

## I Résultats préliminaires

### I.A - Distance de A à $A_s$

- I.A.1)** L'application  $\psi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto M^\top$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  vérifiant  $\psi^2 = \text{Id}_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$   
 Il s'agit donc d'une symétrie or  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = E_1(\psi)$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = E_{-1}(\psi)$  donc  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$   
 De plus soit  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ,  
 avec les propriétés de la trace et par caractère symétrique du produit scalaire, on a :

$$\text{tr}(S^\top A) = \text{tr}(SA) = \text{tr}(AS) = \text{tr}(-A^\top S) = -\text{tr}(A^\top S) = -\text{tr}(S^\top A)$$

donc  $\text{tr}(S^\top A) = 0$  et ainsi  $S \perp A$

d'où  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires orthogonaux

En notant pour  $1 \leq i, j \leq n$ ,  $E_{i,j}$  la matrice dont tous les coefficients valent 0 sauf celui situé à la ligne  $i$  et colonne  $j$  qui vaut 1.

la famille  $(E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$  est une base (libre et génératrice) de  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  constituée de  $\frac{n(n+1)}{2}$  vecteurs de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui est de dimension  $n^2$

d'où  $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$  et  $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$

- I.A.2)** On a  $A = A_s + A_a$  où  $(A_s, A_a) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

donc  $A_s$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur le sous espace de dimension finie  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Par caractérisation métrique du projeté orthogonal sur un sous espace de dimension finie, on a

pour toute matrice  $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ ,  $\|A - A_s\|_2 \leq \|A - S\|_2$ , avec égalité si et seulement si  $S = A_s$

### I.B - Valeurs propres de $A_s$

- I.B.1)**  $\Rightarrow$  (cas positif) On suppose  $A_s \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ .

On munit  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  de son produit scalaire usuel :  $(X, Y) \mapsto (X | Y) = X^\top Y$  et on note  $\|\cdot\|$  la norme euclidienne associée.

Selon le théorème spectral,  $A_s$  est diagonalisable dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et ses sous espace propres sont deux à deux orthogonaux

On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les valeurs propres de  $A$  (éléments de  $\mathbb{R}^+$ ) et on a  $\overset{\perp}{\bigoplus}_{1 \leq i \leq r} E_{\lambda_i}(A_s) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ . On peut écrire  $X = \sum_{i=1}^r X_i$  où  $X_i \in E_{\lambda_i}(A_s)$

On a a donc

$$X^\top A_s X = (X | A_s X) = \left( \sum_{i=1}^r X_i \mid \sum_{j=1}^r A_s X_j \right) = \left( \sum_{i=1}^r X_i \mid \sum_{j=1}^r \lambda_j X_j \right) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r \lambda_j (X_i | X_j) = \sum_{i=1}^r \lambda_i \|X_i\|^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$  (cas strictement positif) On suppose  $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

On utilise les notations précédentes pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

Il existe donc  $j \in \llbracket 1, r \rrbracket$  tel que  $X_j \neq 0$  et donc  $\lambda_j \|X_j\|^2 > 0$  car  $\lambda_j > 0$

ainsi  $X^\top A_s X = \sum_{i=1}^r \lambda_i \|X_i\|^2 > 0$

$\Leftrightarrow$  (cas positif) On suppose que  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A_s X \geq 0$

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A_s$ . On considère  $X$  un vecteur colonne propre de  $A_s$  associé à  $\lambda$ .

On a  $X^T A_s X = X^T (\lambda X) = \lambda X^T X = \lambda \|X\|^2$

ainsi  $\lambda \|X\|^2 \geq 0$  or  $\|X\|^2 > 0$  car  $X \neq 0$

donc  $\lambda \geq 0$

$\Leftrightarrow$  (cas strictement positif) On suppose que  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T A_s X > 0$

En reprenant ce qui précède, on obtient  $\lambda \|X\|^2 > 0$  où  $X \neq 0$

et donc  $\lambda > 0$

Conclusion : On a montré

$A_s \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  si et seulement si  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T A_s X \geq 0$  et

$A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  si et seulement si  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, X^T A_s X > 0$

**I.B.2)** On note  $\min \text{sp}_{\mathbb{R}}(A_s) = \mu_1 < \dots < \mu_r = \max \text{sp}_{\mathbb{R}}(A_s)$  les valeurs propres ordonnées de  $A_s$

Soit  $\lambda \in \text{sp}_{\mathbb{R}}(A)$  et  $X$  un vecteur propre de  $A$  associé à  $\lambda$

On peut écrire  $X = \sum_{i=1}^r X_i$  où  $X_i \in E_{\mu_i}(A_s)$  selon le théorème spectral

D'un coté, on a  $X^T A X = \lambda \|X\|^2$  et d'un autre côté  $X^T A X = X^T A_s X + X^T A_a X$

de plus  $X^T A_a X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ , donc  $X^T A_a X = (X^T A_a X)^T = X^T A_a^T (X^T)^T = -X^T A_a X$  d'où  $X^T A_a X = 0$

cela donne :  $X^T A X = X^T A_s X = \sum_{i=1}^r \mu_i \|X_i\|^2$  comme à la question précédente

d'où  $\mu_1 \sum_{i=1}^r \|X_i\|^2 \leq X^T A X \leq \mu_r \sum_{i=1}^r \|X_i\|^2$  car  $\|X_i\|^2 \geq 0$  pour tout  $i$

or selon le théorème de Pythagore :  $\|X\|^2 = \sum_{i=1}^r \|X_i\|^2$  car  $\bigoplus_{1 \leq i \leq r} E_{\lambda_i}(A_s) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

d'où  $\mu_1 \|X\|^2 \leq \lambda \|X\|^2 \leq \mu_r \|X\|^2$

comme  $\|X\|^2 > 0$ , on a bien  $\boxed{\min \text{sp}_{\mathbb{R}}(A_s) \leq \lambda \leq \max \text{sp}_{\mathbb{R}}(A_s)}$ .

On suppose  $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ , alors  $0 < \min \text{sp}_{\mathbb{R}}(A_s)$

ainsi on a  $\text{sp}_{\mathbb{R}}(A) \subset ]0, +\infty[$

donc  $\text{Ker } A = E_0(A) = \{0\}$

d'où  $\boxed{\text{si } A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ alors } A \text{ est inversible}}$

**I.B.3)** a) Existence Je note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeur propres de  $A_s$  comptées avec multiplicité

Le théorème spectral, nous fournit  $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$  tel que  $A_s = \Omega^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Omega$

En prenant  $B = \Omega^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \Omega$

on a  $B^T = \Omega^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^T (\Omega^T)^T = B$  et donc  $B$  est symétrique

de plus les valeurs propres de  $B$  sont strictement positives donc  $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  et

$B^2 = \Omega^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \Omega \Omega^T \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) \Omega = \Omega^T \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Omega = A_s$  car  $\Omega \Omega^T = I_n$

Unicité Soit  $B$  de  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = A_s$

Je note  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  les valeurs propres de  $A_s$  distinctes deux à deux et on a  $\bigoplus_{1 \leq i \leq r} E_{\lambda_i}(A_s) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

On note respectivement  $a$  et  $b$  les endomorphismes canoniquement associés aux matrices  $A_s$  et  $B$

