Concours MP - École Normale Supérieure Session 2020

Rapport sur l'épreuve de Maths D

Coefficient de l'épreuve (en pourcentage du total d'admission, modifié pour tenir compte de l'absence d'oraux pour les ENS à la session 2020) : 32,4%

Membres du jury : Alexandre Afgoustidis, Léa Bittmann, Kevin Destagnol, Laurent Lazzarini (correcteurs), Jean-Pierre Marco (concepteur du sujet et correcteur).

L'objet du problème est de définir et étudier la « forme » des graphes de fonctions « simples » de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

• *La première partie introduit d'abord cette notion de forme. Deux voies au moins sont possibles : soit comme classe d'équivalence suivant la relation de composition des fonctions (simples) par des homéomorphismes croissants au départ et à l'arrivée, soit comme permutation naturellement déduite de la restriction d'une telle fonction à l'ensemble (fini) de ses extremums (les permutations ainsi obtenues sont dites* alternantes*). On montre que ces deux approches coïncident pour les fonctions simples de limites infinies en $\pm\infty$. Cette première partie, qui n'utilise que des notions très élémentaires de topologie et de continuité des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, aborde ensuite l'idée de* déformation *des graphes, par le biais de la connexité par arcs des classes d'équivalence précédentes.*

• *La deuxième partie met en pratique des techniques de calcul différentiel pour montrer un théorème de René Thom : toute forme est réalisée par le graphe d'une fonction polynômiale, dont le degré dépend du nombre d'extremums imposé.*

• *La troisième partie - purement combinatoire - établit une formule récursive pour le cardinal des ensembles de permutations alternantes de $\{1, \ldots, n\}$ en fonction de n, suivant une approche due à Vladimir Arnold. Cette partie ne nécessite pratiquement aucune connaissance préalable.*

• *La quatrième partie mêle analyse et algèbre et peut être vue comme une introduction très partielle aux fonctions L de Dirichlet. On y étudie d'abord les relations entre les cardinaux des ensembles de permutations alternantes et les coefficients du développement en série à l'origine de la fonction $x \mapsto \tan x + (\cos x)^{-1}$, on se concentre ensuite sur les propriétés de périodicité des réduites de ces coefficients modulo un nombre premier, suivant une idée de Donald Knuth.*

• *La dernière partie est une introduction non formelle à l'homologie persistante et aux « codes-barre » - deux sujets en plein développement - que l'on introduit ici de manière algorithmique dans le cas des sous-niveaux d'une fonction simple. Intuitivement, il s'agit de « gommer » les petites irrégularités d'une fonction simple en préservant les traits saillants de sa « forme ».*

Remarques générales

• Nous avons reçu 1247 copies. Les notes attribuées se répartissent comme suit :

Plage de note	Copies	Proportion
$[0, 4[$	580	46,5%
$[4, 8[$	515	41,3%
$[8, 12[$	72	5,8%
$[12, 16[$	59	4,7%
$[16, 20]$	21	1,7%

Moyenne	4,9
Médiane	4,2
Étendue	de 0,1 à 20

• L'épreuve était bien sûr très longue et aucune copie n'a traité plus des deux tiers des questions : les deux copies ayant obtenu 20/20 ont traité entre la moitié et les deux tiers des questions.

• Parmi les 100 meilleures copies, beaucoup se concentrent sur trois des cinq parties : presque toutes abordent la partie I et deux (voire une seule) des parties II, III, IV. La partie V n'est que très peu abordée.

• Traiter *parfaitement* deux des cinq parties permettait d'obtenir 20/20. Traiter entièrement la partie I (y compris les délicates questions 2.c et 3.b) permettait déjà d'obtenir environ 9/20. Les parties II et IV étaient significativement plus longues que les parties I et III.

• Les parties I, II et III ont chacune fait l'objet de traitements très satisfaisants dans certaines copies (pas les mêmes) ; en revanche, ce qui est bien compréhensible, personne n'a obtenu plus de la moitié des points prévus pour la partie IV et presque personne n'a obtenu un nombre significatif de points sur la partie V.

• Pour réussir cette très longue épreuve, une certaine concision était nécessaire. Il n'est presque jamais profitable de détailler sur plusieurs pages la réponse à une question (sauf bien sûr lorsqu'elle est très difficile), ou de redémontrer des résultats explicitement au programme. Il faut bien constater que certaines copies témoignent d'une préparation très minutieuse à l'exercice, l'efficacité des meilleures étant (comme toujours) impressionnante : cette année, une copie de 6,5 pages a obtenu 20/20.

