

**A - Préliminaires**

1. Pour un polynôme  $P$  de  $\mathbb{R}[X]$ , notons  $[P]_k$  son coefficient relatif au terme en  $X^k$ . On a alors

$$\binom{2n}{n} = [(X+1)^{2n}]_n = [(X+1)^n(X+1)^n]_n = \sum_{k=0}^n [(X+1)^n]_k [(X+1)^n]_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

grâce à la symétrie des coefficients binomiaux :  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .

2. On rappelle la formule de Stirling :  $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ . On en déduit que

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{\sqrt{2\pi} 2n (2n/e)^{2n}}{2\pi n (n/e)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{4^n}{\sqrt{n}}$$

3. Comme la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$  est décroissante, on peut encadrer l'intégrale pour  $k \geq 1$  :

$$\frac{1}{k^\alpha} \geq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \frac{1}{(k+1)^\alpha}$$

En sommant ces inégalités pour  $k$  compris entre 1 et  $n-1$ , on obtient, en posant  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$  :

$$S_n - \frac{1}{n^\alpha} \geq \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} \geq S_n - 1,$$

d'où le contrôle  $S_n = \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} + \mathcal{O}(1)$ . Or  $\int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha} - 1}{1-\alpha}$  d'où le résultat, un peu plus fort que ce qui est demandé :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \mathcal{O}(1)$$

et l'équivalent recherché. L'alternative est d'utiliser le théorème de sommation des relations de comparaison, mais c'est un peu plus technique.

Prenons maintenant  $\alpha > 1$ . L'encadrement précédent fournit, lorsque l'on somme pour  $k$  allant de  $n$  à  $p \geq n$  :

$$\sum_{k=n}^p \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_n^{p+1} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \sum_{k=n+1}^{p+1} \frac{1}{k^\alpha}$$

Comme  $\alpha > 1$ , la série  $\sum \frac{1}{k^\alpha}$  converge, tout autant que l'intégrale  $\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ , donc on peut laisser tendre  $p$  vers  $+\infty$  pour obtenir

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \geq \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

D'où le résultat :  $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ , légèrement meilleur que l'équivalent demandé.

4. Le résultat provient d'une intégration par parties : on intègre  $t \mapsto 1$  et on dérive  $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$  ; les hypothèses sont justifiées par le fait que la première fonction est continue et la deuxième  $\mathcal{C}^1$  sur le segment  $[2, x]$ . On obtient bien

$$I(x) = \left[ \frac{t}{\ln t} \right]_2^x + \int_2^x \frac{t \cdot \frac{1}{t}}{\ln^2(t)} dt = \frac{x}{\ln x} - \frac{2}{\ln 2} + \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)^2}.$$

Comme la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\ln t}$  est positive mais n'est pas intégrable sur  $[2, +\infty[$ , et que  $\frac{1}{\ln(t)^2}$  est négligeable devant  $\frac{1}{\ln t}$  en  $+\infty$ , le théorème d'intégration des relations de comparaison s'applique et on en déduit que  $x \mapsto \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)^2}$  est négligeable devant  $I(x)$  en  $+\infty$ .

Enfin, comme  $I(x)$  tend vers  $+\infty$ , on a le développement  $I(x) = \frac{x}{\ln x} + o(I(x))$  et donc  $I(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ .

5. On rappelle le développement en série entière :  $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ , où le coefficient binomial généralisé est défini par  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ . Ce développement est convergent et valable pour  $x \in ]-1, 1[$ .

En particulier, on a

$$\binom{-1/2}{k} = \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})\cdots(-\frac{2k-1}{2})}{k!} = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2^k k!}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par le produit des nombres pairs, il vient

$$\binom{-1/2}{k} = (-1)^k \frac{1}{2^k} \frac{(2k)!}{k! \cdot 2 \cdot 4 \cdots 2k} = (-1)^k \frac{1}{4^k} \frac{(2k)!}{(k!)^2} = (-1)^k \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k}.$$

On en déduit que  $\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{k} (-x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{4^k} x^k$ .

## B. Marches aléatoires, récurrence

6. On a, pour tout  $n$ ,  $|\mathbb{P}(S_n = 0)| \leq 1$  et  $|\mathbb{P}(R = n)| \leq 1$ , donc par le lemme d'Abel, le rayon des séries entières est supérieur ou égal à 1. En tant que somme de séries entières,  $F$  et  $G$  sont de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'intervalle ouvert de convergence, ici  $] -1, 1[$ .

