le membre de droite de l'égalité ci-dessus n'est autre que $\widetilde{F_x}(\xi)$ dont le membre de droite apparaît comme un développement en série trigonométrique. Or comme $f \in \mathcal{W}^*$ donc a fortiori appartient à $\mathcal{L}^*$, cette série trigonométrique converge normalement sur $\mathbb{R}$ donc est le développement en série de Fourier de sa somme. Ainsi $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + n) e^{-2i\pi n \xi}$ est le développement en série de Fourier de $\widetilde{F_x}(\xi)$ $\square$

- 11 En particulier $f(x)$ est le coefficient de Fourier d'indice 0 de $\widetilde{F_x}$ donc

$$f(x) = \int_0^1 \widetilde{F_x}(u) du = \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(u + k) e^{2i\pi x(u+k)} du.$$

Comme $\hat{f} \in \mathcal{L}^*$ la série converge normalement sur $[0, 1]$ et on peut intégrer terme à terme ce qui fournit

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} J_k \text{ avec } J_k = \int_0^1 \hat{f}(u + k) e^{2i\pi x(u+k)} du = \int_k^{k+1} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi \text{ et donc (comme dans la question 8)}$$

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi \quad \square$$

Remarque : On vérifie immédiatement par changement de variable $x \mapsto -x$ que si f est paire ou impaire alors il en va de même de $\hat{f}$. À nouveau par le changement $\xi \mapsto -\xi$, dans la formule d'inversion on en déduit que si f est paire (resp. impaire) alors $\widehat{\hat{f}} = f$ (resp. $\widehat{\hat{f}} = -f$).

- 12 Soit λ une valeur propre (si elle existe) de la transformation de Fourier dans $\mathcal{W}^*$ et f un vecteur propre non nul.

$$\text{D'après la formule d'inversion on a } f(x) = \lambda \int_{\mathbb{R}} f(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi = \lambda \hat{f}(-x) = \lambda^2 f(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } f(x) = \lambda^4 f(x) \text{ donc } \lambda^4 = 1 \text{ car il existe } x \text{ tel que } f(x) \neq 0 \quad \square$$

Les seules valeurs propres réelles possibles sont donc 1 et -1.

D'après la remarque de la question 11 on a $t = \widehat{\hat{t}}$ puisque t est paire.

Il en découle que 1 et -1 sont effectivement valeur propre et que $t + \widehat{t}$ et $t - \widehat{t}$ sont deux vecteurs propres respectivement associés. $\square$

D. Application au théorème d'échantillonnage de Whittaker.

13 La formule d'inversion de Fourier fournit $f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi$ et la formule généralisée de Poisson spécifiée en $x = 0$ donne $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{-2i\pi n \xi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + n)$.

Or pour $\xi \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ on a par hypothèse $\widehat{f}(\xi + n) = 0$ pour $n \neq 0$ et ainsi $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{-2i\pi n \xi} = \widehat{f}(\xi)$.

Il vient donc $f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{2i\pi(x-n)\xi} \right) d\xi$ ce qui prouve que la connaissance de l'échantillonnage $(f(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ détermine bien f de manière unique. $\square$

14 Soient $\varepsilon \in]0, \frac{1}{2}[$ et $g(\xi) = t\left(\frac{\xi - 1/2}{\varepsilon}\right) - t\left(\frac{\xi + 1/2}{\varepsilon}\right) = g_1(\xi) - g_2(\xi)$.

Comme t est nulle en dehors de $] -1, 1[$, g est nulle en dehors de $] -\frac{1}{2} - \varepsilon, -\frac{1}{2} + \varepsilon[\cup] \frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon[$. Par ailleurs g n'est pas nulle.

D'après la question 3 on a $g \in \mathcal{W}^*$ et, comme t est paire, g est impaire donc $g = \widehat{f}$ avec $f(x) = -\widehat{g}(x)$.
Toujours par la question 3 on a $\widehat{g_1}(\xi) = \varepsilon t_{-1/2, 0}(\varepsilon \xi) = \varepsilon e^{-i\pi \xi} \widehat{t}(\varepsilon \xi)$ et $\widehat{g_2}(\xi) = \varepsilon e^{i\pi \xi} \widehat{t}(\varepsilon \xi)$.

Donc $f(\xi) = -\widehat{g}(\xi) = 2i\varepsilon \sin(\pi \xi) \widehat{t}(\varepsilon \xi)$.