• Cette nécessaire concision ne saurait cependant s'obtenir au détriment de la clarté : un texte mathématique qui n'introduit pas ses notations, dont le style télégraphique mélange quantificateurs et expressions françaises, ou qui passe sous silence une partie des arguments, ne peut pas être compréhensible. On aura soin par exemple d'éviter d'abréger (!) la conjonction de coordination « donc » par le symbole « $\Rightarrow$ » : il est attendu que la différence d'ordre logique entre une déduction et une implication soit clairement comprise et maîtrisée. De même, il n'est pas acceptable de lire un développement de la forme : « $\exists x$ vérifiant la propriété $P(x)$, or $\forall x$ on a $Q(x)$, donc x vérifie $Q(x)$... ».

• Les réponses à certaines questions étaient correctes si et seulement si elles faisaient apparaître un certain nombre de notions clé. Une logique de « tout ou rien » a été adoptée pour les noter.

• Le problème se prêtait particulièrement à des explications illustrées par des dessins. Sans se substituer à la nécessaire approche formelle, ils permettaient souvent de condenser la rédaction et de la rendre plus lisible et limpide.

• Une faute de logique de portée générale a souvent été décelée dans la question I.2.d. Le problème était de déterminer si une équivalence persistait lorsque l'on supprimait une hypothèse admise jusqu'à ce point. Une réponse de la forme « l'équivalence ne peut persister puisque l'hypothèse a été utilisée dans le raisonnement précédent » ne saurait convenir...

• Signalons pour conclure que la rédaction des copies, même bonnes, est assez souvent de piètre qualité et que certaines fautes d'orthographe apparaissent de manière récurrente, au point d'en être prévisibles. Par exemple, un extremum peut être strict mais certainement pas stricte, de même, une majoration peut être globale mais sûrement pas global.

• Dans la suite de ce rapport, nous indiquons pour chaque question quelques statistiques : lorsque nous écrivons

3.a.	Abordée dans 479 copies	386 réponses complètes	74 réponses partielles

il faut comprendre que 479 copies (sur 1247) comportaient une tentative pour la question **3.a.** ; que parmi elles 386 l'ont parfaitement traitée ; et que 74 copies, sans obtenir tous les points, ont obtenu une proportion significative des points prévus pour la question.

Partie I

1.a.

- Cette question a été traitée dans la quasi-totalité des copies. Environ la moitié la résolvent complètement, soit en utilisant l'injectivité de la fonction sur l'ensemble de ses extremums, soit en exploitant la finitude de cet ensemble. La première solution était la plus efficace.
- Un raisonnement par l'absurde supposant l'existence d'un extremum relatif non strict et exhibant une suite d'extrema relatifs demandait un peu de soin : il fallait bien s'assurer que cette suite prend une infinité de valeurs pour obtenir une véritable contradiction.
- Dans tous les cas, il fallait observer qu'un point dans un voisinage assez petit d'un extremum et de même valeur que cet extremum est aussi un extremum.
- La symétrie entre maximum et minimum devait être signalée, une courte mention suffisait.

1.a.	Abordée dans 1234 copies	645 réponses complètes	387 réponses partielles

1.b.

- Cette question a, elle aussi, été massivement abordée, mais beaucoup de réponses étaient fausses ou imprécises : moins de 200 copies ont traité cette question de manière entièrement satisfaisante.
- De nombreuses copies ont présenté des difficultés pour nier la propriété de monotonie d'une fonction. L'erreur la plus fréquente était de penser qu'une fonction continue qui n'est pas monotone est monotone par morceaux, et a donc localement un nombre fini de changements de monotonie. Ce n'est pas exact même pour une fonction C^∞, comme le montre l'exemple $f(x) = \sin x \exp(-1/x^2)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ (et il existe des fonctions continues classiques qui ne sont monotones sur aucun intervalle non trivial).
- Prouver que la fonction était injective sur chacune des composantes et utiliser sa continuité pour en déduire la stricte monotonie était certainement la solution la plus efficace. Pour ce faire, on était souvent amené à utiliser le fait qu'une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ et vérifiant $f(a) = f(b)$ possède un extremum dans $]a, b[$. Certaines copies (assez peu nombreuses) le déduisent du théorème de Rolle, recours d'une part illicite en l'absence d'hypothèse de dérivabilité et d'autre part inapproprié puisque seule la preuve du théorème, dans sa partie topologique, s'apparente à la question ici considérée.
- Il n'était pas nécessaire de détailler sur plusieurs pages la description des composantes connexes de $\mathbb{R}\backslash E(f)$. Plusieurs bonnes copies oublient cependant de traiter le cas des composantes non bornées.

1.b.	Abordée dans 1135 copies	181 réponses complètes	247 réponses partielles

1.c.

