ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

CONCOURS D'ADMISSION 2021 FILIÈRE MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES - D - (U)

Produit de matrices aléatoires : le théorème de Furstenberg-Kesten

Corrigé par Erwan Biland, Jeremy Daniel, Serge Dupont et Tony Ly

0). Question préliminaire.

La famille $(Z^{(n)})_{n\geqslant 1}$ est constituée de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées selon la loi μ. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on sait que $\log|Z^{(n)}|$ est une variable aléatoire dont la loi est entièrement déterminée par celle de $Z^{(n)}$. Donc les $\log|Z^{(n)}|, n \geqslant 1$, sont indépendantes et identiquement distribuées d'après le lemme des coalitions.

De plus, la loi μ est à support fini, donc la loi des $\log|Z^{(n)}|$ aussi. Ces variables aléatoires admettent donc une espérance et une variance communes, que l'on note E et V.

Pour $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{1}{n}\log|\Psi_n| = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log|Z^{(k)}|$.

Donc, par linéarité, $\log|\Psi_n|$ est une variable aléatoire admettant espérance et variance.

De plus, $\mathbb{E}[\log|\Psi_n|] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\log|Z^{(k)}|] = E$, et $\mathbb{V}[\log|\Psi_n|] = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n \mathbb{V}[\log|Z^{(k)}|] = \frac{V}{n}$ (car les $\log|Z^{(k)}|$ sont deux à deux indépendantes).

Par le théorème de Bienaymé-Thebychev, on en déduit, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\Big(\big|\log|\Psi_n| - E\big| > \varepsilon\Big) \leqslant \frac{V}{n\varepsilon^2}.$$

Par encadrement, on obtient $\forall\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\Big(\big|\log|\Psi_n| - E\big| > \varepsilon\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, c'est-à-dire $\log|\Psi_n| \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} E$.

On pouvait aussi invoquer – avec ses hypothèses – la loi des grands nombres.

Partie I. Puissance d'une matrice et théorème de Gelfand

(par Tony Ly)

1). Montrer $\|\!|AB|\!\|\leqslant \|\!|A|\!\|\cdot\|\!|B|\!\|$.

On sait que $\|\!|A|\!\|$, $\|\!|B|\!\|$ et $\|\!|AB|\!\|$ existent par continuité de $x \mapsto Ax$ (et analogues) et compacité de la boule unité de $\mathbb{C}^d$. De plus, on sait, par homogénéité de $\|\ \|$:

$$\|\!|A|\!\| = \sup_{\|x\|=1}\|Ax\| = \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

On a donc pour tout x non nul de $\mathbb{C}^d$ (et aussi évidemment pour x nul) $\|Ax\| \leqslant \|\!|A|\!\|\|x\|$. De cela, on déduit, pour $x \in \mathbb{C}^d$ vérifiant $\|x\| = 1$:

$$\|ABx\| \leqslant \|\!|A|\!\|\cdot\|Bx\| \leqslant \|\!|A|\!\|\cdot\|\!|B|\!\|\cdot\|x\| = \|\!|A|\!\|\cdot\|\!|B|\!\|,$$

et donc $\|\!|AB|\!\| \leqslant \|\!|A|\!\|\cdot\|\!|B|\!\|$ en passant à la borne supérieure sur x non nul.

2). Montrer, pour tout $n\geqslant 1$, $\rho(A)^n \leqslant \|\!|A^n|\!\|$.

Comme Spec A est fini et non vide (sur $\mathbb{C}$!), $\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Spec } A} |\lambda|$ est bien défini.

Prenons $x_0 \in \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé à une valeur propre λ_0 de A vérifiant $\rho(A) = |\lambda_0|$. On a alors, pour $n \geqslant 1$ entier :

$$\|A^n x_0\| = \|\lambda_0^n x_0\| = |\lambda_0|^n \|x_0\| = \rho(A)^n \|x_0\|.$$

D'où $\forall n \geqslant 1,\ \|A^n\| \geqslant \rho(A)^n$.

3). Contrôle des coefficients d'une puissance de matrice triangulaire supérieure.

On suppose $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant d} \in M_d(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure.

3a). Montrer que, pour $i \leqslant j$, on peut écrire $(A^n)_{i,j} = ...$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \leqslant j$ dans $[\![1, d]\!]$, on note $\mathcal{E}_n(i,j) = \Big\{(i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n) \in [\![1, d]\!]^{2n} \;\Big|\; i = i_1 \leqslant j_1 = i_2 \leqslant j_2 = i_3 \leqslant \cdots = i_n \leqslant j_n = j,\ \#\{k \in [\![1, n]\!] \mid i_k \neq j_k\} \leqslant d-1\Big\}$.

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ l'énoncé : HR_n : « pour tous $i \leqslant j$ dans $[\![1, d]\!]$, on a $(A^n)_{i,j} = \sum_{(i_1,j_1,\ldots,j_n) \in \mathcal{E}_n(i,j)} \prod_{k=1}^{n} a_{i_k,j_k}$ ».

L'initialisation HR_1 vient de ce que l'on a $\mathcal{E}_1(i,j) = \{(i,j)\}$ pour tous $i \leqslant j$, et donc $(A^1)_{i,j} = a_{i,j}$ comme voulu.

Supposons HR_n réalisée pour un $n \in \mathbb{N}^*$ et montrons HR_{n+1}. Soient $i \leqslant j$ dans $[\![1, d]\!]$. On sait :

$$(A^{n+1})_{i,j} = \sum_{k=1}^{d} (A^n)_{i,k}\, a_{k,j} = \sum_{k=i}^{j} (A^n)_{i,k}\, a_{k,j}.$$

Puis par utilisation de HR_n :

$$(A^{n+1})_{i,j} = \sum_{k=i}^{j} \sum_{(i_1,j_1,\ldots,j_n) \in \mathcal{E}_n(i,k)} a_{i_1,j_1} \cdots a_{i_n,j_n} a_{k,j}.$$

Reste à observer

$$\mathcal{E}_{n+1}(i,j) = \coprod_{k=i}^{j} \Big\{(i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n, k, j) \;\Big|\; j_n = k, (i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n) \in \mathcal{E}_n(i,k)\Big\};$$

la seule condition à commenter est celle des au plus $d-1$ sauts d'indices. Si $(i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n, k, j)$ est tel qu'il y en a au plus $d-2$ dans $(i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n)$, il n'y a rien à dire. S'il y en a déjà $d-1$ dans $(i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n)$, c'est que l'on a $i = 1 = i_1$ et $j_n \geqslant d - 1 + 1 = d$: d'où $j_n = k = d$ et donc $j = d$. Alors il n'y en a pas plus de $d-1$ dans $(i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n, k, j)$ non plus.

Au total, on a $(A^{n+1})_{i,j} = \sum_{(i_1,j_1,\ldots,j_{n+1}) \in \mathcal{E}_{n+1}(i,j)} \prod_{k=1}^{n+1} a_{i_k,j_k}$: c'est HR_{n+1} et la récurrence est terminée.

Cette condition des $d-1$ sauts est en fait automatique mais son introduction ici est un coup de pouce pour l'obtention de la majoration à effectuer en question 3c.

3b). Calcul de $\#\mathcal{E}_n(i,j)$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \leqslant j$ dans $[\![1, d]\!]$, notons

$$\mathcal{SC}_n(i,j) = \big\{(u_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{N}^{n+1} \text{ strictement croissante} \;\big|\; u_0 = 0,\ u_n = n + (j - i)\big\}.$$

On définit

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{E}_n(i,j) & \to & \mathcal{SC}_n(i,j) \\ & (i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n) & \mapsto & (i_1 - i, j_1 - i + 1, j_2 - i + 2, \ldots, j_n - i + n) \end{array}.$$

Grâce aux $+1,+2,\dots,+n$, la suite à l'arrivée est bien strictement croissante. Et de $i_1=i, j_n=j$, on tire $i_1-i=0$ et $j_n-i+n=n+(j-i)$. Donc φ est bien à valeurs dans $\mathcal{SC}_n(i,j)$.