On a ainsi $\widehat{f} = g$ non identiquement nulle et nulle en dehors de $] -\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon[$. Pourtant la suite $(f(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est nulle et ne détermine donc pas f puisque f est non nulle identiquement sinon g le serait. $\square$

E. Contre-exemple de Katznelson.

15 On établit facilement que $u_k(x)$ est la fonction paire, affine par morceaux, nulle sur $[\frac{1}{2^k}, +\infty[$, nulle en 0, égale à $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2^{k+1}}$ et affine sur $[0, \frac{1}{2^{k+1}}]$ et sur $[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}]$

• Il en résulte que si $x \in \mathbb{Z}$ alors $u_k(x - n) = 0$ pour tous k et n dans $\mathbb{Z}$ donc dans ce cas $f(x)$ est bien défini et $f(x) = 0$.

• Soit $I_{n_0, k_0} = [n_0 + \frac{1}{2^{k_0}}, n_0 + 1 - \frac{1}{2^{k_0}}]$ avec $n_0 \in \mathbb{Z}$ et $k_0 \geq 2$ et soit $x \in I_{n_0, k_0}$.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on a $|x - n| \geq \frac{1}{2^{k_0}}$ donc $u_k(x - n) = 0$ pour $k \geq k_0$ d'où $u_{k, N_k}(x) = 0$.

Ainsi pour $x \in I_{n_0, k_0}$ la fonction $f(x)$ est bien définie et continue en tant que somme finie : $f(x) = \sum_{k=0}^{k_0} u_{k, N_k}(x)$

• En conclusion comme f est définie sur $\mathbb{Z}$ et comme tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ est inclus dans un intervalle du type précédent, f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. $\square$

16 Pour établir que $\sum_k u_{k, N_k}$ converge en moyenne vers f , il suffit, d'après le théorème de convergence $\mathcal{L}^1$, de montrer

que la série $\sum_k \int_{\mathbb{R}} |u_{k, N_k}|$ converge.

Or u_k est positive donc $|u_{k, N_k}| = u_{k, N_k}$ et $\int_{\mathbb{R}} u_k(x - n) dx = \int_{\mathbb{R}} u_k(x) dx = \frac{1}{2^{k+1}}$ (aire de deux triangles).

Donc $\int_{\mathbb{R}} |u_{k, N_k}| = \frac{1}{N_k} \sum_{|n| < N_k} \left(1 - \frac{|n|}{N_k}\right) \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{N_k^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{N_k-1} n\right) \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{N_k^2} (1 + N_k(N_k - 1)) \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{2^k}$ ce

qui prouve la convergence de la série $\sum_k \int_{\mathbb{R}} |u_{k, N_k}|$ et établit le résultat. $\square$

D'après la question 6 on en déduit que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{u_{k, N_k}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $\widehat{f}$. $\square$

17 • Commençons par établir que, pour k fixé quelconque, la série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n$ avec $\alpha_n = \sup_{[n, n+1]} |\widehat{u_k}|$ converge.

D'après la question 3 on a $\widehat{u_k}(x) = \frac{1}{2^k} \widehat{t}\left(\frac{x}{2^k}\right) - \frac{1}{2^{k+1}} \widehat{t}\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right)$ donc d'après la question 4 :

$\widehat{u_k}(x) = \frac{1}{\pi^2 x^2} \left(2^k \sin^2\left(\frac{\pi x}{2^k}\right) - 2^{k+1} \sin^2\left(\frac{\pi x}{2^{k+1}}\right)\right)$ pour $x \neq 0$ et $\widehat{u_k}(0) = \frac{1}{2^{k+1}}$

Comme u_k est paire, il en va de même de $\widehat{u}_k$ (remarque question 11) et donc il suffit d'établir la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \alpha_n$.

Or la valeur de $\widehat{u}_k(x)$ pour $x \neq 0$ ci-dessus prouve que $\alpha_n \leq 3 \frac{2^k}{\pi^2 n^2}$ pour $n \geq 1$ ce qui établit le résultat. $\square$

• Par ailleurs on a $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}_{k,N}| = \sum_{n \in \mathbb{Z}} I_n$ avec $I_n = \int_n^{n+1} |\widehat{u}_{k,N}|$.

Or $u_k(\widehat{x-p}) = e^{-2i\pi p x} \widehat{u}_k(x)$ par la question 3 de sorte que $\widehat{u}_{k,N}(x) = \frac{\widehat{u}_k(x)}{N} \sum_{|p| < N} \left(1 - \frac{|p|}{N}\right) e^{-2i\pi p x}$

Or $\sum_{|p| < N} \left(1 - \frac{|p|}{N}\right) e^{-2i\pi p x} = \sum_{|p| < N} \left(1 - \frac{|p|}{N}\right) e^{2i\pi p x} = K_N(x)$ et est donc positif.