- Cette question a été bien réussie : plus de la moitié des copies la résolvent complètement.
- La rédaction devait bien souligner le rôle joué par la croissance des fonctions β.
- Dans beaucoup de copies, les extremums ont été paramétrés par une suite finie strictement croissante, avec de plus une description de la nature des extremums en fonction de la parité de l'indice et la nature du plus petit extremum, ce qui était une approche possible. Cependant, la relation entre la variation de la fonction et l'alternance des maximums et minimums a parfois été traitée trop rapidement.

- Très peu ont explicité une récurrence complète pour justifier leurs affirmations : il ne leur en a cependant pas été tenu rigueur à ce stade.

1.c.	Abordée dans 1097 copies	609 réponses complètes	158 réponses partielles

2.a.
- Cette question a été dans l'ensemble bien comprise, mais le soin accordé aux réponses était très variable : même s'il convenait de rédiger de façon suffisamment efficace pour poursuivre cette longue épreuve, beaucoup de réponses ont été trop imprécises. Ainsi, beaucoup de copies ayant traité de façon trop cavalière la première partie de la question (oubliant de mentionner - sans le redémontrer - que toute bijection monotone de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ est *continue*) n'ont pas obtenu de points sur cette partie.
- La seconde partie a été plutôt mieux traitée. La plupart des copies ont exhibé une bijection explicite entre l'ensemble des extremums d'une fonction et celui d'une fonction équivalente. Un petit nombre de récurrences trop rapides ont conduit à l'égalité des ensembles d'extremums, ce qui est bien sûr faux.

2.a.	Abordée dans 1204 copies	450 réponses complètes	368 réponses partielles

2.b.
- Question plutôt bien traitée dans l'ensemble. Presque toutes les copies l'ayant abordée ont proposé une fonction affine par morceaux, dont il s'agissait de préciser la forme.
- Les problèmes éventuellement rencontrés provenaient du « raccord continu des morceaux » et de la définition de la fonction sur les intervalles non bornés (en particulier, il n'était pas possible de choisir $\chi(x) = (v_1/u_1)x$ pour $x < u_1$, à moins de traiter séparément le cas $u_1 = 0$).
- Certaines copies s'appuient sur le « fait » qu'une fonction continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est bijective, c'est bien sûr faux.

2.b.	Abordée dans 1109 copies	609 réponses complètes	158 réponses partielles

2.c.
- Cette question était plus difficile que les précédentes, et peu réussie : moins de 25 copies y ont obtenu tous les points.
- L'implication $(f \sim g) \implies (\sigma_f = \sigma_g)$ a été beaucoup plus souvent réussie que sa réciproque, nettement plus délicate.
- Pour l'implication directe, les copies ayant raté la question 2.a. ont cependant eu de grosses difficultés pour conclure.
- Pour l'implication inverse, beaucoup de copies se contentent de conjuguer par des fonctions β, alors que celles-ci ne sont définies que sur des ensembles finis.

2.c.	Abordée dans 831 copies	23 réponses complètes	124 réponses partielles

2.d.
- Cette question a été assez rarement traitée : elle a reçu une centaine de réponses complètes. La plupart des solutions correctes proposent deux fonctions dont l'une est bornée et l'autre pas, et qui donnent lieu à la même permutation σ. Un dessin *clair* pouvait suffire, à condition d'expliquer pourquoi il est impossible que deux fonctions f et g de $S_\star$ soient équivalentes lorsque f est bornée et pas g.
- Affirmer que l'implication subsiste en raison du fait que l'hypothèse sur les limites à l'infini n'a pas été utilisée dans sa preuve n'est certes pas une faute de logique, mais cela aurait dû éveiller quelques légitimes soupçons...

2.d.	Abordée dans 298 copies	100 réponses complètes	44 réponses partielles

3.a.
- Il fallait vérifier que la fonction ζ proposée est continue par rapport au couple (s, x). Celles et ceux qui l'ont définie par morceaux sur des sous-rectangles ont eu des difficultés

pour établir proprement cette continuité. D'autres ont oublié de vérifier qu'à s fixé, la fonction $x \mapsto \zeta(s, x)$ est bien continue, bijective et strictement croissante.

3.a.	Abordée dans 712 copies	334 réponses complètes	191 réponses partielles

3.b. • Cette question était difficile et n'a reçu que deux réponses réellement satisfaisantes. La difficulté n'était pas seulement de proposer un chemin, mais de vérifier qu'il s'agissait bien d'un chemin continu à valeurs dans $S_* \cap C_b^0$. Une cinquantaine de copies ont montré clairement qu'elles avaient conscience de ce problème et ont tenté de proposer une piste pour le résoudre : elles ont été valorisées.