On a  $b^2 = a$  donc  $a$  et  $b$  commutent ainsi les sous espaces propres de  $a$  sont stables par  $b$

Pour  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ , on note  $b_i$  l'endomorphisme induit par  $b$  sur  $E_{\lambda_i}(A_s)$

$b_i$  est un endomorphisme diagonalisable de  $E_{\lambda_i}(A_s)$  car  $b$  l'est sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Soit  $\mu$  une valeur propre de  $b_i$  et  $X \in E_{\lambda_i}(A_s)$  un vecteur propre de  $b_i$  associé à  $\mu$

On a  $\mu > 0$  car  $\text{sp}(b_i) \subset \text{sp}(b)$

De plus  $\lambda_i X = a(X) = b(b(X)) = b(\mu X) = \mu b(X) = \mu^2 X$

donc  $\mu^2 = \lambda_i$  car  $X \neq 0$  ainsi  $\mu = \sqrt{\lambda_i}$  car  $\mu \geq 0$

d'où  $b_i$  est diagonalisable sur  $E_{\lambda_i}(A_s)$  et  $\text{sp}(b_i) \subset \{\sqrt{\lambda_i}\}$

donc la restriction de  $b$  à  $E_{\lambda_i}(A_s)$  est l'homothétie de rapport  $\sqrt{\lambda_i}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$

or  $\bigoplus_{1 \leq i \leq r} (A_s) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  d'où l'unicité de l'endomorphisme  $b$  vérifiant cette condition

**Conclusion** il existe une unique matrice  $B$  de  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  telle que  $B^2 = A_s$

b) On écrit alors  $A_s = B^2$  où  $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  ainsi  $A = B^2 + A_a$

D'après I.B.2,  $B$  est alors inversible et  $B^{-1} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  car  $(B^{-1})^\top = (B^\top)^{-1} = B^{-1}$

donc  $A = B(I_n + B^{-1}A_a B^{-1})B$ . Je note alors :  $Q = B^{-1}A_a B^{-1}$ .

De sorte que  $Q^\top = (B^{-1})^\top A_a^\top (B^{-1})^\top = B^{-1}(-A_a)B^{-1} = -Q$  d'où  $Q \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

et  $\det(A) = \det(B) \det(I_n + B^{-1}A_a B^{-1}) \det(B) = \det(B^2) \det(I_n + Q)$

On a montré l'existence d'une matrice  $Q$  de  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  telle que  $\det(A) = \det(A_s) \det(I_n + Q)$

c) Si on note  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A_s$  comptées avec multiplicités

On a  $\det(A_s) = \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0$ .

Il suffit d'établir que  $\det(I_n + Q) \geq 1$  (en utilisant la notation précédente)

Soit  $\mu$  une valeur propre complexe de  $Q$  et  $X$  un vecteur propre associé.

On a  $\bar{X}^\top Q X = \mu \bar{X}^\top X \in \mathcal{M}_1(\mathbb{C})$  qui peut donc être identifié à un complexe

ainsi  $\mu \bar{X}^\top X = (\bar{X}^\top Q X)^\top = -X^\top Q \bar{X} = -\overline{\bar{X}^\top Q X} = -\overline{\mu \bar{X}^\top X}$

or  $\bar{X}^\top X$  peut être identifié à un réel strictement positif car  $X \neq 0$

d'où  $\mu = -\bar{\mu}$  donc  $\mu$  est un imaginaire pur

On note alors  $\chi_{-Q}$  le polynôme caractéristique de  $-Q$  qui est scindé dans  $\mathbb{C}[X]$

On peut alors écrire  $\chi_{-Q} = X^p \prod_{i=1}^s (X - \mu_i)(X + \mu_i)$  où  $n = p + 2s$  les  $\mu_i \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$

car  $\chi_{-Q} \in \mathbb{R}[X]$  n'admet que des racines imaginaires pures

donc  $\det(I_n + Q) = \chi_{-Q}(1) = 1^p \prod_{i=1}^s (1 - \mu_i)(1 + \mu_i) = \prod_{i=1}^s |1 - \mu_i|^2 \geq 1$

On en déduit que  $\det(A) \geq \det(A_s)$

**I.B.4)** On a  $A(A^{-1})_s A^\top = \frac{1}{2}A(A^{-1} + (A^{-1})^\top)A^\top = \frac{1}{2}(A^\top + A) = A_s$

donc  $\det(A_s) = \det(A(A^{-1})_s A^\top) = \det(A) \det((A^{-1})_s) \det(A^\top)$

ainsi  $(\det(A))^2 \det((A^{-1})_s) = \det(A_s)$

## I.C - Partie symétrique des matrices orthogonales

**I.C.1)** Je note  $n_1, n_2$  (dans  $\mathbb{N}$ ) les multiplicités respectives de 1 et  $-1$  dans  $\chi_A$

Le théorème de réduction des matrices orthogonales nous fournit  $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$  et une matrice diagonale par blocs de la formes  $D = \text{diag}(I_{n_1}, -I_{n_2}, R(\theta_1), \dots, R(\theta_q)) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que

$$A = \Omega^\top D \Omega$$

avec  $q \in \mathbb{N}$  tel que  $n_1 + n_2 + 2q = n$  et pour  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ ,  $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$  et  $R(\theta_i) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \end{pmatrix}$

En notant  $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , on a :

$$A = \Omega^\top \text{diag}(I_{n_1}, -I_{n_2}, \cos(\theta_1)I_2, \dots, \cos(\theta_q)I_2)\Omega + \Omega^\top \text{diag}(0I_{n_1}, 0I_{n_2}, \sin(\theta_1)J, \dots, \sin(\theta_q)J)\Omega$$

donc  $A$  est la somme de la matrice antisymétrique :  $\Omega^\top \text{diag}(0I_{n_1}, 0I_{n_2}, \sin(\theta_1)J, \dots, \sin(\theta_q)J)\Omega$

et de la matrice symétrique  $\Omega^\top \text{diag}(I_{n_1}, -I_{n_2}, \cos(\theta_1)I_2, \dots, \cos(\theta_q)I_2)\Omega$  qui est une forme diagonalisée de  $A_s$

donc les valeurs propres de  $A_s$  comptées avec multiplicité sont :  $1, \dots, 1, -1, \dots, -1, \cos(\theta_1), \dots, \cos(\theta_q)$

ainsi les valeurs propres de  $A_s$  sont dans  $[-1, 1]$

*Plus simple* : On peut remarquer que  $A^\top = A^{-1} \in O(2)$

et pour  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  et  $X \in E_\lambda(A_s)$ , on a

$$|\lambda| \cdot \|X\|_2 = \|A_s X\|_2 = \frac{1}{2} \|(A + A^\top)X\|_2 \leq \frac{1}{2} \|AX\|_2 + \frac{1}{2} \|A^\top X\|_2 = \|X\|_2$$

**I.C.2)** Je prends  $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Pour  $A \in \text{SO}_2(\mathbb{R})$ , alors  $A_s \in \text{Vect}(I_2)$

et pour  $A \in O_2(\mathbb{R}) \setminus \text{SO}_2(\mathbb{R})$ , alors  $A \in S_n(\mathbb{R})$  mais  $S \notin O(2)$

donc on a  $S \in \mathcal{S}_2(\mathbb{R})$  telle que  $\text{sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset [-1, 1]$  mais n'existe pas de matrice  $A \in O_2(\mathbb{R})$  vérifiant  $A_s = S$