On définit de plus

$$\begin{array}{rccl} \psi: & \mathcal{SC}_n(i,j) & \to & \mathcal{E}_n(i,j) \\ & (u_0,\dots,u_n) & \mapsto & (u_0+i, u_1+i-1, u_1+i-1, u_2+i-2, u_2+i-2,\dots \\ & & & \dots, u_{n-1}+i-(n-1), u_{n-1}+i-(n-1), u_n+i-n) \end{array}.$$

Comme (u_k) est strictement croissante, les $-1,-2,\dots,-n$ font que la suite à l'arrivée est croissante. De plus $u_0=0, u_n=n+(j-i)$ poussent à avoir $u_0+i=i$ et $u_n+i-n=j$. Reste à voir que, à cause de $1\leqslant i\leqslant j\leqslant d$, on a $u_0=0\leqslant u_n=n+(j-i)\leqslant n+(d-1)$: avec la stricte croissance, cela impose qu'à l'arrivée de ψ il y a au plus $d-1$ sauts. Donc ψ est bien à valeurs dans $\mathcal{E}_n(i,j)$.

Et φ et ψ sont des applications réciproques l'une de l'autre. D'où $\#\mathcal{E}_n(i,j)=\#\mathcal{SC}_n(i,j)$.

Or, pour dénombrer $\mathcal{SC}_n(i,j)$, il suffit de choisir les $n-1$ entiers distincts $u_1,\dots,u_{n-1}$ dans $[\![1,n+j-i-1]\!]$ car u_0 et u_n sont déjà déterminés. On a donc

$$\#\mathcal{E}_n(i,j)=\#\mathcal{SC}_n(i,j)=\binom{n-1+(j-i)}{n-1}.$$

3c). En déduire que les coefficients de A^n sont bornés par ...

Soit $n\geqslant d$ et soient $i\leqslant j$ dans $[\![1,d]\!]$.

Notons $\|A\|_\infty=\max\{|a_{k,\ell}| \mid 1\leqslant k\leqslant \ell\leqslant d\}$ (puisque A est triangulaire supérieure). Comme A est triangulaire supérieure, on a $\operatorname{Spec} A=\{a_{1,1},\dots,a_{d,d}\}$ et donc $\rho(A)\leqslant\|A\|_\infty$.

Pour $(i_1,j_1,\dots,i_n,j_n)\in\mathcal{E}_n(i,j)$, en notant $f\leqslant d-1$ le nombre de sauts, on observe

$$\Big|\prod_{k=1}^n a_{i_k,j_k}\Big|\leqslant\|A\|_\infty^f\rho(A)^{n-f}\leqslant\|A\|_\infty^{d-1}\rho(A)^{n-(d-1)}.$$

Cette dernière quantité est indépendante de $(i_1,j_1,\dots,i_n,j_n)$. Reste à majorer

$$\#\mathcal{E}_n(i,j)=\binom{(n-1)+(j-i)}{n-1}=\binom{(n-1)+(j-i)}{j-i}.$$

Comme on a $j-i\leqslant d-1\leqslant n-1$, et que :

- à k fixé, $x\mapsto\binom{n-1+x}{k}$ est croissante,
- à k fixé, $x\mapsto\binom{n-1+k}{x}$ est croissante jusqu'à $\left\lfloor\dfrac{n-1+k}{2}\right\rfloor$,

il s'ensuit

$$\#\mathcal{E}_n(i,j)\leqslant\binom{n-1+d-1}{j-i}\leqslant\binom{n-1+d-1}{d-1}.$$

Puis

$$\#\mathcal{E}_n(i,j)\leqslant\frac{(n-1+d-1)^{d-1}}{(d-1)!}\leqslant\frac{(2n)^{d-1}}{(d-1)!}.$$

On utilise cette majoration dans l'expression prouvée en 3a) :

$$\big|(A^n)_{i,j}\big|\leqslant\frac{2^{d-1}}{(d-1)!}\|A\|_\infty^{d-1}\rho(A)^{n-(d-1)}n^{d-1}.$$

Dans le cas où A est nilpotente, comme on a $n\geqslant d$, les coefficients de A^n sont tous nuls et il n'y a rien à dire. Dans le cas contraire, on a $\rho(A)\neq 0$ et on peut noter $C_A=\dfrac{1}{(d-1)!}\left(\dfrac{2\|A\|_\infty}{\rho(A)}\right)^{d-1}$ pour conclure :

$$\big|(A^n)_{i,j}\big|\leqslant C_A\cdot n^{d-1}\cdot\rho(A)^n.$$

On pouvait aussi utiliser que $\binom{n-1+d-1}{d-1} = O(n^{d-1})$ quand n tend vers $+\infty$, ce qui donne $\left|(A^n)_{i,j}\right| \leqslant O(n^{d-1} \cdot \rho(A)^n)$, ce que l'on voulait.

4). En déduire le théorème de Gelfand.

On revient à $A \in M_d(\mathbb{C})$ générale, non nécessairement triangulaire supérieure.

<u>Cas $\rho(A) = 0$</u> : comme toute matrice de $M_d(\mathbb{C})$ est trigonalisable, A est alors semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte. Donc A est nilpotente et on a $A^n = 0$ pour tout entier $n \geqslant d$. D'où

$$\frac{1}{n} \log \|A^n\| = -\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty = \log \rho(A).$$

<u>Cas $\rho(A) > 0$</u> :

Prenons $B \in M_d(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure et $P \in GL_d(\mathbb{C})$ vérifiant $A = P^{-1}BP$.

Pour $x \in \mathbb{C}^d$, notons $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $Px = (y_1, \ldots, y_d)$. Pour $n \geqslant d$, on a

$$\|A^n x\|^2 = \|P^{-1}B^n(Px)\|^2 \leqslant \|P^{-1}\|^2 \cdot \|B^n(Px)\|^2.$$

Puis

$$\|A^n x\|^2 \leqslant \|P^{-1}\|^2 \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} \left|(B^n)_{i,j}\right| |y_j| \right)^2$$

Et en utilisant la question 3c avec C_B définie pour B comme ci-dessus, on obtient :

$$\|A^n x\|^2 \leqslant \|P^{-1}\|^2 d \|Px\|^2 \big(C_B n^{d-1} \rho(B)^n\big)^2.$$

On a $\rho(B) = \rho(A)$ et par suite

$$\|A^n x\|^2 \leqslant d \|P^{-1}\|^2 \|P\|^2 \big(C_B n^{d-1} \rho(B)^n\big)^2 \|x\|^2.$$

D'où, pour $n \geqslant d$:

$$\|A^n\| \leqslant \sqrt{d} C_B \cdot \|P^{-1}\| \cdot \|P\| \cdot n^{d-1} \rho(A)^n.$$

A l'aide de la question 2, en notant $D_A = \sqrt{d} C_B \cdot \|P^{-1}\| \cdot \|P\|$, on a

$$\log \rho(A) \leqslant \frac{1}{n} \log \|A^n\| \leqslant \log \rho(A) + \frac{(d-1)\log n + \log D_A}{n}.$$

Grâce aux croissances comparées et par existence de limite par encadrement, il découle

$$\frac{1}{n} \log \|A^n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \log \rho(A).$$

On peut être moins explicite en remarquant que $M \mapsto \|PMP^{-1}\|_\infty$ est une norme sur $M_d(\mathbb{C})$, qui est donc équivalente à $\|\ \|$ (à la manière de la question suivante).

5). Théorème de Gelfand pour une autre norme.

Soit N une norme sur $M_d(\mathbb{C})$.

Comme $M_d(\mathbb{C})$ est de dimension finie, N et $\|\ \|$ sont équivalentes : on prend $K_1, K_2 > 0$ vérifiant

$$\forall M \in M_d(\mathbb{C}), \quad K_1 \|M\| \leqslant N(M) \leqslant K_2 \|M\|.$$

En particulier, on a pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{\log \|A^n\|}{n} + \frac{\log K_1}{n} \leqslant \frac{\log N(A^n)}{n} \leqslant \frac{\log \|A^n\|}{n} + \frac{\log K_2}{n}.$$

Comme les deux termes du bord tendent vers $\log \rho(A)$, par existence de limite par encadrement (ou majoration dans le cas $\rho(A) = 0$), il vient $\dfrac{\log N(A^n)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \log \rho(A)$.