3.b.	Abordée dans 286 copies	1 réponse complète	3 réponses partielles

3.c. • Cette question a été abordée dans moins d'un cinquième des copies, et très peu de solutions étaient vraiment convaincantes (une vingtaine). En effet, la plupart des copies abordant cette question proposent un chemin $t \mapsto \gamma(t)$, mais ne se demandent pas s'il vérifie bien les contraintes imposées par l'énoncé (à valeurs dans $S \cap C_b^0$, continu par rapport à t). De fait, le chemin proposé vérifie très rarement toutes ces conditions. Par exemple, un chemin de la forme $\gamma(t) = tf$, avec $f \in S_2$, ne répond pas à la question, puisque la fonction nulle n'est pas dans S_0.

3.c.	Abordée dans 241 copies	11 réponses complètes	84 réponses partielles

Partie II

Cette partie a été significativement moins abordée que les deux suivantes, et le jury ne peut que constater que les bases du calcul différentiel ne sont pas toujours dominées. En particulier, la définition même de la différentielle pose des problèmes dans certains cas et l'inégalité des accroissements finis n'est connue qu'à un certain degré d'approximation... Les manipulations de développements limités ont conduit le plus souvent à des erreurs grossières consistant à négliger abusivement certains termes.

La question 1 était une version légèrement déguisée de la preuve du théorème d'inversion locale, hors programme mais à sa frontière. Il faut bien reconnaître qu'elle pouvait favoriser celles et ceux qui en avaient déjà connaissance, ce que le sujet évitait *dans la mesure du possible*. La question 2, application classique du même théorème, montrait clairement les limites de son assimilation.

1.a. • Le début de la question, portant sur l'application g, a donné lieu à de nombreuses erreurs, certaines très surprenantes à ce stade (comme écrire que « $\varphi = Df(0)$ est C^1 parce que f l'est »). D'assez nombreuses copies essaient d'établir l'estimation demandée sur Dg par un développement limité en zéro plutôt qu'en utilisant sa continuité, mais presque jamais de façon convaincante.

• L'injectivité de f a été beaucoup moins souvent traitée ; les solutions les plus efficaces utilisent l'inégalité des accroissements finis - mais négligent le plus souvent de mentionner la nécessaire convexité du domaine (cette omission n'a cependant pas été sanctionnée). Certaines copies préfèrent utiliser une preuve par intégration, ce qui est licite dans le cadre C^1 de l'énoncé.

1.a.	Abordée dans 658 copies	138 réponses complètes	40 réponses partielles

1.b.
- Question plutôt bien traitée en général. Cependant, trop de copies utilisent des développements limités et des passages à la limite imprécis, permettant *trop facilement* de se débarrasser des termes gênants. Notons aussi quelques imprécisions de forme : écrire

$$\|g(x) - g(0)\| \leqslant \operatorname*{Sup}_{x \in B(0,r)} \|Dg(x)\| \|x\|$$

est bien sûr incorrect.

1.b.	Abordée dans 439 copies	232 réponses complètes	15 réponses partielles

1.c.
- Beaucoup de copies reconnaissent qu'il s'agit d'établir que la fonction h admet un point fixe sur $B(0, r)$. Comme on l'a signalé en introduction, cette question était certainement facilitée par la connaissance des théorèmes de point fixe les plus classiques, désormais hors programme. Le jury a veillé à ce que l'invocation de résultats hors programme (théorèmes de Banach-Picard ou de Brouwer), *sans aucun argument ou sans explication précise*, ne suffise pas à obtenir un nombre significatif de points.
- Il est cependant relativement rare que le théorème du point fixe de Picard soit nommément évoqué : la plupart des copies ayant résolu cette question construisent correctement un point fixe en utilisant une suite d'itérés (il fallait pour cela expliquer pourquoi la convergence des itérées d'un point par la fonction h implique que sa limite est un point fixe, sans oublier de souligner que $B(0, r]$ est fermé et dans un espace de dimension finie). D'autres copies reprennent l'exercice classique du point fixe d'une application contractante sur un métrique compact et certaines enfin mélangent les deux approches.

1.c.	Abordée dans 318 copies	76 réponses complètes	42 réponses partielles

1.d.
- La seule partie délicate de la question était d'établir que f^{-1} est continue sur W. Cette difficulté n'a été vue qu'assez rarement, encore moins vaincue : moins de 30 copies ont complètement résolu la question.

1.d.	Abordée dans 348 copies	27 réponses complètes	15 réponses partielles

2.
- Cette question n'a pas souvent été bien traitée (moins d'une centaine de réponses complètes) : il ne suffisait pas d'évoquer vaguement une analogie avec les raisonnements précédents au voisinage de tout point de $\mathcal{O}$. Les réponses les plus efficaces reviennent à appliquer, pour tout point x_0 de $\mathcal{O}$, les résultats de la question précédente à l'application $h \mapsto f(x_0 + h) - f(x_0)$.
- Rappelons que l'image d'un ouvert par une application continue n'est pas ouverte en général !