Comme  $R$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ , la série numérique  $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R = n)$  converge, et de plus on a

$$1 = \mathbb{P}(R = +\infty) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R = n).$$

Ainsi, la série entière définissant  $G$  est normalement convergente sur le segment  $[-1, 1]$ . Chacune des fonctions  $x \mapsto \mathbb{P}(R = n)x^n$  étant continue sur  $[-1, 1]$ , le théorème de continuité des séries de fonctions s'applique et  $G$  est définie et continue sur  $[-1, 1]$ . De plus

$$G(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R = n) = 1 - \mathbb{P}(R = +\infty) = \mathbb{P}(R \neq +\infty).$$

7. On a l'égalité d'événements

$$(S_n = 0_d) \cap (R = k) = (R = k) \cap (S_n = S_k) = (R = k) \cap \left( \sum_{j=k+1}^n X_j = 0 \right).$$

La force de conviction et l'invocation du lemme des coalitions pourrait justifier directement que ces deux événements sont indépendants. Voyons-le avec les outils du programme. Le lemme des coalitions dit que comme  $(X_1, \dots, X_n)$  sont mutuellement indépendantes, alors deux variables s'exprimant  $f(X_1, \dots, X_k)$  et  $g(X_{k+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes. Or on a l'égalité d'événements

$$(R = k) = \left( \sum_{j=1}^k X_j = 0 \right) \cap \bigcap_{p=1}^{k-1} \left( \sum_{j=1}^p X_j \neq 0 \right)$$

d'où l'on tire l'égalité de variables indicatrices

$$\mathbf{1}_{R=k} = \mathbf{1}_{\sum_{j=1}^k X_j=0} \cdot \prod_{p=1}^{k-1} \mathbf{1}_{\sum_{j=1}^p X_j \neq 0} = f(X_1, \dots, X_k).$$

Pour une fonction  $f$  ad hoc. De même,

$$\mathbf{1}_{\sum_{j=k+1}^n X_j=0} = g(X_{k+1}, \dots, X_n)$$

pour une fonction  $g$  ajustée. Ainsi les deux indicatrices sont indépendantes, donc les événements associés le sont. Ainsi,

$$\prod ((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = \mathbb{P}(R = k) \mathbb{P}\left( \sum_{j=k+1}^n X_j = 0 \right).$$

Maintenant, on invoque l'indépendance mutuelle pour justifier que les  $(n - k)$ -uplets  $(X_1, \dots, X_{n-k})$  et  $(X_{k+1}, \dots, X_n)$  ont même loi, pour en déduire que

$$\mathbb{P}\left( \sum_{j=k+1}^n X_j = 0 \right) = \mathbb{P}\left( \sum_{j=1}^{n-k} X_j = 0 \right) = \mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d).$$

Maintenant, on a l'inclusion  $(S_n = 0) \subset (R \leq n)$ , d'où l'on tire l'égalité d'événements

$$(S_n = 0) = (S_n = 0) \cap (R \leq n) = \bigcup_{k=1}^n (S_n = 0) \cap (R = k),$$

la réunion sur  $k$  étant de plus une réunion disjointe. On en déduit que

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}((S_n = 0_d) \cap (R = k)) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(R = k) \mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d).$$

8. Fixons  $x \in ]-1, 1[$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on a

$$\mathbb{P}(S_n = 0)x^n = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(R = k)x^k \cdot \mathbb{P}(S_{n-k} = 0_d)x^{n-k},$$

et on reconnaît dans le terme de droite le terme général du produit de Cauchy des séries absolument convergentes  $F(x)$  et  $G(x)$ . Le théorème sur le produit de Cauchy permet de sommer la relation précédente :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n = F(x) - 1 = F(x)G(x)$$

ce qui est le résultat demandé. La formule se réécrit  $F(x) = \frac{1}{1 - G(x)}$  pour  $x \in ]-1, 1[$ . On en déduit que

- Si  $\mathbb{P}(R \neq \infty) = 1$ , alors  $G(x)$  tend vers 1 par valeurs inférieures lorsque  $x$  tend vers  $1^-$ , et donc  $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$ .
- Si  $\mathbb{P}(R \neq \infty) < 1$ , alors par continuité de  $G$ ,  $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - G(1)} = \frac{1}{\mathbb{P}(R = +\infty)}$ .