6). Continuité du rayon spectral.

Résultats non utilisés par la suite. Il faut remarquer que la question 6b n'a pas de sens dans le cas A nilpotente, du moins pour n strictement supérieur à l'indice de nilpotence.

6a). Montrer $\|A^d\| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{d} \binom{d}{k} \rho(A)^k \|A^{d-k}\|$.

Notons $\chi = X^d + \alpha_1 X^{d-1} + \cdots + \alpha_{d-1} X + \alpha_d \in \mathbb{C}[X]$ le polynôme caractéristique (unitaire) de A. Par théorème de Cayley-Hamilton, on sait $\chi(A) = 0$ et donc $A^d = -\sum\limits_{k=1}^{d} \alpha_k A^{d-k}$. Il en découle $\|A^d\| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{d} |\alpha_k| \cdot \|A^{d-k}\|$ par inégalité triangulaire.

Reste à utiliser les relations racines-coefficients : notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ les éléments de Spec A (avec répétition selon la multiplicité). Pour $k \in [\![1, d]\!]$, on a

$$\alpha_k = (-1)^k \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant d} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \cdots \lambda_{i_k},$$

et donc

$$|\alpha_k| \leqslant \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant d} \rho(A)^k = \binom{d}{k} \rho(A)^k$$

car le nombre de k-uplets $(i_1, i_2, \cdots, i_k)$ vérifiant $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant d$ est exactement $\binom{d}{k}$.

Par les questions 1 et 2, on obtient

$$\|A^d\| \leqslant \rho(A) \sum_{k=1}^{d} \binom{d}{k} \rho(A)^{k-1} \cdot \|A\|^{d-k} \leqslant \rho(A) \cdot \|A\|^{d-1} \sum_{k=1}^{d} \binom{d}{k}.$$

Et finalement $\|A^d\| \leqslant (2^d - 1) \cdot \rho(A) \cdot \|A\|^{d-1}$.

6b). Encadrement de $\rho(A)^n$, et montrer ... $\xrightarrow[n\to\infty]{} \rho(A)$.

L'énoncé nécessite une hypothèse plus forte : on supposera dans cette question A non nilpotente.

Grâce à cette hypothèse on sait $\|A^n\| \neq 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

La matrice A est semblable dans $M_d(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire supérieure $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$: on a alors $\operatorname{Spec}(A^n) = \{b_{1,1}^n, \ldots, b_{d,d}^n\}$ pour tout $n \geqslant 1$; d'où $\rho(A^n) = \rho(A)^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'inégalité $\rho(A^n) \leqslant \|A^n\|$ a déjà été vue en question 2 : intéressons-nous à celle de gauche.

On applique la question 6a à A^n pour obtenir

$$\|A^{nd}\| \leqslant (2^d - 1) \cdot \rho(A^n) \cdot \|A^n\|^{d-1} \leqslant (2^d - 1) \cdot \rho(A)^n \cdot \|A^n\|^{d-1},$$

puis $\rho(A)^n \geqslant \dfrac{\|A^{nd}\|}{(2^d - 1) \cdot \|A^n\|^{d-1}}$.

Prenons $n \geqslant d$. Par la question 2, on a d'abord

$$\frac{\|A^{nd}\|}{(2^d - 1) \cdot \|A^n\|^{d-1}} \geqslant \frac{\rho(A)^{nd}}{(2^d - 1) \cdot \|A^n\|^{d-1}}.$$

Puis, on prend $P \in GL_d(\mathbb{C})$ et $B \in M_d(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure vérifiant $A = P^{-1} B P$. On prend aussi $C_B > 0$ comme en question 4 et on a

$$\frac{\|A^{nd}\|}{(2^d - 1) \cdot \|A^n\|^{d-1}} \geqslant \frac{\rho(A)^{nd}}{(2^d - 1) \big(\sqrt{d}\, C_B \, \|P^{-1}\| \, \|P\| \, n^{d-1} \rho(A)^n\big)^{d-1}}.$$

D'où, en notant $D_A = \sqrt{d}\, C_B \cdot \|P^{-1}\| \cdot \|P\|$, pour $n \geqslant d$:

$$\frac{\rho(A)}{\big((2^d - 1)\, D_A^{d-1}\big)^{\frac{1}{n}} n^{\frac{(d-1)^2}{n}}} \leqslant \left(\frac{\|A^{nd}\|}{(2^d - 1) \cdot \|A^n\|^{d-1}} \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \rho(A).$$

Par existence de limite par encadrement, il en découle $\left(\dfrac{|||A^{nd}|||}{(2^d-1)\cdot |||A^n|||^{d-1}}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \rho(A)$.

On pouvait aussi passer au log *dans l'inégalité et diviser par* nd *avant de faire tendre* n *vers* $+\infty$.

6c). Montrer que $A \mapsto \rho(A)$ est continue.

Sur l'espace vectoriel de dimension finie $M_d(\mathbb{C})$, toutes les normes sont équivalentes : on choisit de travailler avec la norme $|||\ |||$.

Soit $A_0 \in M_d(\mathbb{C})$. On veut voir la continuité de ρ en A_0.

Cas A_0 nilpotente :

On a, par la question 2 :

$$\left|\rho(A)-\rho(A_0)\right| = \left|\rho(A)\right| \leqslant |||A^d|||^{\frac{1}{d}}.$$

Le terme de droite tend vers $|||A_0^d|||^{\frac{1}{d}} = 0$ lorsque A tend vers A_0. Et donc par existence de limite par encadrement, ρ est continue en A_0.

Cas A_0 non nilpotente :

On commence par prouver un lemme.

Lemme. *Soit* $(E, \|\ \|)$ *un espace vectoriel normé. Soit* U *un ouvert de* E*. Soient* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *deux suites de fonctions continues sur* U *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. Soit* φ *une fonction sur* U *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. On suppose l'encadrement* $f_n \leqslant \varphi \leqslant g_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, et que* (f_n) *et* (g_n) *convergent simplement vers* φ*. Alors* φ *est continue sur* U*.*

Soit $x_0 \in U$. Soit $\varepsilon > 0$. On prend, par convergence simple de (f_n) et (g_n) vers φ en x_0, un $N \in \mathbb{N}^*$ qui vérifie

$$\forall n \geqslant N, \quad \left|f_n(x_0)-\varphi(x_0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \wedge \quad \left|g_n(x_0)-\varphi(x_0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puis, comme U est ouvert et que f_N et g_N sont continues en x_0, on prend un $\eta > 0$ assez petit pour que la boule ouverte de centre x_0 et rayon η soit incluse dans U et vérifiant

$$\forall x \in E, \quad \|x-x_0\| \leqslant \eta \Longrightarrow \left|f_N(x)-f_N(x_0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ \wedge\ \left|g_N(x)-g_N(x_0)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour $x \in E$ vérifiant $\|x-x_0\| \leqslant \eta$, on obtient

$$\varphi(x_0)-\varepsilon \leqslant f_N(x_0)-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant f_N(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant g_N(x) \leqslant g_N(x_0)+\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varphi(x_0)+\varepsilon.$$

C'est la continuité de φ en x_0 comme voulu.

Revenons à la continuité de ρ en A_0. On utilise la question 6b pour $n \geqslant 1$ et $A \in M_d(\mathbb{C})$ non nilpotente :

$$\left(\frac{|||A^{nd}|||}{(2^d-1)\cdot |||A^n|||^{d-1}}\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \rho(A) \leqslant |||A^n|||^{\frac{1}{n}}.$$

On considère alors l'ouvert U de $M_d(\mathbb{C})$ constitué des matrices non nilpotentes (car image réciproque de l'ouvert $M_d(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ par l'application continue $M \mapsto M^d$; on pourrait aussi utiliser l'ouvert $\mathbb{C}_d[X] \setminus \{X^d\}$ pour l'application polynôme caractéristique, qui est continue) ; puis on désigne par $f_n(A)$ et $g_n(A)$ les membres de gauche et droite respectivement de l'encadrement précédent.

Les suites de fonctions (f_n) et (g_n) sont continues sur U et convergent simplement vers ρ par la question 6b. Le résultat suit alors du lemme.