2.	Abordée dans 208 copies	82 réponses complètes	17 réponses partielles

3.a.
- Cette question, peut-être la plus facile du sujet, a été très souvent tentée et réussie, notamment dans les copies « opportunistes ». Attention cependant : comme la question était « montrer que $P(0) = P'(0) = 0$ et que X^2 divise P », il n'est pas acceptable de répondre « on a montré que $P(0) = P'(0) = 0$ *donc* X^2 divise P ». Cette dernière déduction demande un minimum de justification.

3.a.	Abordée dans 479 copies	386 réponses complètes	74 réponses partielles

3.b.
- Cette question a été souvent abordée, même si peu de copies parviennent à montrer de façon tout à fait complète l'existence des dérivées partielles $\partial_j Y_i$: lorsque $i = j$, l'utilisation des théorèmes classiques de régularité sous le signe $\int$ n'est pas immédiate.

- Les arguments fonctionnant pour tout couple (i, j) utilisent généralement, dans les copies, l'une des deux stratégies suivantes : (a) se ramener, par un changement de variable à une intégrale sur $[0, 1]$, ou (b) commencer le calcul d'intégrale pour constater que la fonction Y_i est polynomiale par rapport à la variable x_j.
- La fin de la question (caractère C^1 de Y et inclusion $Y(O_{n-1}) \subset U_{n-1}$) n'a pas posé de problème particulier, mais beaucoup de copies se limitent à montrer que la fonction est à valeurs dans l'adhérence de U_{n-1} sans justifier les inégalités strictes.
- Très peu de copies enfin ont vérifié que O_{n-1} est ouvert, ce qui n'était pas demandé de manière explicite dans le texte et n'a pas été sanctionné.

3.b.	Abordée dans 420 copies	46 réponses complètes	192 réponses partielles

3.c.
- Cette question a été abordée de manière significative dans une bonne centaine de copies, presque toujours de façon réussie. La plupart évaluent une relation de liaison en x_i, d'autres utilisent la base des polynômes interpolateurs de Lagrange, certaines, plus rares, utilisent l'unicité de la décomposition en éléments simples.

3.c.	Abordée dans 239 copies	109 réponses complètes	20 réponses partielles

3.d.
- La plupart des copies ayant réussi la question précédente réussissent celle-ci également, en appliquant le résultat précédent – sans toujours mentionner que les x_i sont non nuls et tous distincts.

3.d.	Abordée dans 182 copies	69 réponses complètes	18 réponses partielles

4.a.
- La plupart des réponses correctes font appel à l'équivalence des normes. L'importance de la dimension finie n'est pas toujours suffisamment soulignée et certaines copies peinent à mener leur argumentation à terme.
- Il était possible de reconnaître dans C_n la distance, dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme L^1, entre le polynôme X^n et le sous-espace fermé $\mathbb{R}_{n-1}[X]$; mais cette stratégie n'a presque jamais été adoptée.

4.a.	Abordée dans 267 copies	69 réponses complètes	32 réponses partielles

4.b.
- Question plutôt bien traitée dans les copies qui l'ont abordée. Les candidats ne voient pas toujours que le polynôme introduit dans leur réponse n'est unitaire qu'à un signe près.

4.b.	Abordée dans 130 copies	66 réponses complètes	14 réponses partielles

4.c.
- Cette question était plutôt facile, mais probablement du fait de sa position dans l'épreuve, elle a été peu abordée, avec des réponses parfois laborieuses. Une description explicite de l'adhérence de O_{n-1}, même sans démonstration, était utile mais n'a été que très rarement donnée.

4.c.	Abordée dans 78 copies	29 réponses complètes	19 réponses partielles

4.d.
- Cette question présentait une difficulté. Il fallait bien sûr utiliser la question précédente pour montrer que l'ensemble $Y^{-1}(K)$ est borné, ce qui a été fait dans une petite cinquantaine de copies, mais cela ne suffisait pas pour conclure : un fermé de O_{n-1} n'est pas nécessairement un fermé de $\mathbb{R}^{n-1}$. Pour contourner cette difficulté, on utilisait le prolongement continu $\widehat{Y}$ de la question précédente. Il suffisait alors de vérifier que $\widehat{Y}^{-1}(K)$, fermé et borné, donc compact, est contenu dans O_{n-1} et coïncide donc avec $Y^{-1}(K)$. Seules deux copies ont vu cette subtilité et résolu (presque) complètement la question.

4.d.	Abordée dans 91 copies	1 réponse complète	4 réponses partielles

5. • Le fait que $Y(O_{n-1})$ soit ouvert et l'argument de connexité permettant de montrer que Y est surjective ont été correctement traités dans la majorité des copies ayant abordé cette question. En revanche, les difficultés de topologie mentionnées à la question précédente ont induit des confusions lorsqu'il s'agissait de montrer que $Y(O_{n-1})$ est fermé : cela a été fait de façon satisfaisante dans un peu moins de 20 copies.