9. Aucun théorème ne couvre cette situation, il faut montrer la divergence *à la main*. Fixons  $A > 0$  ; comme la série à termes positifs  $\sum c_k$  diverge, il existe un rang  $N$  pour lequel  $\sum_{k=0}^N c_k \geq A+1$ . La fonction  $x \mapsto \sum_{k=0}^N c_k x^k$  tend vers  $\sum_{k=0}^N c_k \geq A+1$  quand  $x$  tend vers  $1^-$ , donc il existe  $\alpha > 0$  tel que

$$\forall x \in ]1 - \alpha, 1[, \quad \sum_{k=0}^N c_k x^k \geq A.$$

Alors, si  $x \in ]1 - \alpha, 1[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \geq \sum_{k=0}^N c_k x^k \geq A$  ; rappelons pour cela que les  $c_k x^k$  sont positifs. On en déduit que  $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$ .

10. Par application de la question 10, si  $\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d)$  diverge, alors  $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty$ . Par le même argument exercé sur  $G$  à la question 6, si  $\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d)$  converge, alors  $F(x)$  tend vers  $\ell = \sum \mathbb{P}(S_n = 0_d)$  en 1. On a donc l'équivalence

$$\sum \mathbb{P}(S_n = 0_d) \text{ diverge} \iff F(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} +\infty \iff_{Q8} \mathbb{P}(R \neq +\infty) = 1.$$

11. On a l'égalité d'événements

$$(Y_i = 1) = \left( \forall k \leq i-1, S_i \neq S_k \right) = \left( \forall k \leq i-1, \sum_{j=k+1}^i X_j \neq 0 \right).$$

On utilise maintenant une astuce non donnée par l'énoncé : par mutuelle indépendance,  $(X_1, \dots, X_i)$  et  $(X_i, X_{i-1}, \dots, X_1)$  sont des  $i$ -uples de même loi. On en déduit l'égalité des probabilités :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\forall k \leq i-1, \sum_{j=k+1}^i X_j \neq 0\right) &= \mathbb{P}\left(\forall k \leq i-1, \sum_{j=k+1}^i X_{i+1-j} \neq 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\forall k \leq i-1, \sum_{j'=1}^{i-k} X_{j'} \neq 0\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\forall k' \in \llbracket 1, i \rrbracket, S_{k'} \neq 0\right) = \mathbb{P}(R > i). \end{aligned}$$

Or, on a l'égalité de variables aléatoires  $N_n = 1 + \sum_{i=1}^n Y_i$ . Toutes les variables sont bornées donc admettent une espérance, et l'espérance d'une variable de Bernoulli est égale à la probabilité que cette variable soit égale à 1 :

$$\mathbb{E}(N_n) = 1 + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Y_i = 1) = 1 + \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(R > i).$$

12. On a l'inclusion  $(R > i) \supset (R > i+1)$  et  $\bigcap_{i \geq 1} (R > i) = (R = +\infty)$ . Donc par continuité décroissante,

$$\mathbb{P}(R > i) \xrightarrow{i \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(R = +\infty). \text{ Le théorème de Cesàro conduit alors au résultat : } \frac{\mathbb{E}(N_n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(R = +\infty).$$

### C. Les marches de Bernoulli sur $\mathbb{Z}$

13. Les variables  $Y_i = \frac{X_i + 1}{2}$  suivent une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  et sont mutuellement indépendantes.

Et  $S_n = 2 \sum_{i=1}^n Y_i - n$ . Donc

$$\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2n+1} Y_i = \frac{2n+1}{2}\right) = 0.$$

De même,  $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{2n} Y_i = n\right)$ . Or la variable  $\sum_{i=1}^{2n} Y_i$  suit une loi binomiale de paramètres  $(2n, p)$ , donc

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

14. On a  $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} p^n q^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} (4pqx^2)^n = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}$  en utilisant la formule de la question 5.