Partie II. Exposant de Lyapunov via la sous-additivité

(par Serge Dupont)

1.a) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $\frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_{k_0}}{k_0} + \frac{\max_{1\leqslant i\leqslant k_0-1}|u_i|}{n}$.

Remarquons que l'énoncé est faux ! On peut le corriger de diverses manières. On a choisi dans ce qui suit d'ajouter une valeur absolue dans le max*, ce qui permet de traiter la suite.*

On écrit $n = qk_0 + r$ où $0 \leqslant r \leqslant k_0 - 1$.

Premier cas : k_0 divise n, *i.e.* $r = 0$. Alors, par sous-additivité,

$$\frac{u_n}{n} = \frac{u_{qk_0}}{qk_0} \leqslant \frac{qu_{k_0}}{qk_0} \leqslant \frac{u_{k_0}}{k_0} + \frac{\max_{1\leqslant i\leqslant k_0-1}|u_i|}{n}.$$

Deuxième cas : k_0 ne divise pas n. Alors r est non nul et toujours par sous-additivité

$$u_n \leqslant u_{qk_0} + u_r \leqslant qu_{k_0} + u_r \leqslant qu_{k_0} + \max_{1\leqslant i\leqslant k_0-1}|u_i|.$$

Il ne reste qu'à diviser par n.

On a distingué deux cas car u_0 *n'existe pas.*

1.b). En déduire que $u_n/n \to \inf u_k/k \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$.

Premier cas : si $\inf_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n} = l > -\infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne inférieure, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $l \leqslant \frac{u_{k_0}}{k_0} \leqslant l+\varepsilon$. D'autre part, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geqslant N$, on a $\frac{\max_{1\leqslant i\leqslant k_0-1}|u_i|}{n} \leqslant \varepsilon$, car le terme de gauche tend vers 0 avec n. Donc pour tout $n \geqslant N$, d'après la question précédente,

$$l \leqslant \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_{k_0}}{k_0} + \varepsilon \leqslant l + 2\varepsilon.$$

Ce qui assure que u_n/n converge vers l.

Deuxième cas : si $\inf_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n} = -\infty$. On fixe un $A \leqslant 0$. Par définition de la borne inférieure, il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{u_{k_0}}{k_0} \leqslant A - 1$. Il suffit maintenant de choisir un rang $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour $n \geqslant N$, $\frac{\max_{1\leqslant i\leqslant k_0-1}|u_i|}{n} \leqslant 1$. On a ainsi, pour tout entier $n \geqslant N$, d'après la question précédente, que $\frac{u_n}{n} \leqslant A - 1 + 1 \leqslant A$. Par définition, u_n/n tend vers $-\infty$.

2.a) Montrer qu'il existe des constantes $\alpha, \beta > 0$ telles que...

D'après la question I.1, pour tout événement $\omega \in \Omega$:

$$\begin{aligned}\log \|\Psi_n(\omega)\| &\leqslant \log\left(\|M^{(n)}(\omega)\|\cdots\|M^{(1)}(\omega)\|\right)\\ &= \log\|M^{(n)}(\omega)\| + \cdots + \log\|M^{(1)}(\omega)\| \leqslant n \max_{1\leqslant i\leqslant n}\log\|s_i\|\end{aligned}$$

par croissance du logarithme et car $M^{(k)}$ est à valeurs dans $\{s_i \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$. En notant $\beta = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\log\|s_i\|$ et en passant à l'exponentielle, $\|\Psi_n(\omega)\| \leqslant \beta^n$ pour tout entier n.

Pour la minoration : on considère $M^{(n)}(\omega)^{-1}$ à valeurs dans $\{s_i^{-1} \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$. D'après la première partie de la question, on a $\|\Psi_n^{-1}(\omega)\| \leqslant \beta_1^n$ pour un $\beta_1 > 0$. Mais alors

$$1 = \|\Psi_n(\omega)\Psi_n(\omega)^{-1}\| \leqslant \|\Psi_n(\omega)\|\cdot\|\Psi_n(\omega)^{-1}\|.$$

En posant $\alpha = \frac{1}{\beta_1}$, on a bien $\alpha > 0$ et pour tout $\omega \in \Omega$

$$\|\Psi_n(\omega)\| \geqslant \frac{1}{\|\Psi_n(\omega)^{-1}\|} \geqslant \frac{1}{\beta_1^n} = \alpha^n.$$

2.b) Montrer que $(\mathbb{E}[\log\|\Psi_n\|])_{n\geqslant 1}$ et $(\log\mathbb{E}[\|\Psi_n\|])_{n\geqslant 1}$ sont sous-additives.

Pour $\omega \in \Omega$ et tous $n, p \in \mathbb{N}^*$,

$$\log\|\Psi_{n+p}(\omega)\| \leqslant \log\|M^{(n+p)}(\omega)\cdots M^{(p+1)}(\omega)\| + \log\|M^{(p)}(\omega)\cdots M^{(1)}(\omega)\|.$$

Les deux variables aléatoires $\log\|M^{(n+p)}\cdots M^{(p+1)}\|$ et $\log\|M^{(p)}\cdots M^{(1)}\|$ sont bornées (car prennent un nombre fini de valeurs) donc admettent des espérances finies.

Mais les n-uplets (de matrices) aléatoires $(M^{(n+p)},\dots,M^{(p+1)})$ et $(M^{(n)},\dots,M^{(1)})$ ont même loi. (En effet, si $g_n,\dots,g_1$ appartiennent à $\mathcal{S}=\{s_i \mid 1\leqslant i\leqslant k\}$, alors

$$\begin{aligned}P\big((M^{(n)},\dots,M^{(1)})=(g_n,\dots,g_1)\big)&=P(M^{(n)}=g_n)\cdots P(M^{(1)}=g_1)\\&=P(M^{(n+p)}=g_n)\cdots P(M^{(p+1)}=g_1)\\&=P\big((M^{(n+p)},\dots,M^{(p+1)})=(g_n,\dots,g_1)\big)\end{aligned}$$

car les $M^{(i)}$ ont même loi et sont indépendantes.) Donc $\log\|M^{(n+p)}\cdots M^{(p+1)}\|$ et $\log\|M^{(n)}\cdots M^{(1)}\|$ ont même espérance.

D'où

$$\mathbb{E}[\log\|\Psi_{n+p}\|]\leqslant\mathbb{E}[\log\|\Psi_n\|]+\mathbb{E}[\log\|\Psi_p\|].$$

Ce qui démontre la sous-additivité.

D'autre part,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|\Psi_{n+p}\|]&\leqslant\mathbb{E}\big[\|M^{(n+p)}\cdots M^{(p+1)}\|\cdot\|M^{(p)}\cdots M^{(1)}\|\big]\\&=\mathbb{E}\big[\|M^{(n+p)}\cdots M^{(p+1)}\|\big]\,\mathbb{E}\big[\|M^{(p)}\cdots M^{(1)}\|\big]\\&=\mathbb{E}\big[\|M^{(n)}\cdots M^{(1)}\|\big]\,\mathbb{E}\big[\|M^{(p)}\cdots M^{(1)}\|\big]\end{aligned}$$

où l'on a successivement utilisé le caractère sous-multiplicatif de $\|\cdot\|$ et la croissance de l'espérance, l'indépendance et le lemme des coalitions, puis le caractère identiquement distribué. Il suffit alors de passer au log pour avoir la sous-additivité. (Aucun des termes n'est nul, car $M^{(i)}$ est à valeurs dans les matries inversibles.)

2.c) En déduire qu'il existe des constantes $\ell(\mu),\xi(\mu)\in[\log\alpha,\log\beta]$ telles $\frac{1}{n}\mathbb{E}[\log\|\Psi_n\|]\to\ell(\mu)$ et $\frac{1}{n}\log\mathbb{E}[\|\Psi_n\|]\to\xi(\mu)$.

Avec les notations et le résultat de la question 2.a, $\log\|\Psi_n\|$ est à valeurs dans $[\log\alpha,\log\beta]$ et $\frac{1}{n}\mathbb{E}[\log\|\Psi_n\|]$ converge. Sa limite $\ell(\mu)$, qui existe d'après les deux questions précédentes, appartient à $[\log\alpha,\log\beta]$.