5.	Abordée dans 83 copies	10 réponses complètes	15 réponses partielles

6. • Cette question difficile, qui demandait du recul sur les deux premières parties, a été très peu abordée : trois copies ont proposé une solution presque aboutie, et quatre autres une piste montrant que l'esprit de la question était bien compris.

6.	Abordée dans 28 copies	1 réponse complète	2 réponses partielles

Partie III

Trop peu de candidats osent ici se lancer dans des dessins. C'est dommage, ils auraient pourtant rendu les arguments combinatoires de cette partie beaucoup plus limpides.

1.
- Celles et ceux qui ont remarqué d'emblée que Opp est une involution ont gagné beaucoup de temps, y compris pour l'étude des images de $\mathrm{MD}(n)$ et $\mathrm{DM}(n)$. Mais ce n'est pas le plus fréquent : beaucoup s'en rendent compte après avoir déjà démontré qu'elle est bijective.
- Très peu de copies vérifient que $\mathrm{Opp}(\sigma)$ est bien élément de Σ_n. Quelques candidats considèrent comme évident que $\mathrm{MD}(n)$ et $\mathrm{DM}(n)$ sont équipotents alors que c'est une partie de la question.
- Pour la seconde partie de la question, plusieurs copies ne mettent pas suffisamment en avant le rôle joué par le caractère bijectif de l'application σ.

1.	Abordée dans 792 copies	325 réponses complètes	337 réponses partielles

2.
- Cette question était difficile et s'est révélée être assez discriminante : l'inégalité $n \geqslant k+1$ est très souvent mentionnée comme condition nécessaire pour que $\mathcal{B}(n,k)$ soit non vide, mais moins de 200 copies ont su montrer avec assez de soin que cette condition était suffisante.
- Pour ce dernier point, beaucoup de copies initialisent correctement leur raisonnement pour $\sigma(1)$ et $\sigma(2)$ mais se perdent ensuite dans les détails du prolongement, faute d'un argument conceptuel pour conclure. Une jolie réponse consistait à poser $\sigma(1) = n-k$, $\sigma(2) = n+1$ et à prolonger par un élément quelconque de $\mathrm{MD}(n-1)$ composé par l'unique bijection croissante de $\{1,\ldots,n-1\}$ sur $\{1,\ldots,n\}\backslash\{n-k\}$.
- L'étude de $\mathcal{C}(n,s,k)$ s'est révélée plus difficile. Beaucoup de copies, ayant vraisemblablement consacré un temps conséquent à $\mathcal{B}(n,k)$, passent trop vite sur cette étude, si bien que le cas limite $s=0$ et $k<n$ n'a été vu que très rarement. Au total, une vingtaine de personnes l'ont abordée de façon très satisfaisante, dont 12 copies ont obtenu tous les points.

2.	Abordée dans 665 copies	12 réponses complètes	57 réponses partielles

Les questions **3.a** à **4.a**, de nature combinatoire, ont été très souvent abordées et bien comprises (dans environ un quart des copies). Mais la qualité des explications n'était pas toujours au rendez-vous. En particulier, certains arguments de dénombrement étaient difficilement compréhensibles : c'était le cas, notamment, de beaucoup d'explications basées sur un « pire des cas » non précisé.

3.a. • Question correctement traitée quand elle est abordée. Certains candidats font un décompte maladroit en oubliant que l'inégalité $\sigma(1) > \sigma(3)$ est possible (et trouvent ainsi un nombre minimal d'indices égal à $k+1$). D'autres étudient sans justification ce qui leur semble être « le pire des cas possibles » évoqué précédemment.

3.a.	Abordée dans 416 copies	279 réponses complètes	23 réponses partielles

3.b. • Question bien traitée en général, l'absence de prérequis en faisait une cible facile pour les copies opportunistes.

3.b.	Abordée dans 465 copies	370 réponses complètes	57 réponses partielles

3.c. • Même remarque. Le caractère bijectif de l'application est rarement vérifié, il fallait en particulier bien mentionner le rôle de la stricte croissance de β.

3.c.	Abordée dans 411 copies	357 réponses complètes	14 réponses partielles

3.d. • Cette question a été plutôt bien traitée dans les copies qui ont abordé toutes les questions précédentes de la partie.

3.d.	Abordée dans 392 copies	355 réponses complètes	10 réponses partielles

4.a. • Les décomptes sont parfois maladroits mais en général la réponse est correcte.

4.a.	Abordée dans 293 copies	206 réponses complètes	7 réponses partielles

4.b. • Même remarque que pour la question précédente. C'est à ce point de la partie que la fatigue s'est clairement fait sentir et c'est souvent le point d'abandon : moins de 100 copies abordent significativement cette question, et la moitié seulement poursuit au-delà.