Donc $I_n = \frac{1}{N} \int_n^{n+1} |\widehat{u}_k(x)| \sum_{|p| < N} \left(1 - \frac{|p|}{N}\right) e^{-2i\pi p x} dx \leq \frac{\alpha_n}{N} \int_n^{n+1} \sum_{|p| < N} \left(1 - \frac{|p|}{N}\right) e^{-2i\pi p x} dx = \frac{\alpha_n}{N}$

En conclusion on a bien $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}_{k,N}| \leq \frac{1}{N} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sup_{[n, n+1]} |\widehat{u}_k| = \frac{S_k}{N}$ $\square$

18 En choisissant par exemple $N_k = (\text{Int}(S_k) + 1)k^2$ il vient que $\sum_k \int_{\mathbb{R}} |\widehat{u}_{k,N}|$ converge et, comme $\widehat{f} = \sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{u}_{k,N}$ d'après la question 16, le théorème de convergence $\mathcal{L}^1$ prouve que $\sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{u}_{k,N}$ converge en moyenne vers $\widehat{f}$. $\square$

Comme u_k est paire, on en déduit que u_{k,N_k} également (car la somme définissant $u_{k,N_k}(x)$ est invariante par le changement $n \mapsto -n$) donc f est paire et d'après la remarque de la question 11 on a $u_{k,N_k} = \widehat{\widehat{u}_{k,N_k}}$ et $f = \widehat{\widehat{f}}$.

On en déduit alors de la question 6 que la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,N_k}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f . $\square$

19 • Comme noté précédemment on a $f(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ de sorte que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = 0$.

• D'après un calcul effectué dans la question 17 on a :

$$\widehat{u}_{k,N}(x) = \frac{K_N(n)}{N} \widehat{u}_k(n) = \widehat{u}_k(n) \text{ car } K_N(n) = N \text{ et}$$

$$\widehat{u}_k(n) = \frac{1}{\pi^2 n^2} \left(2^k \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2^k} \right) - 2^{k+1} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{2^{k+1}} \right) \right) \text{ pour } n \neq 0 \text{ et } \widehat{u}_k(0) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Or $\widehat{f}(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{u}_{k,N_k}(n)$ d'après la question 16 ce qui entraîne que $\widehat{f}(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \widehat{u}_k(n)$.

Ainsi pour $n \neq 0$ on a par télescopage $\widehat{f}(n) = \frac{1}{\pi^2 n^2} \sin^2(n\pi) = 0$ et $\widehat{f}(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = 1$

Donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) = 1$

• Ainsi la formule de Poisson n'est pas valide pour la fonction f ce qui prouve que $f \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}^*$ $\square$

(f appartient bien à $\mathcal{W}$ car f et $\widehat{f}$ sont intégrables par les questions 16 et 18)

F. Resommation d'Ewald.

20 En notant $f(x) = g\left(\frac{x}{100}\right)$ il vient $S = \frac{1}{2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) - 1 \right)$

Or $\widehat{f}(x) = 100\widehat{g}(100x) = 100g(100x)$ de sorte que $S = 50 \sum_{n \in \mathbb{Z}} g(100n) - \frac{1}{2} = 50 \left(2 \sum_{n=1}^{+\infty} g(100n) + 1 \right) - \frac{1}{2}$.

Ainsi $S = 49.5 + 100 \sum_{n=1}^{+\infty} g(100n) = 49.5 + 100S'$

Classiquement puisque $t \mapsto g(100t)$ décroît il vient :

$$100 \sum_{n=2}^{+\infty} g(100n) \leq 100 \int_1^{+\infty} g(100t) dt = \int_{100}^{+\infty} g(u) du \leq \int_{100}^{+\infty} e^{-100\pi u} du = \frac{1}{100\pi} e^{-10000\pi} = \frac{g(100)}{100\pi}$$

Donc $S' = g(100) + R'_1 \leq \left(1 + \frac{1}{100\pi}\right) g(100) \leq 1.1 \times g(100) = 1.1 \times \alpha^{-10000}$ avec $\alpha = e^\pi > 2.5^3 = 15.625$

donc $S' \leq 1.1 \times 15^{-10000} < 10^{-10000}$

Ainsi 49.5 est une valeur approchée de S par défaut à moins de 10^{-10000} près. $\square$