Pour la même raison, $\mathbb{E}\big[\|\Psi_n\|\big]$ appartient à $[\alpha^n,\beta^n]$. Donc $\log\mathbb{E}\big[\|\Psi_n\|\big]$ appartient à l'intervalle $[n\log\alpha,n\log\beta]$. La limite de $\frac{1}{n}\log\mathbb{E}[\|\Psi_n\|]$ appartient donc à $[\log\alpha,\log\beta]$.

3.a) Montrer que $\ell(\mu)\leqslant\xi(\mu)$ et donner un exemple où l'inégalité est stricte.

Pour montrer la première partie de la question, il suffit de prouver le résultat plus général suivant : si X est une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1,\dots,x_k\}$ de réels strictement positifs, alors $\mathbb{E}[\log X]\leqslant\log\mathbb{E}[X]$.

Par définition de l'espérance, $\mathbb{E}[X]=\sum_{i=1}^k x_iP(X=x_i)$, où $\sum_{i=1}^k P(X=x_i)=1$ et les $P(X=x_i)$ sont positifs. Mais d'après l'inégalité de Jensen et la concavité du log,

$$\log\mathbb{E}[X]\geqslant\sum_{i=1}^k P(X=x_i)\log x_i=\mathbb{E}[\log X].$$

Remarquons que $\log X$ admet une espérance en tant que variable aléatoire réelle bornée.

Donnons un exemple où il n'y a pas égalité. Supposons $k=2$, que $s_1=I_d$ et $s_2=2I_d$ avec $P\big(M^{(1)}=s_1\big)=P\big(M^{(1)}=s_2\big)=1/2$. On a donc $M^{(i)}=2^{Y_i}I_d$ où les Y_i sont des variables de Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendantes et identiquement distribuées.

Alors

$$\Psi_n=2^{X_1+\cdots+X_n}I_d.$$

Il est bien connu que $X_1+\cdots+X_n$ suit une loi binomiale de paramètre $(n,1/2)$. Donc Ψ_n est à valeurs dans $\{2^pI_n\mid 0\leqslant p\leqslant n\}$ et $P\big(\Psi_n=2^pI_d\big)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{p}$ si $0\leqslant p\leqslant n$. Mais alors $P(\|\Psi_n\|=2^p)=\frac{1}{2^n}\binom{n}{p}$ et

$$\mathbb{E}[\|\Psi_n\|]=\sum_{p=0}^n\frac{1}{2^n}\binom{n}{p}2^p=\frac{(1+2)^n}{2^n}=\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Ainsi, $\log \mathbb{E}[\|\Psi_n\|] = n \log \frac{3}{2}$, donc $\ell(\mu) = \log \frac{3}{2}$.

D'autre part, par le théorème de transfert,

$$\mathbb{E}[\log \|\Psi_n\|] = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{p} \log 2^p = \log 2 \sum_{p=1}^{n} p \frac{n}{p} \binom{n-1}{p-1} \frac{1}{2^n}$$
$$= \frac{n \log 2}{2^n} \sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p} = \frac{n \log 2}{2}.$$

D'où $\xi(\mu) = \frac{\log 2}{2}$. Enfin $\log 3/2 > \frac{\log 2}{2}$ équivaut à $\log 3 > \frac{3}{2} \log 2$, c'est-à-dire $2 \log 3 > 3 \log 2$; ce qui est vrai car $9 > 8$.

3.b) Montrer que $\ell(\mu) \geqslant \mathbb{E}\big[\log(|\det(M^{(1)})]^{1/d}\big]$ et que $\xi(\mu) \geqslant \log \mathbb{E}\big[(|\det(M^{(1)})]^{1/d}\big]$.

D'après l'inégalité d'Hadamard (certes hors-programme, mais suffisament classique pour qu'on se dispense d'en réécrire une preuve ici),

$$|\det \Psi_n(\omega)| \leqslant \|\Psi_n(\omega)(e_1)\| \cdots \|\Psi_n(\omega)(e_d)\| \leqslant \|\Psi_n(\omega)\|^d.$$

Donc $\|\Psi_n\| \geqslant |\det \Psi_n|^{\frac{1}{d}}$. On en déduit

$$\log \|\Psi_n\| \geqslant \log |\det \Psi_n|^{\frac{1}{d}} = \sum_{i=1}^{n} \log |\det M^{(i)}|^{\frac{1}{d}}.$$

En passant à l'espérance,

$$\frac{1}{n} \mathbb{E}\big[\log \|\Psi_n\|\big] \geqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\big[\log |\det M^{(i)}|^{\frac{1}{d}}\big] = \mathbb{E}\big[\log |\det M^{(1)}|^{\frac{1}{d}}\big]$$

car les $\log |\det M^{(i)}|^{\frac{1}{d}}$ ont même loi, donc même espérance. En passant à la limite, on obtient

$$\ell(\mu) \geqslant \mathbb{E}\big[\log(|\det(M^{(1)})]^{1/d}\big].$$

C'est exactement pareil pour $\xi(\mu)$.

3.c.i) Montrer que l'on a $\frac{1}{n}\mathbb{E}[\log N(\Psi_n)] \to \ell(\mu)$ et $\frac{1}{n} \log \mathbb{E}[N(\Psi_n)] \to \ell(\mu)$.

Par équivalence des normes en dimension finie, il existe $C > 1$ tel que pour tout $\omega \in \Omega$,

$$\frac{1}{C} \|\Psi_n(\omega)\| \leqslant N\big(\Psi_n(\omega)\big) \leqslant C \|\Psi_n(\omega)\|.$$

D'où

$$-\log C + \log \|\Psi_n\| \leqslant \log N\big(\Psi_n\big) \leqslant \log C + \log \|\Psi_n\|.$$

En divisant par n et en passant à la limite, on obtient $\frac{1}{n}\mathbb{E}[\log N(\Psi_n)] \to \ell(\mu)$.

De même,

$$\frac{1}{C} \mathbb{E}\big[\|\Psi_n\|\big] \leqslant N\big(\Psi_n(\omega)\big) \leqslant C \mathbb{E}\big[\|\Psi_n\|\big].$$

On divise par n et on passe au log.

3.c.ii) On suppose dans cette question seulement que la matrice aléatoire... et en déduire que $\xi(\mu) = \log \rho(\mathbb{E}[|M^{(1)}])$.

Soient p, q deux entiers entre 1 et d. Pour deux variables aléatoires A et B indépendantes à valeurs dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et à supports finis (ce qui garantit l'existence de l'espérance), à coefficients matriciels tous strictement positifs, les coefficients matriciels $[A]_{p,q}$ et $[B]_{p,q}$ sont aussi indépendants (lemme des coalitions). Donc

$$\mathbb{E}\big[[AB]_{p,q}\big] = \mathbb{E}\big[\sum_{1 \leqslant r \leqslant d} [A]_{p,r}[B]_{r,q}\big] = \sum_{1 \leqslant r \leqslant d} \mathbb{E}\big[[A]_{p,r}\big]\mathbb{E}\big[[B]_{r,q}\big] = \big[\mathbb{E}[A]\mathbb{E}[B]\big]_{p,q}.$$

Or,par récurrence immédiate, tous les coefficients de $\Psi_n(\omega)$ sont strictement positifs. On en déduit toujours par récurrence immédiate que

$$\mathbb{E}\big[N(\Psi_n)\big] = \mathbb{E}\big[\sum_{p,q}[M^{(n)}]_{p,q}\big] = \sum_{p,q}\mathbb{E}\big[[M^{(n)}]_{p,q}\big] = \sum_{p,q}\Big(\mathbb{E}[M^{(n)}]\cdots\mathbb{E}[M^{(1)}]\Big)_{p,q}$$
$$= \sum_{p,q}\Big(\mathbb{E}[M^{(1)}]^n\Big)_{p,q} = N(\mathbb{E}[M^{(1)}]^n)$$

car les $M^{(i)}$ ont même loi donc même espérance.

