

Corrigé du sujet X-ENS 2022 filière MP épreuve A

Déterminant de Gram, formes p -linéaires alternées et Grassmanniennes

Soit $g : E^p \rightarrow F$ une application p -linéaire alternée. On utilisera sans vergogne les faits bien connus, et faciles à établir, selon lesquels,

$$(x_1, \dots, x_p) \text{ liée} \implies g(x_1, \dots, x_p) = 0.$$

$$g(x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + \sum_{j \neq k} \lambda_j x_j, x_{k+1}, \dots, x_p) = g(x_1, \dots, x_p).$$

Partie I

1. (a) Puisque V et V' sont des espaces de dimension finie, les sphères $S = \{a \in V; \|a\| = 1\}$ et $S' = \{a \in V'; \|a\| = 1\}$ sont compactes et leur produit $S \times S'$ l'est aussi. Comme le produit scalaire est une application bilinéaire continue (comme le montre par exemple l'inégalité de Cauchy-Schwarz), il existe $(u_1, u'_1) \in S \times S'$ tel que $\langle u_1, u'_1 \rangle = \max\{\langle a, a' \rangle, (a, a') \in S \times S'\}$.
- (b) Construisons les vecteurs u_k et u'_k par récurrence sur k . Les vecteurs u_1 et u'_1 viennent d'être construits. Soit $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$. Supposons construits les vecteurs u_1, \dots, u_{k-1} et u'_1, \dots, u'_{k-1} . Ce sont des familles orthonormées de V et V' respectivement. Posons

$$W = \{x \in V; \forall \ell \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, \langle x, u_\ell \rangle = 0\}$$

$$W' = \{x' \in V'; \forall \ell \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, \langle x, u'_\ell \rangle = 0\}.$$

Alors W et W' sont deux sous-espaces de E de dimension $p - k + 1 \geq 1$. D'après la question (a), il existe $u_k \in W$ et $u'_k \in W'$ normés tels que

$$\langle u_k, u'_k \rangle = \max\{\langle a, a' \rangle, (a, a') \in W \times W', \|a\| = \|a'\| = 1\}.$$

Les vecteurs u_k et u'_k conviennent.

2. Supposons $\dim(V \cap V') \geq 1$, et soit $k \leq \dim(V \cap V')$. Supposons que, pour tout $\ell \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, $u_\ell = u'_\ell$ (ce qui est évidemment vrai pour $k = 1$). Alors $V \cap V' \cap \text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1})^\perp \neq \{0\}$ (par exemple parce que $\dim(V \cap V') + \dim(\text{Vect}(u_1, \dots, u_{k-1})^\perp) > d$). Donc

$$\sup\{\langle a, a' \rangle, (a, a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1, \langle a, u_\ell \rangle = \langle a, u'_\ell \rangle = 0 \text{ pour tout } \ell \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket\} = 1$$

d'où $\langle u_k, u'_k \rangle = 1$ et, puisque ces vecteurs sont normés, $u_k = u'_k$. Une récurrence sur $k \in \llbracket 1, \dim(V \cap V') \rrbracket$ permet de conclure.

3. (a) La famille u est une famille orthormée de V de longueur $p = \dim(V)$. C'est donc une base orthormée de V .
- (b) Soient $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket k+1, p \rrbracket$. On a, par définition de (u_k, u'_k) ,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \langle u_k, u'_k \rangle \geq \left\langle \frac{u_k + tu_\ell}{\|u_k + tu_\ell\|}, u'_k \right\rangle = \left\langle \frac{u_k + tu_\ell}{\sqrt{1+t^2}}, u'_k \right\rangle.$$

Donc $g : t \mapsto \left\langle \frac{u_k + tu_\ell}{\|u_k + tu_\ell\|}, u'_k \right\rangle$ admet un maximum en 0. Or, par les théorèmes usuels, cette application est dérivable et $g'(t) = \left\langle \frac{u_\ell}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{t}{(1+t^2)^{3/2}}(u_k + tu_\ell), u'_k \right\rangle$. En particulier, $g'(0) = \langle u_\ell, u'_k \rangle$, d'où $\langle u_\ell, u'_k \rangle = 0$.