**I.C.3)** a) Je note  $n_1, n_2$  (dans  $\mathbb{N}$ ) les multiplicités respectives de 1 et  $-1$  dans  $\chi_S$

Les valeurs propres de  $S$  dans  $] -1, 1[$  sont alors notés :  $c_1, c_1, \dots, c_q, c_q$  où  $2q + n_1 + n_2 = n$  (comptées avec multiplicités)

Le théorème spectral nous fournit  $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ , tel que  $S = \Omega^\top \text{diag}(I_{n_1}, -I_{n_2}, c_1 I_2, \dots, c_q I_2)\Omega$

Je note pour  $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$ ,  $\theta_i = \arccos(c_i)$

et je pose  $A = \Omega^\top \text{diag}(I_{n_1}, -I_{n_2}, R(\theta_1), \dots, R(\theta_q))\Omega$

de sorte que  $A \in O_n(\mathbb{R})$  et  $A_s = S$

b) Réciproquement on suppose qu'il existe  $A \in O_n(\mathbb{R})$  telle que  $A_s = S$ ,

En reprenant les notations de I.C.1, on a :  $S = \Omega^\top \text{diag}(I_{n_1}, -I_{n_2}, \cos(\theta_1)I_2, \dots, \cos(\theta_q)I_2)\Omega$  où les  $\theta_i \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$

les valeurs propres de  $S$  distinctes de 1 et  $-1$ , comptées avec multiplicités sont donc :

$\cos(\theta_1), \cos(\theta_1), \dots, \cos(\theta_q), \cos(\theta_q)$

alors  $\text{sp}_{\mathbb{R}}(S) \subset [-1, 1]$  et

pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $S$  dans  $] -1, 1[$ , l'espace propre de  $S$  associé à  $\lambda$  est de dimension paire

## II Matrices $F$ -singulières

### II.A - Cas où $F$ est un hyperplan

**II.A.1)** Soit  $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On a  $K$  est  $E_n$ -singulière si et seulement si il existe  $X \in E_n$  non nul tel que  $\forall Z \in E_n, Z^\top KX = 0$

or

$$\forall Z \in E_n, Z^\top KX = 0 \Leftrightarrow KX \in E_n^\perp \Leftrightarrow KX = 0$$

d'où  $K$  est  $E_n$ -singulière équivaut  $\text{Ker } K \neq 0$  ce qui équivaut à  $K$  non inversible

ainsi une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est singulière si et seulement si elle est  $E_n$ -singulière

**II.A.2)**  $H^\perp = \text{Vect}(N)$  est une droite vectorielle car  $H$  est un hyperplan

Pour  $X \in H$ , on a :  $\forall Z \in H, Z^\top AX = 0 \Leftrightarrow AX \in \text{Vect}(N) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, AX = \lambda N$

Ainsi  $A$  est  $H$ -singulière si et seulement s'il existe un vecteur non nul  $X$  de  $H$  et un réel  $\lambda$  tels que  $AX = \lambda N$

**II.A.3)**  $\Rightarrow$  : On suppose que  $A$  est  $H$ -singulière.

La question précédente nous fournit un vecteur non nul  $X$  de  $H$  et un réel  $\lambda$  tels que  $AX = \lambda N$

On considère  $Y = \begin{pmatrix} X \\ -\lambda \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$

On a  $A_N Y = (AX - \lambda N \quad N^\top X - 0)$

Comme  $N \perp X$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a  $A_N Y = 0$

donc  $A_N$  est singulière

$\Leftarrow$  : On suppose que  $A_N$  est singulière.

Ceci nous fournit  $Y = \begin{pmatrix} Z \\ \mu \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  tel que  $A_N Y = 0$  avec  $Z \in E_n$  et  $\mu \in \mathbb{R}$ .

On a donc  $AZ + \mu N = 0$  et  $(N \mid Z) = 0$

On a donc  $Z \in H$  et  $AZ = -\mu N$ .

De plus  $Z \neq 0$  car par l'absurde, si on avait  $Z = 0$ ,

on aurait  $\mu N = -AZ = 0$  ainsi  $\mu = 0$  (car  $N \neq 0$ ) et donc on aurait  $Y = 0$  ce qui n'est pas

À l'aide de la question précédente, on a  $A$  est  $H$ -singulière

Conclusion :  $A$  est  $H$ -singulière si et seulement si la matrice  $A_N$  est singulière

**II.A.4)** On prend  $B = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), -A^{-1}N \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), 0 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}), 1 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

et on a bien  $A_N B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^\top A^{-1} & -N^\top A^{-1}N \end{pmatrix}$

**II.A.5)** On utilise la matrice triangulaire par blocs  $B$  de la question précédente

Ainsi on a  $\det(A_N) \det(B) = \det(A_N B) = \det(I_n) \times (-N^\top A^{-1}N)$

De plus  $\det(B) = \det(A^{-1}) \times 1 = \frac{1}{\det(A)}$

On en déduit que  $\det(A_N) = -N^\top A^{-1}N \det(A)$

**II.A.6)** On suppose que  $\det((A^{-1})_s) = 0$

**Méthode 1 (imprévue)** Ceci nous donne  $\det(A_s) = 0$  à l'aide de l'égalité de I.B.4

Prenons  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$  tel que  $A_s X = 0$

Je note  $N' = AX$

on remarque que  $(X \mid N') = (X \mid A_s X) + (X \mid A_a X) = 0 + X^\top A_a X = 0$  (en transposant comme I.B.2)

d'où  $N' \perp X$

Si  $N' = 0$ , je considère  $H$  un hyperplan contenant  $X$  et  $N$  un vecteur unitaire normal à  $H$  et on a  $AX = 0N$

Si  $N' \neq 0$ , je considère  $N = \frac{1}{\|N'\|_2} N'$  et l'hyperplan  $H = \{N\}^\perp$

de sorte que  $X \in H$  et il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $AX = \lambda N$  (dans les deux cas)

On conclut avec II.A.2

**Méthode 2 (sans doute prévue par l'énoncé)**

Je prends  $N \in \text{Ker}((A^{-1})_s)$  unitaire et l'hyperplan  $H = \{N\}^\perp$

On a  $-N^\top A^{-1}N = -N^\top ((A^{-1})_s) N - N^\top ((A^{-1})_a) N = 0 + 0 = 0$  (comme en IB2)

donc avec II.A.5, on a  $\det(A_N) = 0$  ainsi d'après II.A.3,  $A$  est  $H$ -singulière

si  $\det((A^{-1})_s) = 0$ , alors il existe un hyperplan  $H$  de  $E_n$  tel que  $A$  est  $H$ -singulière

**II.A.7)** On suppose  $\det(A_s) = 0$  et on a  $\det(A) \neq 0$ , la matrice  $A$  étant supposée inversible

Donc  $\det((A^{-1})_s) = 0$  d'après I.B.4, ce qui permet de conclure :

si  $\det(A_s) = 0$ , alors il existe un hyperplan  $H$  de  $E_n$  tel que  $A$  est  $H$ -singulière