Mais par le théorème de Gelfand généralisé, en notant $A = \mathbb{E}\big[M^{(1)}\big]$,

$$\xi(\mu) = \lim \frac{1}{n}\log \mathbb{E}[N(\Psi_n)] = \lim \frac{1}{n}\log N(A^n) = \log\rho(A).$$

3.c.iii) Dans le cadre général du sujet montrer que $\xi(\mu) \leqslant \log\rho(\mathbb{E}[|M^{(1)}])$...

Il suffit d'avoir $N(A^n) \leqslant N(|A|^n)$, ce qui est clair par récurrence et en vertu de

$$|[AB]_{p,q}| \leqslant \sum_{1\leqslant r\leqslant d}|[A]_{p,r}|\,|[B]_{r,q}| = [|A||B|]_{p,q}.$$

Partie III. Calcul de $\ell(\mu)$ et $\xi(\mu)$ dans des cas particuliers

(par Jérémy Daniel)

1). Matrices diagonales.

1a). Montrer que $\ell(\mu) \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant d}\mathbb{E}\big[\log|M_{k,k}^{(1)}|\big]$ et $\xi(\mu) \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant d}\log\mathbb{E}[|M_{k,k}^{(1)}|]$.

Remarquons tout d'abord que la norme d'opérateur d'une matrice diagonale D est son rayon spectral, c'est-à-dire le maximum des modules de ses termes diagonaux. En effet, les valeurs propres d'une matrice diagonales sont les coefficients diagonaux. Soit $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_d)$. En prenant un vecteur propre x unitaire associé à la valeur propre λ_p, on a $\|Dx\| = |\lambda_p|\|x\| = |\lambda_p|$, donc $|[\lambda_p| \leqslant \|\!|D|\!\|$ et ceci pour tout $1 \leqslant p \leqslant d$. Donc $\rho(D) \leqslant \|\!|D|\!\|$.

D'autre part, en considérant $x \in \mathbb{C}^d$ unitaire,

$$\|Dx\|^2 = \sum_{p=1}^d |\lambda_p|^2\|x_p\|^2 \leqslant \sum_{p=1}^d \rho(D)^2\|x_p\|^2 = \rho(D)^2.$$

En passant à la borne supérieure sur x unitaire dans l'inégalité $\|Dx\| \leqslant \rho(D)$, on a bien $\|\!|D|\!\| \leqslant \rho(D)$.

Revenons à la question. La matrice Ψ_n est diagonale avec coefficients $\prod_{i=1}^n M_{k,k}^{(i)}$, pour $k \in [\![1,d]\!]$. On a donc

$$\|\!|\Psi_n|\!\| = \max_{1\leqslant k\leqslant d}\prod_{i=1}^n|M_{k,k}^{(i)}|.$$

Fixons maintenant un $k \in [\![1,d]\!]$. On a donc $\|\!|\Psi_n|\!\| \geqslant \prod_{i=1}^n|M_{k,k}^{(i)}|$, d'où $\log\|\!|\Psi_n|\!\| \geqslant \sum_{i=1}^n\log|M_{k,k}^{(i)}|$. Puis, par croissance de l'espérance et puisque les variables aléatoires $\log|M_{k,k}^{(1)}|$ sont bornées de même loi

$$\mathbb{E}\Big[\log\|\!|\Psi_n|\!\|\Big] \geqslant \sum_{i=1}^n\mathbb{E}\big[\log|M_{k,k}^{(i)}|\big] = n\mathbb{E}\big[\log|M_{k,k}^{(1)}|\big].$$

On divise par n et on passe à la limite pour obtenir $\ell(\mu) \geqslant \mathbb{E}\big[\log|M_{k,k}^{(1)}|\big]$. Comme k est quelconque

$$\ell(\mu) \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant d}\mathbb{E}\big[\log|M_{k,k}^{(1)}|\big].$$

En passant d'abord à l'espérance dans l'inégalité $\|\Psi_n\| \geqslant \prod_{i=1}^n |M_{k,k}^{(i)}|$ et en utilisant l'indépendance de $M^{(1)}, \ldots, M^{(n)}$, on obtient

$$\mathbb{E}[\|\Psi_n\|] \geqslant \mathbb{E}\Big[\prod_{i=1}^n |M_{k,k}^{(i)}|\Big] = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[|M_{k,k}^{(i)}|] = \mathbb{E}[|M_{k,k}^{(1)}|]^n.$$

On passe au logarithme, on divise par n et on passe à la limite pour obtenir

$$\xi(\mu) \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant d} \log \mathbb{E}[|M_{k,k}^{(1)}|].$$

1b) Montrer que $\xi(\mu) = \max_{1\leqslant k\leqslant d} \log \mathbb{E}[|M_{k,k}^{(1)}|]$.

On utilise la question **II-3c)iii.** La matrice $\mathbb{E}[|M^{(1)}|$ est diagonale avec coefficients $\mathbb{E}[|M_{k,k}^{(1)}|]$ pour $1 \leqslant k \leqslant d$. Son rayon spectral est donc égal à

$$\max_{1\leqslant k\leqslant d} \mathbb{E}[|M_{k,k}^{(1)}|].$$

On en déduit que

$$\xi(\mu) \leqslant \log \max_{1\leqslant k\leqslant d} \mathbb{E}[|M_{k,k}^{(1)}|] = \max_{1\leqslant k\leqslant d} \log \mathbb{E}[|M_{k,k}^{(1)}|].$$

1c) Montrer que $\ell(\mu) = \max_{1\leqslant k\leqslant d} \mathbb{E}\big[\log |M_{k,k}^{(1)}|\big]$.

Soit $\varepsilon > 0$. Notons $E_k = \mathbb{E}(\log |M_{k,k}^{(1)}|)$ et $m = \max_{1\leqslant k\leqslant d} E_k$. Soit $\omega \in \Omega$.

Remarquons que si, pour tout $k \in [\![1, d]\!]$, on a $\dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log |M_{k,k}^{(i)}(\omega)| \leqslant E_k + \varepsilon$ alors, on a :

$$\frac{1}{n} \log \|\Psi_n(\omega)\| = \frac{1}{n} \max_{1\leqslant k\leqslant d} \sum_{i=1}^n \log |M_{k,k}^{(i)}(\omega)| \leqslant m + \varepsilon.$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Boole appliquée à la réunion des événements $\Big(\dfrac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log |M_{k,k}^{(i)}| > E_k + \varepsilon\Big)$

$$\mathbb{P}(\frac{1}{n} \log \|\Psi_n\| > m + \varepsilon) \leqslant \sum_{k=1}^d \mathbb{P}\Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log |M_{k,k}^{(i)}| > E_k + \varepsilon\Big).$$

Comme $E_k = \mathbb{E}\Big[\dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^n \log |M_{k,k}^{(i)}|\Big]$, le membre de droite tend vers 0 d'après la loi faible des grands nombres. Donc $\mathbb{P}(\dfrac{1}{n} \log \|\Psi_n\| > m + \varepsilon)$ tend aussi vers 0.

On écrit ensuite que $\frac{1}{n} \log \|\Psi_n\| = \frac{1}{n} \log \|\Psi_n\| \mathbb{1}_{(\frac{1}{n} \log \|\Psi_n\| \leqslant m+\varepsilon)} + \frac{1}{n} \log \|\Psi_n\| \mathbb{1}_{(\frac{1}{n} \log \|\Psi_n\| > m+\varepsilon)}$. En passant à l'espérance :

$$\mathbb{E}[\frac{1}{n} \log \|\Psi_n\|] \leqslant m + \varepsilon + \log(\beta) \mathbb{P}\big(\frac{1}{n} \log \|\Psi_n\| > m + \varepsilon\big)$$

car $\|\Psi_n\| \leqslant \beta^n$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit :

$$l(\mu) \leqslant m + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est quelconque, on a finalement :

$$\ell(\mu) = \max_{1\leqslant k\leqslant d} \mathbb{E}\big[\log |M_{k,k}^{(1)}|\big].$$

2) Matrices commutantes.

2a) Montrer que les matrices de $\mathcal{S}$ sont co-trigonalisables.