- (c) Ce qui précède montre que, pour $k \neq \ell$, u_k et u_ℓ ainsi que u_k et u'_ℓ sont orthogonaux. Donc $u_{k+1} \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_k)^\perp \cap \text{Vect}(u'_1, \dots, u'_k)^\perp = (\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) + \text{Vect}(u'_1, \dots, u'_k))^\perp$.

(d) On n'a pas vraiment besoin de **c**. Étant donnés $k \neq \ell$, u_k et u'_k sont orthogonaux à u_ℓ et u'_ℓ . Donc, par bilinéarité du produit scalaire, $\text{Vect}(u_k, u'_k)$ est orthogonal à $\text{Vect}(u_\ell, u'_\ell)$.

4. (a) Soit $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$. On a

$$(u_k, -u'_k) \in \{(a, a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1, \langle a, u_\ell \rangle = \langle a', u_\ell \rangle = 0 \text{ pour tout } \ell \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket\}$$

donc, vue la définition de (u_k, u'_k) , $\langle u_k, -u'_k \rangle \leq \langle u_k, u'_k \rangle$, d'où $\langle u_k, u'_k \rangle \geq 0$.

De même, pour tout $m > k$,

$$(u_m, u'_m) \in \{(a, a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1, \langle a, u_\ell \rangle = \langle a', u_\ell \rangle = 0 \text{ pour tout } \ell \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket\}$$

donc $\langle u_m, u'_m \rangle \leq \langle u_k, u'_k \rangle$. Ainsi $(\langle u_k, u'_k \rangle)_k$ est une suite décroissante de réels de $[0, 1]$. Il existe par conséquent $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_p \leq \pi/2$ tels que $\cos(\theta_k) = \langle u_k, u'_k \rangle$.

(b) On a $\text{Gram}(u, u') = \text{Diag}(\cos(\theta_1), \dots, \cos(\theta_p))$ d'où $\det(\text{Gram}(u, u')) = \prod_{k=1}^p \cos(\theta_k)$.

(c) On a bien sûr $0 \leq \det(\text{Gram}(u, u')) \leq 1$ et $\det(\text{Gram}(u, u')) = 1$ si et seulement si $\theta_1 = \dots = \theta_p = \pi/2$, c'est-à-dire $u_k = u'_k$ pour tout k , ce qui équivaut à $V = V'$ puisque u et u' sont des bases orthonormées de V et V' respectivement.

Partie II

5. (a) Le produit mixte, en tant que déterminant (relatif à la base canonique – où à n'importe quelle base orthonormée de même orientation), est une forme p -linéaire alternée.

(b) L'application g est p -linéaire parce que f est linéaire et que le produit mixte est lui-même p -linéaire. Elle est alternée parce que le produit mixte l'est.

6. (a) Notons, pour $x \in E$, $\langle e, x \rangle$ le vecteur colonne $(\langle e_1, x \rangle, \dots, \langle e_p, x \rangle)^T$. Il dépend linéairement de x et l'on a $\Omega_p(e)(u) = [\langle e, u_1 \rangle, \dots, \langle e, u_p \rangle]$. Par la question précédente, $\Omega_p(e) \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.

(b) On a $\Omega_p(e)(u) = \det(\text{Gram}(e, u)) = \det(\text{Gram}(u, e)^T) = \det(\text{Gram}(u, e)) = \Omega_p(u)(e)$.

(c) Ω_p est à valeurs dans $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ d'après **6a.** et c'est une application p -linéaire alternée d'après **6b.** et **6a.** C'est donc bien un élément de $\mathcal{A}_p(E, \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R}))$.

7. (a) On a, pour tout u , $\text{Gram}(e', u)_{i,j} = \langle e'_i, u_j \rangle = \sum_{k=1}^p M_{i,k} \langle e_k, u_j \rangle = \sum_{k=1}^p M_{i,k} \text{Gram}(e, u)_{k,j}$, donc $\text{Gram}(e', u) = M \text{Gram}(e, u)$ et $\Omega_p(e') = \det(M) \Omega_p(e)$.