**II.A.8)** Par l'absurde, on suppose qu'il existe un hyperplan  $H$  pour lequel  $A$  soit  $H$ -singulière

donc ceci nous  $X \in H$  non nul tel que  $AX \in H^\perp$

$$\text{donc } 0 = (X | AX) = X^\top AX = X^\top A_s X + X^\top A_a X = X^\top A_s X$$

donc  $0 > 0$  d'après I.B.1, ce qui n'est pas

Si on suppose que  $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  alors  $A$  est  $H$ -régulière pour tout hyperplan  $H$  de  $E_n$

## II.B - Exemple

**II.B.1)** On effectue l'opération élémentaire  $C_2 \leftarrow C_2 + C_3 + C_1$  puis

$$\text{Ainsi } \det(A) = \begin{vmatrix} 2-\mu & 1 & \mu \\ -1 & 0 & \mu-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

ainsi  $A(\mu)$  est inversible pour tout réel  $\mu$  (faisable à la calculatrice formelle)

**II.B.2)** On a  $A(\mu)_s = \begin{pmatrix} 2-\mu & -1 & \mu/2 \\ -1 & 2-\mu & -1+\mu/2 \\ \mu/2 & -1+\mu/2 & 1 \end{pmatrix}$

On effectue les opérations élémentaires  $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$  puis linéarité et  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\text{ainsi } \det(A(\mu)_s) = (1-\mu) \begin{vmatrix} 1 & -1 & \mu/2 \\ 1 & 2-\mu & -1+\mu/2 \\ -1 & -1+\mu/2 & 1 \end{vmatrix} = (1-\mu) \begin{vmatrix} 1 & -1 & \mu/2 \\ 0 & 3-\mu & -1 \\ 0 & -2+\mu/2 & 1+\mu/2 \end{vmatrix}$$

$$\text{donc } \det(A(\mu)_s) = (1-\mu) [(3-\mu)(1+\mu/2) + (-2+\mu/2)] = \frac{1}{2}(1-\mu)(-\mu^2 + 3\mu - 2\mu + 6 - 4 + \mu)$$

$$\text{donc } \det(A(\mu)_s) = \frac{1}{2}(1-\mu)(-\mu^2 + 2\mu + 2)$$

$$\text{On a } 1 - \sqrt{3} + 1 + \sqrt{3} = 2 \text{ et } (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2$$

$$\text{donc } \det(A(\mu)_s) = \frac{1}{2}(\mu - 1)(\mu - (1 - \sqrt{3}))(\mu - (1 + \sqrt{3}))$$

Ainsi pour  $\mu = 1, 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}$ ,  $A(\mu)_s$  est singulière

**II.B.3)** On utilise 6, puis 5, pour trouver  $N$  puis  $H$

$$\text{On a } A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; A(1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ (calculatrice) donc } (A(1)^{-1})_s = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On prend le vecteur unitaire  $N = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A(1)^{-1})_s$  et  $H = \{N\}^\perp$  le plan d'équation  $x_3 = 0$

$$\text{Je prends } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ non nul dans } H \text{ et on a } A(1)X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)N$$

Donc d'après II.A.2, l'hyperplan  $H$  d'équation  $x_3 = 0$  est tel que  $A(1)$  soit  $H$ -singulière

## II.C - Cas où $F$ est de dimension $n - 2$

**II.C.1)**  $A$  est  $F$ -singulière si et seulement si il existe  $X \in F$  non nul tel que  $\forall Z \in F, Z^T AX = 0$   
ce qui équivaut à il existe  $X \in F$  non nul tel que  $AX \in F^\perp$

Comme  $F = \text{Vect}(N_1, N_2)$ , on a  $A$  est  $F$ -singulière

si et seulement s'il existe un élément non nul  $X$  de  $F$  et deux réels  $\lambda_1, \lambda_2$  tels que  $AX = \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2$

**II.C.2)**  $\Rightarrow$  On suppose que  $A$  est  $F$ -singulière

En utilisant les notations de la question précédente, on pose  $Z = \begin{pmatrix} X \\ -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+2,1}(\mathbb{R})$ ,

on a  $Z \neq 0$  et  $A_N Z = 0$  par un calcul analogue à II.A.3

$\Leftarrow$  On suppose  $A_N$  singulière.

Ceci nous fournit  $W = \begin{pmatrix} Y \\ -\mu_1 \\ -\mu_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+2,1}(\mathbb{R}) \in \text{Ker}(A_N)$  non nul où  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  et  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$

On a alors  $Y \in F = \{N_1, N_2\}^\perp$  et  $AY = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2$  analogue à II.A.3

de plus  $Y$  est non nul car par l'absurde si on avait  $Y = 0$ , on aurait  $AY = \mu_1 N_1 + \mu_2 N_2 = 0$

donc  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  car  $(N_1, N_2)$  libre

donc  $W = 0$  Absurde

**Conclusion**  $A$  est  $F$ -singulière si et seulement si la matrice  $A_N$  est singulière

**II.C.3)** On prend  $B = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}N \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}$  avec  $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), -A^{-1}N \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R}), 0 \in \mathcal{M}_{2,n}(\mathbb{R}), I_2 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

et on a bien  $A_N B = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ N^T A^{-1} & -N^T A^{-1} N \end{pmatrix}$

**II.C.4)** Comme en II.A.5, on a  $\det(A_N) = \det(N^T A^{-1} N) \det(A)$

**II.C.5)** Soit  $P \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$ . On a  $P^T A^{-1} P = (A^{-1} P)^T A^T (A^{-1} P) = \left[ (A^{-1} P)^T A (A^{-1} P) \right]^T$

donc  $\det(P^T A^{-1} P) = \det\left( (A^{-1} P)^T A (A^{-1} P) \right)$

La multiplication par une matrice inversible ne change pas le rang ;

Pour obtenir l'équivalence on prend  $P' = A^{-1} P$  dans un sens et  $P = AP'$  pour la réciproque :

il existe  $P \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$  telle que  $\det(P^T A^{-1} P) = 0$  si et seulement s'il existe  $P' \in \mathcal{G}_{n,2}(\mathbb{R})$  telle que  $\det(P'^T AP') = 0$

**II.C.6)** On remarque pour  $X \in E_n$ , on a  $X^T A_a X = 0$  et  $X^T A_s X = X^T A X$

donc  $\det(N'^T A N') = \begin{vmatrix} N_1'^T A_s N_1' & N_1'^T A N_2' \\ N_2'^T A N_1' & N_2'^T A_s N_2' \end{vmatrix}$

or  $N_1'^T A N_2' = N_1'^T A_s N_2' + N_1'^T A_a N_2'$  et  $N_2'^T A N_1' = N_2'^T A_s N_1' + N_2'^T A_a N_1'$

donc en transposant des scalaires :  $N_2'^T A N_1' = N_1'^T A_s N_2' - N_1'^T A_a N_2'$

donc  $\det(N'^T A N') = (N_1'^T A_s N_1') (N_2'^T A_s N_2') - (N_1'^T A_s N_2' + N_1'^T A_a N_2') (N_1'^T A_s N_2' - N_1'^T A_a N_2')$

d'où  $\det(N'^T A N') = (N_1'^T A_s N_1') (N_2'^T A_s N_2') - (N_1'^T A_s N_2')^2 + (N_1'^T A_a N_2')^2$

**II.C.7)** On remarque facilement que l'application  $(X, Y) \in E_n^2 \mapsto X^T A_s Y \in \mathbb{R}$  est un produit scalaire ; c'est facilement une forme bilinéaire symétrique et la propriété "définie positive" est établie en I.B.1.