Rappelons que si k matrices de $M_d(\mathbb{C})$ commutent, alors elles ont un vecteur propre commun. On le montre par récurrence sur k :

* Si $k=1$, toute matrice de $M_d(\mathbb{C})$ admet un vecteur propre.

* Si le résultat est prouvé pour k et que $M_1,\dots,M_{k+1}$ commutent, on choisit une valeur propre λ de M_{k+1}. Le sous-espace propre associé E_λ est stable par $M_1,\dots,M_k$ car ces matrices commutent avec M_{k+1}. Par hypothèse de récurrence, on peut trouver un vecteur propre commun à $M_1,\dots,M_k$ dans E_λ ; ce vecteur propre sera ainsi commun aux matrices $M_1,\dots,M_{k+1}$.

On montre maintenant par récurrence sur d que si k matrices de $M_d(\mathbb{C})$ commutent, alors elles sont co-trigonalisables ce qui suffit car le support $\mathcal{S}$ est fini.

* Pour $d=1$, il n'y a rien à montrer.

* On suppose le résultat prouvé pour d. Soient $M_1,\dots,M_k$ des matrices de $M_{d+1}(\mathbb{C})$ qui commutent deux à deux. Leurs transposées $M_1^t,\dots,M_k^t$ commutent deux à deux et on note e_{d+1} un vecteur propre commun à ces matrices. Alors, l'hyperplan $H=\ker{}^t e_{d+1}$ est stable par les matrices $M_1,\dots,M_k$. Par hypothèse de récurrence, on peut trouver une base $\mathcal{B}'$ de H telle que les matrices $M_1,\dots,M_k$ (restreintes et co-restreintes à H) sont triangulaires supérieures dans cette base. Alors, les matrices $M_1,\dots,M_k$ sont triangulaires supérieures dans la base obtenue en concaténant $\mathcal{B}'$ et e_{d+1}.

2b) Montrer que $\ell(\mu)\geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant d}\mathbb{E}\Big[\log|\mathcal{M}^{(1)}_{k,k}|\Big]$ et $\xi(\mu)\geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant d}\log\mathbb{E}\Big[|\mathcal{M}^{(1)}_{k,k}|\Big]$.

La matrice Ψ_n est semblable à la matrice $\mathcal{M}^{(n)}\cdots\mathcal{M}^{(1)}$. Donc, les valeurs propres de Ψ_n sont égales aux produits $\prod_{i=1}^n \mathcal{M}^{(i)}_{k,k}$, pour $k\in[\![1,d]\!]$. On a donc $|\!|\!|\Psi_n|\!|\!|\geqslant\prod_{i=1}^n|\mathcal{M}^{(i)}_{k,k}|$, pour tout $k\in[\![1,d]\!]$.

Soit $k\in[\![1,d]\!]$. On a donc $\log|\!|\!|\Psi_n|\!|\!|\geqslant\sum_{i=1}^d\log|\mathcal{M}^{(i)}_{k,k}|$. Par croissance et linéarité de l'espérance, on en déduit

$$\mathbb{E}\Big[\log|\!|\!|\Psi_n|\!|\!|\Big]\geqslant\sum_{i=1}^d\mathbb{E}\Big[\log|\mathcal{M}^{(i)}_{k,k}|\Big]=n\mathbb{E}\Big[\log|\mathcal{M}^{(1)}_{k,k}|\Big].$$

On divise par n et on passe à la limite pour obtenir

$$\ell(\mu)\geqslant\mathbb{E}\Big[\log|\mathcal{M}^{(1)}_{k,k}|\Big].$$

Comme c'est vrai pour tout $k\in[\![1,d]\!]$, on en déduit

$$\ell(\mu)\geqslant\max_{1\leqslant k\leqslant d}\mathbb{E}\Big[\log|\mathcal{M}^{(1)}_{k,k}|\Big].$$

Pour $\xi(\mu)$, on considère de nouveau un $k\in[\![1,d]\!]$. En passant à l'espérance dans l'inégalité $|\!|\!|\Psi_n|\!|\!|\geqslant\prod_{i=1}^n|\mathcal{M}^{(i)}_{k,k}|$ et en utilisant l'indépendance des variables $\mathcal{M}^{(1)},\dots,\mathcal{M}^{(n)}$ (car $M^{(1)},\dots,M^{(n)}$ le sont, donc les $PM^{(1)}P^{-1},\dots,PM^{(n)}P^{-1}$ aussi par le lemme des coalitions), on obtient :

$$\mathbb{E}\Big[|\!|\!|\Psi_n|\!|\!|\Big]\geqslant\prod_{i=1}^n\mathbb{E}\Big[|\mathcal{M}^{(i)}_{k,k}|\Big]=\mathbb{E}\Big[|\mathcal{M}^{(1)}_{k,k}|\Big]^n.$$

On passe au logarithme, on divise par n et on passe à la limite. Comme k est quelconque, on obtient finalement :

$$\xi(\mu)\geqslant\max_{1\leqslant k\leqslant d}\log\mathbb{E}\Big[|\mathcal{M}^{(1)}_{k,k}|\Big].$$

Pour l'autre inégalité, on part du résultat de la question II-3.c)iii., qu'on applique avec la matrice $\mathcal{M}^{(1)}$, plutôt que $M^{(1)}$ (en effet, la norme triple de Ψ_n peut être calculée avec le produit aléatoire des $\mathcal{M}^{(i)}$ ou des $M^{(i)}$). On a donc :

$$\xi(\mu)\leqslant\log\rho\big(\mathbb{E}\Big[|\mathcal{M}^{(1)}|\Big]\big).$$

Or, la matrice $\mathbb{E}\left[|\mathcal{M}^{(1)}|\right]$ est triangulaire supérieure avec coefficients $\mathbb{E}\left[|\mathcal{M}^{(1)}_{k,k}|\right]$ sur la diagonale. Son rayon spectral est donc égal à

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant d} \mathbb{E}\left[|\mathcal{M}^{(1)}_{k,k}|\right]$$

et on conclut par croissance de la fonction logarithme.

3) L'échangeur.

3a) Calcul de $\ell(\mu_0)$, $\ell(\mu_1)$, $\xi(\mu_0)$ et $\xi(\mu_1)$.

La mesure μ_0 correspond au cas déterministe où les matrices $M^{(i)}$ sont égale à R. D'après le théorème de Gelfand, on a donc $\xi(\mu_0) = \ell(\mu_0) = \log \rho(R)$. Comme les valeurs propres de R sont $\pm i$, on a

$$\xi(\mu_0) = \ell(\mu_0) = 0.$$

Pour la mesure μ_1, on a de même $\xi(\mu_1) = \ell(\mu_1) = \log \rho(D)$. Comme les valeurs propres de D sont 2 et 1/2, on a $\rho(D) = 2$, donc

$$\xi(\mu_1) = \ell(\mu_1) = \log 2.$$

3b) Montrer que $\|\psi_n e_1\| = 2^{\sum_{i=1}^n \chi_i}$ et $\|\psi_n e_2\| = 2^{-\sum_{i=1}^n \chi_i}$; puis $\|\Psi_n\| = 2^{|\sum_{i=1}^n \chi_i|}$.

Remarquons déjà que $\Psi_n e_1$ et $\Psi_n e_2$ sont toujours colinéaires à e_1 ou e_2. On prouve les égalités $\|\psi_n e_1\| = 2^{\sum_{i=1}^n \chi_i}$ et $\|\psi_n e_2\| = 2^{-\sum_{i=1}^n \chi_i}$ par récurrence sur n :

* Pour le cas $n = 0$, on a bien $\|e_1\| = \|e_2\| = 1$.

* On suppose les égalités vraies au rang n.

— Si $M^{(n+1)} = R$, on a $\chi_{n+1} = 0$ et les normes de $\psi_{n+1}e_1$ (resp. $\psi_{n+1}e_2$) et $\psi_n e_1$ (resp. $\psi_n e_2$) sont les mêmes, car R ne change pas la norme des vecteurs colinéaires à e_1 ou e_2. Les égalités sont bien prouvée dans ce cas.