(b) Si e est une famille liée, alors $\Omega_p(e) = 0$ puisque Ω_p est alternée.

Supposons e libre et soit e' une base orthonormée de $\text{Vect}(e)$. On a $\Omega_p(e')(e') = 1$, donc $\Omega_p(e') \neq 0$ et, d'après la question précédente, $\Omega_p(e) \neq 0$.

(c) Soit $e' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une famille orthonormée qui engendre un espace contenant $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$.

Soit M la matrice exprimant e relativement à e' : $e_i = \sum_{j=1}^p M_{i,j} e'_j$. On a, par **7a.**,

$$\Omega_p(e)(e) = \det(M) \Omega_p(e')(e) = \det(M) \Omega_p(e')(e') = \det(M)^2 \Omega_p(e')(e') = \det(M)^2 \geq 0.$$

8. (a) On a bien sûr $\text{vol}_p(b) = 1$.

(b) Posons $e_1 = \text{pr}(e_1) + z$, où $z \in \text{Vect}(e_2, \dots, e_p)$. Parce que Ω_p est une application p -linéaire alternée, on a (en notant $(x, e_2, \dots, e_p) = (x, e_2^p)$) :

$$\Omega_p(e) = \Omega_p(\text{pr}(e_1) + z, e_2^p) = \Omega_p(\text{pr}(e_1), e_2^p)$$

De même, puisque $\Omega_p((\text{pr}(e_1), e_2^p))$ est p -linéaire alternée,

$$\Omega_p(e)(e) = \Omega_p((\text{pr}(e_1), e_2^p))(e) = \Omega_p((\text{pr}(e_1), e_2^p))((\text{pr}(e_1), e_2^p)) = \det(\text{Gram}((\text{pr}(e_1), e_2^p), (\text{pr}(e_1), e_2^p))).$$

Comme $\text{pr}(e_1)$ est orthogonal à e_2, \dots, e_p , on a

$$\det(\text{Gram}((\text{pr}(e_1), e_2^p), (\text{pr}(e_1), e_2^p))) = \|\text{pr}(e_1)\|^2 \det(\text{Gram}(e_2^p, e_2^p)).$$

Finalement,

$$\text{vol}_p(e) = \|\text{pr}(e_1)\| \text{vol}_{p-1}(e_2^p)$$

- (c) Montrons-le par récurrence sur p . C'est immédiat si $p = 1$ et si $p \geq 2$, on a, en supposant l'énoncé vrai au rang $p - 1$,

$$\text{vol}_p(e) = \|\text{pr}(e_1)\| \text{vol}_{p-1}(e_2^p) \leq \|\text{pr}(e_1)\| \prod_{i=2}^p \|e_i\| \leq \prod_{i=1}^p \|e_i\|$$

En outre, puisque tous les facteurs ci-dessus sont non nuls, l'égalité a lieu si et seulement si $\|\text{pr}(e_1)\| = \|e_1\|$ et $\text{vol}_{p-1}(e_2^p) = \prod_{i=2}^p \|e_i\|$, donc si et seulement si e est orthogonale.

9. (a) Le calcul fait en **7c**. (en substituant b à e' et en remarquant $M = P_b^e$) montre

$$\text{vol}_p(e) = \sqrt{\Omega_p(e)(e)} = \sqrt{\det(P_b^e)^2 \Omega_p(b)(b)} = |\det(P_b^e)|.$$

- (b) Soient V et V' deux sous-espaces de dimension p contenant respectivement e et e' . Soient u et u' les bases de V et V' construites dans la partie **I**. On a, d'après **7a**, la question précédente et **4c**,

$$\begin{aligned} |\Omega_p(e)(e')| &= |\det(P_u^e) \Omega_p(u)(e')| = |\det(P_u^e) \Omega_p(e')(u)| \\ &= |\det(P_u^e) \det(P_{u'}^{e'}) \Omega_p(u')(u)| = \text{vol}_p(e) \text{vol}_p(e') \Omega_p(u)(u') \\ &\leq \text{vol}_p(e) \text{vol}_p(e'). \end{aligned}$$