4.b.	Abordée dans 130 copies	70 réponses complètes	15 réponses partielles

4.c. • Le candidat correct pour l'antécédent σ dans $\mathcal{B}(n,k)$ est généralement trouvé et les copies vérifient correctement son domaine d'appartenance. En revanche, aucune copie ne prouve de manière totalement convaincante que cette permutation σ est bien envoyée sur η : la difficulté de la composition par une fonction β n'est pas correctement prise en compte (un dessin est particulièrement utile pour ce point particulier).

4.c.	Abordée dans 116 copies	10 réponses complètes	66 réponses partielles

4.d. • Même constat pour l'injectivité de l'application ψ, quelques belles tentatives cependant. Une prise en compte correcte des termes de bord nécessitait d'avoir traité correctement la question 2. Certains candidats ont aussi été gênés par la nécessité d'incorporer dans cette question le cas où $k=0$, et ont essayé de contourner l'équipotence entre $\mathcal{B}(n,0)$ et $\mathcal{C}(n,0,s)$ (bien qu'elle soit vraie, ces deux ensembles pouvant facilement être mis en bijection avec $\mathrm{MD}(n)$).

4.d.	Abordée dans 94 copies	8 réponses complètes	4 réponses partielles

5. • Il était particulièrement délicat de mener complètement à bien cette question : seules 4 copies sont parvenues à une solution contenant l'essentiel.

4.b.	Abordée dans 86 copies	0 réponse complète	4 réponses partielles

Partie IV

Le début de cette partie a été souvent traité : entre un quart et un tiers des copies aborde les questions **1** à **3**.**a**. Les réponses deviennent beaucoup plus rares à partir de la question **3**.**b**. et presque personne ne va au-delà de **6**.**a**..

Le texte ne donnait pas explicitement les valeurs des conditions initiales E_0 et E_1, qu'il s'agissait donc de choisir de manière pertinente dans la question 1. Ce choix se trouvait immédiatement confirmé ou infirmé à la lecture de la question 2.c (développements en séries entières de fonctions classiques). Le barème a tenu compte de cette légère ambiguïté.

1.a.
- De nombreuses maladresses se sont avérées être rédhibitoires (par exemple, confusion entre MD et DM dans le cours des preuves, etc).
- Parmi les copies qui proposent une partition correcte de $\mathrm{MD}(n+1)$ suivant la valeur de $i = \sigma^{-1}(1)$, peu ont remarqué que la restriction de σ à $\{i+1, \ldots, n+1\}$ était naturellement conjuguée à une permutation du type « descente-montée ».
- La différence entre $\mathrm{MD}(k)$ et l'ensemble des bijections vérifiant la condition de montée-descente mais dont les ensembles de départ et d'arrivée ne sont pas $\{1, \ldots, k\}$ n'est pas souvent bien perçue.

1.a.	Abordée dans 344 copies	43 réponses complètes	60 réponses partielles

1.b.
- Cette question était souvent correctement traitée si la précédente l'était.
- Beaucoup de copies n'ayant pas réussi la question précédente (et parfois même l'ayant réussie) tentent un changement de variable pour ramener la somme indexée par les i pairs à la somme précédente, ce qui n'aboutissait pas.

1.b.	Abordée dans 379 copies	37 réponses complètes	16 réponses partielles

2.a.
- Cette question est général bien traitée, là encore, elle est une cible facile pour les copies opportunistes.
- Beaucoup de copies utilisent correctement l'inclusion $\mathrm{MD}(n) \subset \Sigma_n$ pour en déduire l'inégalité $E_n \leqslant n!$. Assez curieusement, d'autres (y compris de bonnes copies) démontrent longuement cette inégalité par récurrence à partir de la question précédente.
- Quelques copies malheureuses ont essayé d'utiliser un critère de D'Alembert (sans précaution et sans succès).

2.a.	Abordée dans 476 copies	337 réponses complètes	17 réponses partielles

2.b.
- La plupart des copies ne justifient pas convenablement la dérivation terme à terme ou le produit de Cauchy (citer précisément un théorème aurait suffi).
- Les copies qui n'ont pas fait les bons choix d'initialisation pour E_0 et E_1 mais qui ont été cohérentes avec ces choix (et n'ont donc pas trouvé la bonne équation différentielle) ont été avantagées par rapport à celles qui ont essayé d'obtenir la bonne équation en trichant sur les réindexations des sommes.

2.b.	Abordée dans 569 copies	83 réponses complètes	274 réponses partielles

2.c.
- La moitié environ des copies qui ont traité cette question ont admis la relation de trigonométrie de l'énoncé.