Donc

$$G(x) = 1 - \frac{1}{F(x)} = 1 - \sqrt{1-4pqx^2}.$$

On sait depuis la question 6 que

$$\mathbb{P}(R = +\infty) = 1 - G(1) = \sqrt{1-4pq} = \sqrt{1-4p+4p^2} = |1-2p| = |p-q|.$$

La loi de  $R$  s'obtient en retrouvant le développement en série entière de  $G$ . On a d'après la question 5,

$$G(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{1/2}{n} (4pq)^n (-1)^n x^{2n}.$$

On en déduit que  $\mathbb{P}(R = 2n+1) = 0$  pour tout  $n$ , et pour  $n \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}(R = 2n) = -(-1)^n \binom{1/2}{n} (4pq)^n.$$

Un calcul similaire à celui de la question 5 conduit à  $\binom{1/2}{n} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n! (n-1)!}$ , et donc

$$\mathbb{P}(R = 2n) = 2(pq)^n \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}.$$

15. Lorsque  $p = q = \frac{1}{2}$ , on a  $\mathbb{P}(R = 2n) = \frac{2}{4^n} \frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} n^{3/2}}$  d'après l'équivalent obtenu à la question 2.

Le théorème de sommation des relations de comparaison (cas convergent) affirme alors que

$$\mathbb{P}(R > i) = \sum_{k > \frac{i}{2}} \mathbb{P}(R = 2k) \sim \sum_{k > \frac{i}{2}} \frac{1}{2\sqrt{\pi} k^{3/2}} \underset{Q_3}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\frac{i}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{i}}.$$

On applique à nouveau le théorème de sommation des relations de comparaison (cas divergent) et la question 3 pour obtenir

$$\mathbb{E}(N_n) \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \sqrt{n}.$$

## D. Un résultat asymptotique

16. Comme pour tout  $k \leq n$  la quantité  $b_{n-k}$  est positive, on a  $a_k b_{n-k} \geq a_n b_{n-k}$  et

$$1 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \geq a_n \sum_{k=0}^n b_{n-k} = a_n B_n, \text{ d'où la première inégalité : } a_n \leq \frac{1}{B_n}.$$

Pour l'autre inégalité on a  $a_k \leq a_0$  si  $k \leq n$  et  $a_k \leq a_n$  si  $k \geq n$ . Alors

$$1 = \sum_{k=0}^m a_k b_{m-k} \leq a_0 \sum_{k=0}^{n-1} b_{m-k} + a_n \sum_{k=n}^m b_{m-k} = a_0 \sum_{j=m-n+1}^m b_j + a_n \sum_{j=0}^{m-n} b_j = a_0(B_m - B_{m-n}) + a_n B_{m-n}.$$

17. L'inégalité de la question 15 fournit l'encadrement

$$\frac{1 - a_0(B_{m_n} - B_{m_n-n})}{B_{m_n-n}} \leq a_n \leq \frac{1}{B_n}.$$

Par les hypothèses faites sur  $m_n$ , le terme de gauche est équivalent à  $B_n$ . Donc par le théorème d'encadrement  $a_n$  est équivalent à  $\frac{1}{B_n}$ .

18. On sait déjà, par le théorème de sommation des relations de comparaison, que  $B_n$  est équivalent à  $C \ln n$ . Si  $B_n$  était égal à  $C \ln n$ , le choix (à trouver avec imagination) de  $m = n \ln n$  conviendrait. Vérifions-le plus précisément en posant  $m_n = \lfloor n \ln n \rfloor$  : on a déjà que  $m_n \sim n \ln n$ , et que  $m_n - n = n(\ln n - 1) + \mathcal{O}(1) \sim n \ln n$ . D'abord,

$$B_{m_n-n} \sim C \ln(m_n - n) = C(\ln(n \ln n) + o(1)) = C \ln n + C \ln \ln n + o(1) \sim C \ln n \sim B_n.$$

Pour la deuxième contrainte, comme  $b_n \sim \frac{C}{n}$ , la suite  $nb_n$  est convergente donc bornée : il existe  $D$  tel que  $b_n \leq \frac{D}{n}$  pour tout  $n \geq 1$ . On déduit de ceci que

$$0 \leq B_{m_n} - B_{m_n-n} \leq \sum_{k=m_n-n}^{m_n} \frac{D}{k} \leq D \frac{n}{m_n - n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

## E. Théorème d'Erdős et Dvoretzky

19. Posons  $H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(R > k)x^k$ , qui est définie sur  $] -1, 1[$ . On a  $xH(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(R > k-1)x^k$ , donc

$$H(x) - xH(x) = 1 + \sum_{k \geq 1} (\mathbb{P}(R > k) - \mathbb{P}(R > k-1))x^k = 1 - \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(R = k)x^k = 1 - G(x).$$

Ainsi,  $H(x) = \frac{1 - G(x)}{1 - x}$ . Donc par la formule de la question 8,

$$H(x)F(x) = \frac{F(x) - F(x)G(x)}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Il ne reste plus qu'à identifier le développement de Cauchy de  $H(x)F(x)$  avec celui de  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n$  pour obtenir

$$1 = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(S_k = 0_d) \mathbb{P}(R > n - k).$$

Notons que cette relation est encore valable pour  $n = 0$ .