Partie III

10. (a) Si $\omega \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ s'annule sur chaque e_β , $\beta \in \mathcal{J}_p$, alors parce que ω est alternée, ω s'annule sur chaque p -uplet $(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$, $i_1, \dots, i_p \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et, par p -linéarité, $\omega = 0$. Il suffit donc, pour montrer l'égalité de deux éléments de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$, de vérifier qu'ils coïncident sur tous les e_β , $\beta \in \mathcal{J}_p$. Or on a, pour tout $\alpha, \beta \in \mathcal{J}_p$, $\Omega_p(e_\alpha)(e_\beta) = \delta_{\alpha, \beta}$ (car si $\alpha \neq \beta$, l'un des indices de α n'apparaît pas dans β et la ligne correspondante de $\text{Gram}(e_\alpha)(e_\beta)$ est nulle; $\delta_{\alpha, \beta}$ est ici le symbole de Kronecker). On en déduit, pour tout $\omega \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$,

$$\forall \beta, \omega(e_\beta) = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_p} \omega(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha)(e_\beta)$$

donc

$$\omega = \sum_{\alpha \in \mathcal{J}_p} \omega(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha).$$

- (b) La question précédente montre que $(\Omega_p(e_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{J}_p}$ est une famille génératrice de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$. En outre, si $\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \Omega_p(e_{\alpha}) = 0$, alors pour tout $\beta \in \mathcal{J}_p$, $\lambda_{\beta} = \left(\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} \Omega_p(e_{\alpha}) \right) (e_{\beta}) = 0$, donc $(\Omega_p(e_{\alpha}))_{\alpha \in \mathcal{J}_p}$ est libre. Ainsi, $(\Omega_p(e_{\alpha}))_{\alpha \in \mathcal{J}_p}$ est une base de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ et le produit scalaire qui fait de cette base une base orthornormée n'est autre $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (qui est donc bien un produit scalaire). Enfin, $\dim(\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})) = \text{Card}(\mathcal{J}_p) = \binom{d}{p}$.

(c) Il y a toujours une isométrie entre deux espaces euclidiens de dimensions égales, ce qui est le cas de E et de $\mathcal{A}_{d-1}(E, \mathbb{R})$: il suffit de considérer une application linéaire qui envoie une base orthonormée de l'un sur une base orthonormée de l'autre. Cette réponse n'est toutefois guère satisfaisante, l'isométrie ainsi obtenue n'ayant pas de signification géométrique. Considérons plutôt l'application $\varphi : E \rightarrow \mathcal{A}_{d-1}(E, \mathbb{R})$ définie par $\varphi(x)(x_1, \dots, x_{p-1}) = \Omega_d(e)(x, x_1, \dots, x_{d-1})$. C'est évidemment une application linéaire et l'on a $\varphi(e_k) = (-1)^{k+1} \Omega_{d-1}(e_1, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_d)$: l'image de la base orthonormée e est une base orthonormée et il s'agit bien d'une isométrie. Notons que si l'on remplace e par une base orthonormée e' , l'application φ' obtenue vérifie $\varphi' = \det_{e'}(e)\varphi = \pm\varphi$. Cette application φ ne dépend donc du choix de e qu'à travers son orientation.

11. On a, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathcal{F}_p^2$, $\Omega_p(e_\alpha)(e_\beta) = \delta_{\alpha, \beta} = \langle \Omega_p(e_\alpha), \Omega_p(e_\beta) \rangle$. Par bilinéarité et compte tenu du caractère deux fois p -alterné de $(u, v) \mapsto \Omega_p(u)(v)$, il vient $\Omega_p(u)(v) = \langle \Omega_p(u), \Omega_p(v) \rangle$ pour tout $u, v \in E^p$.