On note  $N_1' = A^{-1} N_1$  et  $N_2' = A^{-1} N_2$  non colinéaires car  $(N_1, N_2)$  libre et  $A^{-1}$  inversible

On applique alors l'inégalité de Cauchy-Schwarz (avec cas de non égalité) aux vecteurs  $N'_1$  et  $N'_2$  de  $E_n$  non colinéaires, ce qui donne  $(N_1^{\top} A_s N'_1)(N_2^{\top} A_s N'_2) > (N_1^{\top} A_s N'_2)^2$

donc  $\det(N^{\top} A N') > 0$  en utilisant la question précédente.

À l'aide du calcul fait en II.C.5, on a  $\det(N^{\top} A^{-1} N) = \det(N^{\top} A N')$

Ainsi  $\boxed{\text{si } A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \text{ alors } \det(N^{\top} A^{-1} N) > 0}$

**II.C.8)** On suppose  $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ . Soit un sous-espace vectoriel  $F$  de dimension  $n - 2$  de  $E_n$ .

Alors pour tout base  $(N_1, N_2)$  de  $F$ , on a  $\det(N^{\top} A^{-1} N) \neq 0$  où  $N = (N_1 \ N_2) \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$

De plus  $\det(A) \neq 0$  car  $A$  inversible

d'où  $\det(A_N) \neq 0$  en utilisant  $\det(A_N) = \det(N^{\top} A^{-1} N) \det(A)$  voir II.C.4

Ainsi  $A_N$  est régulière, donc  $A$  n'est pas  $F$ -singulière d'après II.C.2

Ainsi  $\boxed{\text{si } A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}), \text{ alors } A \text{ est } F\text{-régulière pour tout sous-espace vectoriel } F \text{ de dimension } n - 2 \text{ de } E_n}$

## II.D - Exemple

**II.D.1)** D'après II.C.6, pour  $N' = (N'_1 \ N'_2)$ , on a :  $\det(N^{\top} A N') = (N_1^{\top} A_s N'_1)(N_2^{\top} A_s N'_2) - (N_1^{\top} A_s N'_2)^2 + (N_1^{\top} A_a N'_2)^2$

Si on trouve  $N'_2 \in \text{Ker}(A_s)$  non nul et  $N'_1 \in \{A_a N'_2\}^{\perp} \setminus \text{Vect}(N'_2)$

On aura  $N' = (N'_1 \ N'_2) \in \mathcal{G}_{n,2}$  tel que  $\det(N^{\top} A N') = 0$

On a  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_s = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ -1 & 1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $A_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Je choisis alors  $N'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  alors  $A_a N'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  et je peux prendre  $N'_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{En choisissant } N' = (N'_1 \ N'_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ on aura : } \det(N^{\top} A N') = 0}$

Je vérifie (car j'ai le temps) :  $N^{\top} A N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  qui est bien de déterminant nul.

**II.D.2)** En utilisant la méthode de II.C.5, on a  $\det(N^{\top} A^{-1} N) = 0$

en ayant posé  $(N_1 \ N_2) = N = A N' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,

Je cherche une base de  $F = \text{Vect}(N_1, N_2)^{\perp}$ .

On obtient  $\boxed{\text{pour } F = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), A(1) \text{ est } F\text{-singulière.}}$

On a bien  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \cdot N_1 + (-1) \cdot N_2 \in \text{Vect}(N_1, N_2)$  (II.C.1)

## II.E - Cas général

II.E.1) On prend  $(N_1, \dots, N_p)$  une base de  $F^\perp$

On définit  $N = (N_1 \cdots N_p) \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $N' = A^{-1}N \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$  car  $A^{-1}$  inversible

On pose  $A_N \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$  comme en II.C.2

On montre que  $A$  est  $F$ -singulière si et seulement si  $A_N$  est singulière

Comme  $A$  est inversible alors on pose  $N' = A^{-1}N$  on a  $\det(A_N) = \det(N'^T A N') \det(A)$

Ainsi dans ce cas, si  $\det(N'^T A N') = 0$  alors  $A$  est  $F$ -singulière

II.E.2) On a  $N'X \in E_n$  et  $X^T N'^T A N' X = (N'X)^T A (N'X) = (N'X)^T A_s (N'X)$

Comme  $N' \in \mathcal{G}_{n,p}(\mathbb{R})$  et  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  non nul

alors  $N'X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  non nul car  $\text{Ker } N' = \{0\}$  par la formule du rang

si  $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$  est non nul alors  $X^T N'^T A N' X > 0$  car  $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

II.E.3) Je note  $A' = N'^T A N'$ . On vient de voir que :  $\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ,  $X^T A'_s X = X^T A' X > 0$

On déduit que les valeurs propres réelles de  $A' = N'^T A N'$  sont strictement positives avec I.B.1 et I.B.2

II.E.4) Soit  $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  a son polynôme caractéristique  $\chi_M$  scindé dans  $\mathbb{C}[X]$  d'après d'Alembert-Gauss.

Ainsi  $M$  est trigonalisable dans  $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$  et les valeurs propres complexes non réelles sont conjugués deux à deux avec même multiplicité.

On peut donc écrire  $\chi_M(X) = \prod_{i=1}^r (X - \mu_i) \prod_{i=1}^s (X - \lambda_i)(X - \bar{\lambda}_i)$  où  $p = r + 2s$ , les  $\mu_i \in \mathbb{R}$  et les  $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ .

Ainsi  $\det(M) = \left( \prod_{i=1}^r \mu_i \right) \left( \prod_{i=1}^s \lambda_i \bar{\lambda}_i \right) = \left( \prod_{i=1}^r \mu_i \right) \left( \prod_{i=1}^s |\lambda_i|^2 \right)$  et  $\prod_{i=1}^s |\lambda_i|^2 > 0$

En appliquant ceci à  $M = N'^T A N'$ , on a  $\left( \prod_{i=1}^r \mu_i \right) > 0$  d'après II.E.3 d'où  $\det(N'^T A N') > 0$

II.E.5) En utilisant II.E.1 car  $\det(N'^T A N') \neq 0$  on a  $A$  est  $F$ -régulière pour tout sous-espace vectoriel  $F \neq \{0\}$  de  $E_n$

Pour le cas où  $F = E_n$ , on utilise II.A.1 car  $A$  est inversible d'après IB2 car  $A_s \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

## III Matrices positivement stables

## III.A - Exemples

III.A.1) Cas  $\chi_A$  scindé dans  $\mathbb{R}$  : Si  $A$  admet deux valeurs propres réelles éventuellement confondues :  $x_1$  et  $x_2$ ,

alors  $\text{tr}(A) = x_1 + x_2$  et  $\det(A) = x_1 x_2$

On a alors :  $\begin{cases} \text{Re}(x_1) > 0 \\ \text{Re}(x_2) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 > 0 \\ x_2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \det(A) > 0 \\ \text{tr}(A) > 0 \end{cases}$