20. Fixons  $n$ , et notons  $A$  (resp.  $B, C, D$ ) la variable aléatoire correspondant au nombre d'entiers  $k \in \llbracket 1, 2n \rrbracket$  tels que  $X_k = (0, 1)$  (resp.  $(0, -1), (1, 0), (-1, 0)$ ). L'événement  $S_{2n} = 0$  s'écrit alors  $(A = B) \cap (C = D)$ . Alors  $(A, B, C, D)$  suit une loi multinomiale (hors programme) de paramètres  $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$  : pour chaque quadruplet  $(a, b, c, d) \in \mathbb{N}^4$  tels que  $a + b + c + d = 2n$ ,

$$\mathbb{P}(A = a, B = b, C = c, D = d) = \frac{(2n)!}{a! b! c! d!} \frac{1}{4^{2n}}.$$

En particulier,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_{2n} = 0) &= \sum_{a+c=n} \frac{(2n)!}{(a!)^2 (c!)^2} \frac{1}{4^{2n}} \\ &= \frac{(2n)!}{4^{2n} (n!)^2} \sum_{k=0}^n \frac{(n!)^2}{(k!)^2 (n-k)!^2} \\ &= \frac{\binom{2n}{n}}{4^{2n}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \left( \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \right)^2 \end{aligned}$$

grâce à la première question.

21. On déduit de la question précédente et de la question 2 l'équivalent  $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) \sim \frac{1}{\pi n}$ .

La question 19 se réécrit pour chaque  $n$  :

$$1 = \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}(S_k = 0) \mathbb{P}(R > 2n - k) = \sum_{k=0}^{2n} \mathbb{P}(R > k) \mathbb{P}(S_{2n-k} = 0) = \sum_{k=0}^n \underbrace{\mathbb{P}(R > 2k)}_{a_k} \underbrace{\mathbb{P}(S_{2(n-k)} = 0)}_{b_{n-k}}$$

puisque'il est assez clair que  $\mathbb{P}(S_{2n+1} = 0) = 0$  pour tout  $n$ . Et  $b_n \sim \frac{1}{\pi n}$ . La partie **D** s'applique car :

$$a_k, b_k \text{ sont strictement positifs, } \quad a_k \text{ décroît, } \quad b_n \sim \frac{1}{\pi n}.$$

On en déduit le premier résultat :  $\mathbb{P}(R > 2n) \sim \frac{1}{\pi \ln n}$ . Maintenant, comme la suite  $(\mathbb{P}(R > n))_n$  est décroissante, on a

$$\mathbb{P}(R > 2\lfloor n/2 \rfloor) \geq \mathbb{P}(R > n) \geq \mathbb{P}(R > 2\lceil n/2 \rceil).$$

Et le terme de gauche  $\mathbb{P}(R > 2\lfloor n/2 \rfloor) \sim \frac{1}{\pi \ln \lfloor n/2 \rfloor} = \frac{1}{\pi (\ln n - \ln 2 + o(1))} \sim \frac{1}{\pi \ln n}$  et il en est de même du terme de droite. Donc on arrive à

$$\mathbb{P}(R > n) \sim \frac{1}{\pi \ln n}.$$

Le théorème de sommation des relations de comparaison s'applique alors sur la formule de la question 11 pour en déduire que

$$\mathbb{E}(N_n) \sim \sum_{k=2}^n \frac{1}{\pi \ln k}.$$

Enfin, une comparaison série-intégrale dans le style de la question 3 fournit

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{\pi \ln k} = \int_2^n \frac{dt}{\pi \ln t} + \mathcal{O}(1) = \frac{1}{\pi} I(n) + \mathcal{O}(1).$$

On conclut avec l'équivalent obtenu à la question 4 :

$$\mathbb{E}(N_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\pi \ln n}.$$