12. Notons (\cdot, \cdot) le produit scalaire sur $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ associé à une autre base orthonormée e' . On a d'après **11.**,

$$\forall (u, v) \in E^{p^2}, \langle \Omega_p(u), \Omega_p(v) \rangle = \Omega_p(u)(v) = (\Omega_p(u) | \Omega_p(v)).$$

Or, par **10a.**, la famille $(\Omega_p(u))_{u \in E^p}$ engendre $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$. Il vient, par bilinéarité,

$$\forall \omega, \omega' \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R}), \langle \omega, \omega' \rangle = (\omega | \omega').$$

Partie IV

13. (a) Si $\text{Vect}(e) = \text{Vect}(e')$, **7a.** montre que $\Omega_p(e)$ et $\Omega_p(e')$ sont colinéaires.

Supposons réciproquement que $\Omega_p(e)$ et $\Omega_p(e')$ soient colinéaires. Choisissons des bases u et u' de $V = \text{Vect}(e)$ et $V' = \text{Vect}(e')$ construites comme dans la partie I. Par **7a.**, $\Omega_p(e)$ et $\Omega_p(u)$ sont colinéaires, ainsi que $\Omega_p(e')$ et $\Omega_p(u')$. Donc $\Omega_p(u)$ et $\Omega_p(u')$ le sont : $\Omega_p(u) = \lambda \Omega_p(u')$ (car, bien sûr, $\Omega_p(u') \neq 0$). On a

$$\lambda = \Omega_p(u)(u') = \det(\text{Gram}(u, u'))$$

donc, d'après **4a.**, $0 \leq \lambda \leq 1$. On a aussi

$$1 = \Omega_p(u)(u) = \lambda \Omega_p(u')(u) = \lambda \Omega_p(u)(u') = \lambda \det(\text{Gram}(u, u')) = \lambda^2.$$

Donc $\lambda = 1$ et, d'après **4a.**, $V = V'$.

(b) Soient $e, e' \in C$. On a, d'après **7a.**, $\Omega_p(e') = \lambda \Omega_p(e)$, où $\lambda = \det(P_e^{e'}) > 0$. Il vient

$$\text{vol}_p(e')^2 = \Omega_p(e')(e') = \lambda \Omega_p(e)(e') = \lambda \Omega_p(e')(e) = \lambda^2 \Omega_p(e)(e) = \lambda^2 \text{vol}_p(e)^2.$$

Ainsi, $\lambda = \frac{\text{vol}_p(e')}{\text{vol}_p(e)}$, puis

$$\frac{1}{\text{vol}_p(e)} \Omega_p(e) = \frac{1}{\text{vol}_p(e')} \Omega_p(e').$$

Ceci atteste de l'existence de $\Psi(V, C) \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ tel que pour tout $e \in C$, $\Omega_p(e) = \text{vol}_p(e)\Psi(V, C)$ et l'unicité est évidente.

14. (a) Soit $(V, C) \in \widetilde{\text{Gr}}(p, E)$ et $e \in C$. On a, par **11.**, $\|\Psi(V, C)\|^2 = \left\| \frac{1}{\text{vol}_p(e)^2} \Omega_p(e) \right\|^2 = \frac{1}{\text{vol}_p(e)^2} \Omega_p(e)(e) = 1$. Donc $\Psi(V, C)$ appartient à la sphère unité de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.

Soient maintenant (V, C) et $(V', C') \in \widetilde{\text{Gr}}(p, E)$ tels que $\Psi(V, C) = \Psi(V', C')$. Soient $e \in C$ et $e' \in C'$.

On a $\frac{1}{\text{vol}_p(e)} \Omega_p(e) = \frac{1}{\text{vol}_p(e')} \Omega_p(e')$. D'après **13a.**, $V = V'$. En outre, puisque $\Omega_p(e') = \det(P_e^{e'}) \Omega_p(e)$,

on a $\det(P_e^{e'}) = \frac{\text{vol}_p(e')}{\text{vol}_p(e)} > 0$ donc $C = C'$.