Cas  $\chi_A$  non scindé dans  $\mathbb{R}$  : Si  $A$  admet deux valeurs propres conjuguées et distinctes :  $z_1$  et  $z_2$ ,

alors  $\text{tr}(A) = z_1 + z_2 = 2 \text{Re}(z_1) = 2 \text{Re}(z_2)$  et  $\det(A) = z_1 z_2 = |z_1|^2 > 0$

On a alors :  $\begin{cases} \text{Re}(z_1) > 0 \\ \text{Re}(z_2) > 0 \end{cases} \iff \text{tr}(A) > 0 \iff \begin{cases} \det(A) > 0 \\ \text{tr}(A) > 0 \end{cases}$

**Conclusion :** Dans tous les cas, on a :

$A$  est positivement stable si et seulement si  $\text{tr}(A) > 0$  et  $\det(A) > 0$ .

III.A.2) a) Je prends  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $A^T$  deux matrices positivement stables de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  mais  $A + A^T$  ne l'est pas

En effet  $\det(A) = \det(A^T) = 1 > 0$  et  $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^T) = 2 > 0$  alors que  $\det(A + A^T) = 0$  (voir III.A.1)

La somme de deux matrices positivement stables de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  n'est pas nécessairement positivement stable.

b) On considère que les matrices  $A, B$  et  $A + B$  sont dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Il suffit d'établir que si  $A$  et  $B$  commutent les valeurs propres de  $A + B$  sont sommes d'une valeur propre de  $A$  et d'une valeur propre de  $B$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$  une valeur propre de  $A + B$ . Les matrices  $A + B$  et  $A$  commutent.

Ainsi  $E_\lambda(A + B)$  est stable par  $a$  qui désigne l'endomorphisme de  $\mathbb{C}^n$  canoniquement associé à  $A$ .

La restriction de  $a$  à  $E_\lambda(A + B)$  admet une valeur propre  $\mu \in \mathbb{C}$  car tout polynôme de  $\mathbb{C}[X]$  est scindé.

Ceci nous fournit  $X \in E_\lambda(A + B) \setminus \{0\}$  tel que  $a(X) = \mu X = AX$  et donc  $BX = (\lambda - \mu)X$  car  $\lambda X = (A + B)X$  d'où  $\lambda$  est somme de  $\mu$  et  $\lambda - \mu$  valeurs propres respectives de  $A$  et  $B$

De plus l'ensemble  $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$  est stable par  $+$  ce qui nous permet d'affirmer que

la somme de deux matrices positivement stables qui commutent est positivement stable

**III.A.3)** a) On suppose que  $X \neq 0$ .

On a  $\bar{X}^\top AX = (Y - iZ)^\top A(Y + iZ) = Y^\top AY + Z^\top AZ + i(Y^\top AZ - Z^\top AY)$

donc  $\operatorname{Re}(\bar{X}^\top AX) = Y^\top AY + Z^\top AZ = Y^\top A_s Y + Z^\top A_s Z$  (comme en I.B.2)

Si  $Y = 0$  alors  $Z \neq 0$  et on a  $Y^\top A_s Y = 0$  et  $Z A_s Z > 0$  d'après I.B.1

Si  $Y \neq 0$  alors on a  $Y^\top A_s Y > 0$  et  $Z A_s Z \geq 0$

Dans tous les cas, on a  $\operatorname{Re}(\bar{X}^\top AX) > 0$

b) Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $A$ . Prenons  $X \in E_\lambda(A) \setminus \{0\}$ .

On a  $\bar{X}^\top AX = \lambda \bar{X}^\top X$  or  $\bar{X}^\top X$  peut être identifié à un réel strictement positif

ainsi  $\operatorname{Re}(\bar{X}^\top AX) = \operatorname{Re}(\lambda) \bar{X}^\top X$  et d'après la question précédente :  $\operatorname{Re}(\bar{X}^\top AX) > 0$

d'où  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$

ainsi  $A$  est bien positivement stable

**III.A.4)** Je prends  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  matrice positivement stable de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  d'après III.A.1

or  $A_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  et donc  $A_s \notin \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$  car  $0 \in \operatorname{sp}(A_s)$ .

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est un exemple de matrice  $A$  positivement stable telle que  $A_s$  ne soit pas définie positive

### III.B -

**III.B.1)** Les solutions sur  $\mathbb{R}^+$  de (EH) :  $y' + \lambda y = 0$  équation différentielle linéaire homogène du première ordre sur  $\mathbb{R}^+$  sont les fonctions de la forme  $t \mapsto ke^{-\lambda t}$  avec  $k \in \mathbb{C}$

Par la méthode de la variation de la constante ; on cherche une solution particulière de l'équation avec second membre  $y' + \lambda y = v$  sous la forme  $g : t \mapsto k(t)e^{-\lambda t}$  avec  $k$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$

On trouve alors  $k'(t)e^{-\lambda t} = v(t)$

on peut prendre  $k$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $k : t \mapsto \int_0^t v(u)e^{\lambda u} du$

donc  $u$  est de la forme  $t \mapsto \left(k + \int_0^t v(s)e^{\lambda s} ds\right) e^{-\lambda t}$  avec  $k \in \mathbb{C}$

La fonction  $v$  étant bornée sur  $\mathbb{R}^+$ , ceci nous fournit  $M > 0$  tel  $\forall t \geq 0, |v(t)| \leq M$

On écrit  $\lambda = \alpha + i\beta$  avec  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ .

Soit  $t \geq 0$ .

On a  $|u(t)| = \left| \left(k + \int_0^t v(s)e^{\lambda s} ds\right) e^{-\lambda t} \right| = \left| k + \int_0^t v(s)e^{\lambda s} ds \right| e^{-\alpha t}$

$$\text{donc } |u(t)| \leq |k|e^{-\alpha t} + e^{-\alpha t} \int_0^t |v(s)| e^{\lambda s} ds \leq |k| + Me^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} ds$$

$$\text{or } \int_0^t e^{\alpha s} ds = \frac{e^{\alpha t} - 1}{\alpha} \leq \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} \text{ d'où } \forall t \geq 0, |u(t)| \leq |k| + \frac{M}{\alpha}$$

On a bien montré que  $u$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$

**III.B.2)** On écrit  $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et pour  $i > j$ ,  $t_{i,j} = 0$  car  $T$  est triangulaire supérieure

La fonction  $U$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  et on a pour  $t \geq 0$  :

$$U'(t) = \begin{pmatrix} u'_1(t) \\ \vdots \\ u'_n(t) \end{pmatrix} \text{ et } TU(t) = \begin{pmatrix} w_1(t) \\ \vdots \\ w_n(t) \end{pmatrix} \text{ où pour } i \in \llbracket 1, n \rrbracket, w_i(t) = \sum_{k=i}^n t_{i,k} u_k(t)$$

On va montrer par récurrence descendante et bornée sur  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , que la fonction  $u_j$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$

**Initialisation** La fonction  $u_n$  vérifie :  $u'_n + t_{n,n}u_n = 0$  sur  $\mathbb{R}^+$

donc la fonction  $u_n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  est la fonction  $u'_n + t_{n,n}u_n$  y est bornée

Comme  $\text{Re}(t_{n,n}) > 0$ , alors  $u_n$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$  d'après la question précédente

**Hérédité** Soit  $j \in \llbracket 2, n \rrbracket$  tel que les fonctions  $u_j, u_{j+1}, \dots, u_n$  soit bornées sur  $\mathbb{R}^+$ .