- Beaucoup de copies évoquent un argument d'unicité des solutions des équations différentielles. Peu relèvent qu'il s'agit d'une équation différentielle non-linéaire. Si on ne peut pas faire grief à certains candidats d'avoir entendu parler du théorème de Cauchy-Lipschitz non linéaire (hors programme), on ne peut pas considérer comme une réponse correcte de l'invoquer sans aucune justification (ce théorème requiert des hypothèses spécifiques !).
- Cependant, un nombre conséquent de copies observent que l'équation est à variables séparées et la résolvent directement. Parmi celles-ci, trop intègrent $t \mapsto y'(t)/(1+y^2(t))$ entre 0 et x sans mentionner la continuité de l'intégrande pour justifier leur calcul. Un argument de calcul de primitive plutôt que d'intégrale aurait dans ce cas été plus heureux.
- Quelques copies notent et démontrent que l'équation différentielle donne lieu à une unique solution développable en série entière au voisinage de zéro et exploitent ce fait pour établir la formule trigonométrique et la solution de l'équation. L'absence d'argument de prolongement analytique n'a pas été pénalisée (seule la série génératrice est importante pour la suite du problème).
- Quant à la séparation des parties paire et impaire, elle est presque toujours réussie et n'a pas posé de problème particulier.

2.c.	Abordée dans 498 copies	19 réponses complètes	178 réponses partielles

3.a.
- Question généralement bien traitée.
- Quelques bonnes copies ont perdu des points ici en rédigeant trop rapidement la récurrence (mauvaise mise en place de l'hérédité, absence de statut de la variable de récurrence, oubli de l'initialisation etc.).
- Certaines copies semblent penser que tout opérateur linéaire sur un espace fonctionnel commute avec l'opérateur de dérivation.

3.a.	Abordée dans 380 copies	117 réponses complètes	11 réponses partielles

3.b.
- Question bien traitée par la quasi-totalité des copies qui l'abordent.
- Certaines copies sont cependant maladroites et perdent du temps pour montrer la linéarité de l'application δ_m, alors qu'un simple argument de composition d'applications linéaires suffisait.

3.b.	Abordée dans 311 copies	244 réponses complètes	16 réponses partielles

4.a.
- Question le plus souvent bien traitée.

4.a.	Abordée dans 269 copies	197 réponses complètes	12 réponses partielles

4.b.
- Question le plus souvent bien traitée.
- Quelques erreurs de signe entre $C(0)$ et $\det M_m$, sans incidence sur le résultat final, mais sanctionnées.
- Quelques copies ne font pas le lien avec la question précédente et calculent directement la relation de récurrence du déterminant par un développement suivant une ligne ou une colonne.

4.b.	Abordée dans 218 copies	91 réponses complètes	10 réponses partielles

4.c.
- Cette question a rarement reçu une réponse satisfaisante. Beaucoup de copies qui abordent la question ont le bon angle d'approche, mais elles abandonnent en cours de route.

4.c.	Abordée dans 94 copies	12 réponses complètes	14 réponses partielles

5.a.

- Cette question était l'une des plus faciles du sujet, mais pour obtenir les points il fallait faire preuve d'un minimum de soin : beaucoup de copies ont oublié de vérifier que τ_α laisse stable $\mathcal{P}_k$ ou omis de mentionner sa bijectivité.

5.a.	Abordée dans 157 copies	49 réponses complètes	30 réponses partielles

5.b.

- Le problème de la cardinalité de chaque classe d'équivalence est généralement sous-estimé : seules 20 copies prennent au sérieux cette partie de la question. Le reste ne pose pas de problème.

5.b.	Abordée dans 140 copies	13 réponses complètes	50 réponses partielles

5.c.

- Question rarement abordée. La « partition en orbites » de l'action est en général bien observée dans les copies qui s'y sont lancées.

5.c.	Abordée dans 56 copies	11 réponses complètes	12 réponses partielles

6.

- La question 6.a. a été fréquemment abordée, notamment chez les copies opportunistes. Pas d'erreur significative.

Le reste de la partie a très peu été abordé, sauf dans quelques copies excellentes.

Partie V

- Seule l'égalité des cardinaux de **1.a** a été souvent abordée. La seconde partie de la question a donné lieu à un certain nombre de réponses difficilement compréhensibles ; mais peut-être faut-il ici seulement blâmer la fatigue.
- Une vingtaine de copies poursuit l'étude de la partie V jusqu'à la question **1.c** ; parmi ces copies, la moitié donne des réponses convaincantes aux questions **1.b** et **1.c**.
- À partir de la question **2**, les tentatives se font extrêmement rares. Au-delà de la question **4.b**, l'étude du sujet n'est poursuivie que dans deux copies : ces dernières avaient délibérément abordé la partie V immédiatement après la partie I.