(b) Il suffit, puisque $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$ est une partie bornée de l'espace euclidien $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$, de prouver que c'en est aussi une partie fermée. Soit $(\omega_n) \in \Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))^{\mathbb{N}}$ et $\omega \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ telles que $\omega_n \rightarrow \omega$. Il existe une suite (e_n) de familles orthonormées de longueur p telle que $\omega_n = \Psi(\text{Vect}(e_n), C_n) = \Omega_p(e_n)$, où C_n désigne l'orientation de $\text{Vect}(e_n)$ définie par e_n . Par une succession d'extraction, on montre facilement que l'ensemble des familles orthonormées de longueur p est une partie compacte de E^p . Donc il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et e , famille orthonormée de longueur p , telles que $e_{\varphi(n)} \rightarrow e$. Par continuité de Ω_p (évidente : c'est une application multilinéaire définie sur un produit d'espaces de dimension finie), on a $\omega = \Omega_p(e) = \Psi(V, C)$, où $V = \text{Vect}(e)$, et C est l'orientation de V définie par e . On a bien montré que $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$ est une partie fermée de $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$.

15. Comme $\widetilde{\text{Gr}}(d, E)$ est une paire, son image par Ψ aussi et n'est donc pas connexe par arcs.

Soit $p \in \llbracket 1, d-1 \rrbracket$. Soient V et V' deux sous-espaces de dimension p de E et u, u' les bases construites dans la partie I dont on reprend les notations. Soient C et C' les orientations de V et V' définies par u et u' . Posons, pour $t \in [0, 1]$, $v_k(t) = (1-t)u_k + tu'_k$. On a, $\langle u_k + u'_k, v_k(t) \rangle = 1 + \cos(\theta_k) > 0$ donc $v_k(t) \neq 0$. En outre, $v_k(t) \in W_k$. Comme les W_k sont deux à deux orthogonaux, $v(t) = \left(\frac{v_1(t)}{\|v_1(t)\|}, \dots, \frac{v_p(t)}{\|v_p(t)\|} \right)$ est une famille orthonormée. En posant $V(t) = \text{Vect}(v_1(t), \dots, v_p(t))$ et en notant $C(t)$ l'orientation de $V(t)$ définie par $v(t)$, l'application $t \mapsto \Omega_p(v(t))$ est un chemin continu de $\Psi(V, C)$ à $\Psi(V', C')$, à valeurs dans $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$ puisque $\Omega_p(v(t)) = \Psi(V(t), C(t))$.

Pour conclure, il suffit de montrer qu'étant donné V de dimension p et ses deux orientations C_1 et C_2 , $\Psi(V, C_1)$ et $\Psi(V, C_2)$ appartiennent à la même composante connexe par arcs de $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$. Soit $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base orthonormée de V . Les deux orientations C_1 et C_2 sont respectivement définies par e et par $(e_1, \dots, e_{p-1}, -e_p)$. Puisque $p \leq d-1$, il est loisible de choisir un vecteur normé $f \in V^\perp$. Posons alors pour tout $\theta \in [0, \pi]$, $f_p(\theta) = \cos(\theta)e_p + \sin(\theta)f$. La famille $(e_1, \dots, e_{p-1}, f_p(\theta))$ est orthonormée. Posons $V(\theta) = (e_1, \dots, e_{p-1}, f_p(\theta))$ et notons $C(\theta)$ l'orientation de $V(\theta)$ définie par $(e_1, \dots, e_{p-1}, f_p(\theta))$. L'application $\theta \mapsto \Psi(V(\theta), C(\theta)) = \Omega_p(e_1, \dots, e_{p-1}, f_p(\theta))$, définie sur $[0, \pi]$, est un chemin continu tracé sur $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$ qui joint $\Psi(V, C_1)$ à $\Psi(V, C_2)$.

Remarque : l'application Ψ induit une bijection de $\widetilde{\text{Gr}}(p, E)$ dans $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$. Il est naturel d'équiper $\widetilde{\text{Gr}}(p, E)$ de la topologie¹ qui fait de cette bijection un homéomorphisme. On a montré que, si $p \leq d-1$, $\widetilde{\text{Gr}}(p, E)$ est pour cette topologie un compact connexe par arcs.

1. Il s'agit ici d'une topologie au sens « topologie générale ». On peut aussi, si l'on préfère, munir $\widetilde{\text{Gr}}(p, E)$ de la distance qui fait de cette bijection une isométrie.