Montrons que  $u_{j-1}$  bornées sur  $\mathbb{R}^+$ .

$$\text{On a } u'_{j-1} + \sum_{k=j-1}^n t_{j-1,k} u_k = 0 \text{ d'après la } j\text{ème ligne de } U'(t) + TU(t) = 0$$

$$\text{donc } u'_{j-1} + t_{j-1,j-1} u_{j-1} = - \sum_{k=j}^n t_{j-1,k} u_k$$

$$\text{or } - \sum_{k=j}^n t_{j-1,k} u_k \text{ est bornée sur } \mathbb{R}^+ \text{ par combinaison linéaire de fonctions bornées et } \text{Re}(t_{j-1,j-1}) > 0$$

En utilisant à nouveau la question précédente, la fonction  $u_{j-1}$  bornées sur  $\mathbb{R}^+$ .

**Conclusion** On a montré par récurrence que  $u_j$ , où  $1 \leq j \leq n$ , sont bornées sur  $\mathbb{R}^+$

**III.B.3)** Le polynôme caractéristique de  $A$  est scindé sur  $\mathbb{C}[X]$  d'après d'Alembert-Gauss donc  $A$  est trigonalisable Ceci nous fournit  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  tel que  $P^{-1}AP$  soit triangulaire supérieur avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  comme coefficients diagonaux

Ainsi  $T = P^{-1}AP - \alpha I_n = P^{-1}(A - \alpha I_n)P$  est triangulaire supérieur semblable à  $A - \alpha I_n$  avec  $\lambda_1 - \alpha, \dots, \lambda_n - \alpha$  comme coefficients diagonaux

On note  $V : t \mapsto e^{\alpha t} \exp(-tA)$  qui est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$

car  $t \mapsto e^{\alpha t}$  et  $t \mapsto \exp(-tA)$  le sont et par bilinéarité de  $(x, M) \in \mathbb{C} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto xM$  en dimension finie

$$\text{et pour } t \geq 0, \text{ on a } V'(t) = \alpha e^{\alpha t} \exp(-tA) - e^{\alpha t} A \exp(-tA) = -PTP^{-1}V(t)$$

donc en posant  $W(t) = P^{-1}V(t)P$ , on a  $W$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$  et  $W' : t \mapsto P^{-1}V'(t)P$

car l'application  $\varphi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto P^{-1}MP$  est un isomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

donc  $W$  vérifie  $\forall t \in \mathbb{R}, W'(t) + TW(t) = 0$

Toutes les colonnes  $C$  de  $W$  vérifie aussi  $\forall t \in \mathbb{R}^+, C'(t) + TC(t) = 0$

comme  $T$  vérifie les hypothèses de la question précédente, par construction

alors les fonctions composantes de  $C$  et par conséquent celles de  $W$  sont bornées sur  $\mathbb{R}^+$

Ainsi la fonction  $W$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$

On a  $V = \varphi^{-1} \circ W$  or  $\varphi^{-1}$  est linéaire en dimension finie donc continue

ce qui nous fournit  $K > 0$  tel que  $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\varphi^{-1}(M)\|_2 \leq K\|M\|_2$

ainsi  $\forall t \geq 0, \|V(t)\|_2 \leq K\|W(t)\|_2$

On conclut enfin que  $t \mapsto e^{\alpha t} \exp(-tA)$  est bornée sur  $\mathbb{R}^+$

### III.C - Une caractérisation des matrices positivement stables

**III.C.1)** On note les deux endomorphismes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  définis par  $\varphi_1(M) = A^T M$  et  $\varphi_2(M) = MA$ .  
 Je note  $\psi_1$  les deux endomorphismes de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  définis par  $\psi_1(M) = A^T M$  et  $\psi_2(M) = MA$ .  
 Les espaces  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  et de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ayant formellement la même base canonique ;  
 les endomorphismes  $\varphi_1$  et  $\psi_1$  ont même matrice dans cette base et ont donc même spectre.  
 Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\varphi_1$  donc de  $\psi_1$ . Prenons alors  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$  tel que  $A^T M = \lambda M$ .  
 On choisit  $C$  une colonne non nulle de  $M$  et on a  $A^T C = \lambda C$   
 Donc  $\lambda \in \text{Sp}(A^T) = \text{Sp}(A)$  et ainsi  $\text{Re}(\lambda) > 0$   
 d'où  $\varphi_1$  est positivement stable  
 Soit  $\mu$  une valeur propre  $\varphi_2$  donc de  $\psi_2$  et  $N$  un vecteur propre de  $\psi_2$  associé  
 en transposant  $\psi_2(N) = NA = \mu N$ , on obtient  $A^T N^T = \varphi_1(N^T) = \mu N^T$   
 Comme  $N^T \neq 0$ ,  $\mu$  est une valeur propre de  $\varphi_1$  et donc  $\text{Re}(\mu) > 0$  d'après ce qui précède  
 Ainsi  $\varphi_2$  est positivement stable comme  $\varphi_1$   
 De plus, on vérifie facilement que  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  commutent et que  $\Phi = \varphi_1 + \varphi_2$   
 D'après III.A.2.b :  $\Phi$  est positivement stable

**III.C.2)** a) D'après ce qui précède  $0 \notin \text{Sp}(\Phi)$  donc  $\Phi$  est un isomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Ainsi il existe une unique matrice  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que  $A^T B + BA = I_n$

b) Les matrices  $A^T B_s + B_s A$  et  $A^T B_a + B_a A$  sont respectivement symétrique et antisymétrique.  
 or  $I_n + 0 = (A^T B_s + B_s A) + (A^T B_a + B_a A)$  donc  $I_n = A^T B_s + B_s A$  par unicité de la partie symétrique  
 d'où  $B = B_s$  d'après III.C.2 donc  $B$  est symétrique

On remarque  $(BA)^T = A^T B$  donc  $I_n = A^T B + BA = 2(BA)_s$

ainsi  $2BA = I_n + (BA)_a$

en utilisant ce qui a été fait en I.B.3.b), on obtient  $\det(I_n + (BA)_a) \geq 1$

Donc  $2^n \det(B) \det(A) \geq 1$

Les valeurs propres de  $A$  sont des réels strictement positifs et des complexes non réels deux à deux conjugués de mêmes multiplicités car  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  positivement stable.

Ainsi (produit des valeurs propres de  $A$ )  $\det(A) > 0$  puis  $\det(B) > 0$

**III.C.3)** a) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

Soit  $N \in \mathbb{N}^*$ . On a  $\left( \sum_{k=0}^N \frac{M^k}{k!} \right)^T = \sum_{k=0}^N \frac{(M^T)^k}{k!}$

De plus la transposition est continue car il s'agit d'un endomorphisme en dimension finie

En passant à la limite quand  $N \rightarrow +\infty$ , on obtient  $\exp(M^T) = \exp(M)^T$

Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On applique ce qui précède à  $M = -tA$  et en posant  $C = \exp(-tA)$ ,

on obtient  $V(t) = C^T C$ , de plus  $C \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$  en effet :  $\exp(-tA) \exp(tA) = I_n$

Ainsi  $V(t)^T = V(t)$  et  $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ ,  $X^T V(t) X = \|CX\|^2 > 0$

donc pour tout réel  $t$ ,  $V(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

On utilisera deux fois la propriété pour  $f$  continue sur  $[a, b]$  à valeurs dans un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension finie et  $g$  linéaire défini sur cet espace on a :

$$g \left( \int_a^b f \right) = \int_a^b g \circ f$$

Soit  $t > 0$ .

On a  $W(t)^\top = \left( \int_0^t V(s) ds \right)^\top = \int_0^t V(s)^\top ds = \int_0^t V(s) ds = W(t)$  (première fois)

Donc  $W(t) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$

Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ . On a  $X^\top W(t)X = \int_0^t X^\top V(s)X ds$  (deuxième fois)

Pour  $t > 0$ , la fonction  $s \mapsto X^\top V(s)X$  est continue, positive et non identiquement nulle sur  $[0, t]$  donc  $X^\top W(t)X > 0$  d'où  $W(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

b) En posant  $\psi_g : t \mapsto A^\top W(t) + W(t)A$  et  $\psi_d : t \mapsto I_n - V(t)$

On a  $W(0) = 0$  et  $V(0) = I_n$  car on a facilement que  $\exp(0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = I_n$

donc pour  $t = 0$ , on a  $\psi_g(0) = A^\top W(0) + W(0)A = I_n - V(0) = \psi_d(0)$

Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On a  $W'(t) = V(t)$  car  $V$  est continue et donc  $\psi_g'(t) = A^\top V(t) + V(t)A$

Le produit matriciel étant bilinéaire, on a  $V'(t) = -A^\top V(t) + V(t)(-A)$

donc  $\psi_d'(t) = A^\top V(t) + V(t)A$

Ainsi  $\psi_d' - \psi_g' = (\psi_d - \psi_g)'$  est nulle sur l'intervalle  $\mathbb{R}$  donc  $\psi_d - \psi_g$  est constante

Vu la valeur en 0, on a  $\psi_d = \psi_g$

donc  $A^\top W(t) + W(t)A = I_n - V(t)$

c) •  $t \mapsto \|V(t)\|_2$  **intégrable sur**  $[0, +\infty[$

La fonction  $t \mapsto V(t)$  est continue sur  $[0, +\infty[$  car  $t \mapsto \exp(tM)$  l'est pour toute matrice carrée  $M$  ainsi que le produit matriciel qui est bilinéaire en dimension finie

Ainsi  $t \mapsto \|V(t)\|_2$  est continue sur  $[0, +\infty[$  (\*)

Je pose  $\alpha > 0$  défini comme en III.B.3

ce qui nous fournit  $K > 0$  tel que  $\forall t \geq 0, \|e^{\alpha t} \exp(-tA)\|_2 \leq K$  donc

$$\forall t \geq 0, \|\exp(-tA)\|_2 \leq K e^{-\alpha t}$$

donc  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-tA) = 0$  (matrice nulle).

En utilisant  $a$ ) et à nouveau la continuité de la transposition :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left\| \exp(-tA^\top) \right\|_2 = \left\| \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-tA^\top) \right\|_2 = \left\| \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-tA)^\top \right\|_2 = \left\| \left( \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-tA) \right)^\top \right\|_2 = 0$$

Ceci nous fournit  $\Lambda > 0$  tel que  $\forall t \geq \Lambda, \|\exp(-tA^\top)\|_2 \leq 1$

et sur le compact  $[0, \Lambda]$ , la fonction continue  $t \mapsto \|\exp(-tA^\top)\|_2$  est bornée

Ce qui nous fournit  $C_1 > 0$ , tel que  $\forall t \geq 0, \|\exp(-tA^\top)\|_2 \leq C_1$

Comme vu en cours il existe  $C_2 > 0$  tel que  $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\|_2 \leq C_2 \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$

On trouve alors  $D = C_1 C_2 K > 0$  tel que  $\forall t \geq 0, \|V(t)\|_2 \leq D \exp(-t\alpha)$

Or la fonction  $t \mapsto \exp(-t\alpha)$  est intégrable sur  $[0, +\infty[$  car  $\alpha > 0$

par comparaison entre fonctions positives et avec (\*), on obtient  $t \mapsto \|V(t)\|_2$  intégrable sur  $[0, +\infty[$

• **On a :**  $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(t) = 0$

Il suffit de remarquer que  $\forall t \geq 0, \|V(t)\|_2 \leq D \exp(-t\alpha)$  (point précédent) et que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(-t\alpha) = 0$

Ainsi selon les gendarmes  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|V(t)\|_2 = 0$

- $t \mapsto W(t)$  admet une limite dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  en  $+\infty$

Pour  $1 \leq i, j \leq n$ , on note  $M_{i,j}$  un coefficient en place  $(i, j)$  de  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Ce qui se traduit par :  $W(t)_{i,j} = \int_0^t V(s)_{i,j} ds$

On a  $|M_{i,j}| \leq \sqrt{\sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq n}} (M_{l,k})^2} = \|M\|_2$  d'où  $\forall s \geq 0, |V(s)_{i,j}| \leq \|V(s)\|_2$ .

De plus  $s \mapsto V(s)_{i,j}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  car c'est une fonction coefficient de  $V$  qui est continue

Ce qui nous assure de l'intégrabilité des fonctions  $s \mapsto V(s)_{i,j}$  sur  $[0, +\infty[$

d'où l'existence des limites quand  $t \rightarrow +\infty$ , des  $W(t)_{i,j} = \int_0^t V(s)_{i,j} ds$  puis de  $W(t)$  (par coefficients)

- $B = \lim_{t \rightarrow +\infty} W(t)$

Notons cette limite  $W_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} W(t)$

Comme  $\Phi$  est continue (endomorphisme en dimension finie) et que  $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi(W(t)) = I_N - V(T)$  on a donc  $A^T W_\infty + W_\infty A = I_n$

En utilisant l'unicité du III.C.2.a), on a donc

en faisant tendre  $t$  vers  $+\infty$  dans l'égalité précédente,  $B$  est alors la limite de  $W(t)$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$

- $B$  est définie positive

Soit  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on a  $\forall t \geq 0, X^T W(t) X \geq 0$  car selon a),  $W(t) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$

en passant à la limite par continuité de  $M \mapsto X^T M X$  on obtient :  $X^T B X \geq 0$

donc  $B$  est positive. Comme  $B$  est symétrique (III.C.2.b) réelle, on a  $\text{Sp}(B) \subset \mathbb{R}^+$

mais comme  $\det(B) > 0$ , alors  $0 \notin \text{Sp}(B)$  d'où  $\text{Sp}(B) \subset ]0, +\infty[$

On en déduit que la matrice  $B$  est définie positive de la question III.C.2. OUF!