— Si $M^{(n+1)} = D$, on va avoir $\psi_{n+1}e_1 = 2\psi_n e_1$ ou $2^{-1}\psi_n e_1$, suivant que $\psi_n e_1$ est colinéaire à e_1 ou à e_2. Or, $\psi_n e_1$ est colinéaire à e_1 si, et seulement si, il y a eu un nombre pair de matrices R parmi les $M^{(i)}$, avec $i \leqslant n$. Dans ce cas, χ_{n+1} vaut 1 tandis qu'il vaut -1 s'il y a eu un nombre impair de R. Dans les deux cas, on a donc :

$$\psi_{n+1}e_1 = 2^{\chi_{n+1}}\psi_n e_1$$

et on conclut immédiatement en utilisant l'hypothèse de récurrence. Le raisonnement pour $\psi_{n+1}e_2$ est similaire, en inversant les parités.

Pour l'égalité $\|\Psi_n\| = 2^{|\sum_{i=1}^n \chi_i|}$, considérons $u \in \mathbb{R}^2$ de norme 1. On écrit $u = ae_1 + be_2$ et on a donc $\Psi_n(u) = a\Psi_n(e_1) + b\Psi_n(e_2)$. De plus, une récurrence immédiate sur n montre que $\Psi_n(e_1)$ et $\Psi_n(e_2)$ sont orthogonaux. Donc, par le théorème de Pythagore :

$$\|\Psi_n(u)\|^2 = a^2\|\Psi_n(e_1)\|^2 + b^2\|\Psi_n(e_2)\|^2.$$

Comme $a^2 + b^2 = 1$, $\|\Psi_n(u)\|^2$ sera maximal en prenant $a = 1$ et $b = 0$ ou $a = 0$ et $b = 1$. On a donc

$$\|\Psi_n\| = \max(2^{\sum_{i=1}^n \chi_i}, 2^{-\sum_{i=1}^n \chi_i}) = 2^{|\sum_{i=1}^n \chi_i|}.$$

3c) Montrer que $\mathbb{E}(\chi_i) = p(2p-1)^{i-1}$ et $\mathbb{E}(\chi_i\chi_j) = p^2(2p-1)^{j-i-1}$.

Pour tout j, $M^{(j)}$ vaut R avec probabilité $1-p$. Le nombre de fois où $M^{(j)}$ vaut R, avec $1 \leqslant j \leqslant i-1$ suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(i-1, 1-p)$. Ce nombre est donc pair avec probabilité

$$P = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{i-1} \binom{i-1}{k}(1-p)^k p^{i-1-k}$$

et impair avec probabilité

$$I = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{i-1} \binom{i-1}{k} (1-p)^k p^{i-1-k}.$$

Le calcul de P et I est classique. En utilisant deux formules du binôme de Newton, on a

$$P + I = 1 \text{ et } P - I = (2p-1)^{i-1}.$$

On peut alors calculer

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\chi_i] &= 0 \times P(\chi_i = 0) + 1 \times P(\chi_i = 1) + (-1) \times P(\chi_i = -1) \\
&= P(M^{(i)} = D) \times (P - I) \\
&= p(2p-1)^{i-1}.
\end{aligned}$$

Pour la deuxième égalité, on note $\tau_{i,j}$ la variable aléatoire valant

— 0 si $M^{(j)} = R$;

— 1 si $M^{(j)} = D$ et que $M^{(i)} = R$ un nombre pair de fois entre $i+1$ et j ;

— -1 si $M^{(j)} = D$ et que $M^{(i)} = R$ un nombre impair de fois entre $i+1$ et j.

On a l'égalité $\chi_i \chi_j = \chi_i^2 \tau_{i,j}$: en effet, les deux membres valent 0 si $M^{(i)}$ est égal à R ; et si $M^{(i)}$ est égal à D, $\chi_j = \chi_i \tau_{i,j}$. De plus, les variables aléatoires χ_i et $\tau_{i,j}$ sont indépendantes et $\tau_{i,j}$ suit la même loi que χ_{j-i}. On a donc

$$\mathbb{E}[\chi_i \chi_j] = \mathbb{E}[\chi_i^2] \mathbb{E}[\tau_{i,j}].$$

Or $\mathbb{E}[\chi_i^2] = p$ (χ_i^2 vaut 1 si $M^{(i)} = D$ et 0 sinon) et $\mathbb{E}[\tau_{i,j}] = \mathbb{E}[\chi_{j-i}] = p(2p-1)^{j-i-1}$. D'où :

$$\mathbb{E}(\chi_i \chi_j) = p^2 (2p-1)^{j-i-1}.$$

3d) Montrer que $\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \chi_i\Big)^2\Big] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

On a $\Big(\sum_{i=1}^n \chi_i\Big)^2 = \sum_{i=1}^n \chi_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \chi_i\chi_j$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \chi_i\Big)^2\Big] &= \frac{1}{n^2}\Big(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\chi_i^2] + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{E}[\chi_i\chi_j]\Big) \\
&= \frac{1}{n^2}\Big(np + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} p^2(2p-1)^{j-i-1}\Big).
\end{aligned}$$

Notons $\alpha = 2p-1$. Pour montrer le résultat, il suffit donc de montrer que

$$\frac{1}{n^2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \alpha^{j-i}$$

tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \alpha^{j-i} &= \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^j \alpha^{j-i} = \sum_{j=2}^n \sum_{k=0}^{j-1} \alpha^k \\
&= \sum_{j=2}^n \Big(\frac{1-\alpha^j}{1-\alpha}\Big) = \frac{1}{1-\alpha}\Big((n-1) - \alpha^2\frac{1-\alpha^{n-1}}{1-\alpha}\Big)
\end{aligned}$$

Comme $\alpha \in]-1,1[$, cette somme est équivalente à $\dfrac{n}{1-\alpha}$, ce qui conclut.

3e) Montrer que $\ell(\mu_p) = 0$, pour $p \in]0,1[$.

D'après la question **b)**, on a

$$\frac{1}{n}\mathbb{E}[\log \|\Psi_n\|] = \log 2 \times \mathbb{E}\Big[\frac{1}{n}\Big|\sum_{i=1}^{n} \chi_i\Big|\Big].$$

En notant X_n la variable aléatoire $\dfrac{1}{n}\Big|\sum_{i=1}^{n} \chi_i\Big|$, la question précédente a montré que $E[X_n^2]$ tend vers 0 quand X_n tend vers $+\infty$. En écrivant $X_n = X_n \times 1$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne :

$$\mathbb{E}[X_n] \leqslant \sqrt{\mathbb{E}[X_n^2] \times \mathbb{E}[1^2]} = \sqrt{\mathbb{E}[X_n^2]}.$$

Comme X_n est positive, on en déduit que $\mathbb{E}[X_n]$ tend vers 0. Donc $\ell(\mu_p) = 0$, pour tout $p \in]0,1[$.

3f) Montrer que $\mathbb{E}[N(\Psi_n)] = N\Big(\big(\mathbb{E}[|M^{(1)}|]\big)^n\Big)$.

Si l'on change la matrice R par la matrice $R' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, la quantité $N(\Psi_n)$ est inchangée car les coefficients de Ψ_n restent les mêmes, au signe près (récurrence immédiate). On est alors ramené au cas où les matrices dans le support de μ sont à coefficients positifs. D'après la question **II-3c)ii.**, on a donc

$$\mathbb{E}[N(\Psi_n)] = N\Big(\big(\mathbb{E}[M'^{(1)}]\big)^n\Big),$$

où $M'^{(1)}$ est la matrice aléatoire suivant la mesure $\mu'_p = p\delta_D + (1-p)\delta_{R'}$. Comme $M'^{(1)}$ est égal à $|M^{(1)}|$, on a obtenu le résultat.

3g) En déduire que $\xi(\mu_p) = \log\Big(\dfrac{5p + \sqrt{16 - 32p + 25p^2}}{4}\Big)$.

Par la question **II-3c)ii.**, on a

$$\xi(\mu_p) = \log \rho(\mathbb{E}(|M^{(1)}|)$$

(en utilisant de nouveau la matrice R' pour se ramener au cas des coefficients positifs).

La matrice $|M^{(1)}|$ vaut $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ avec probabilité p et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec probabilité $1-p$. Donc

$$\mathbb{E}\Big[|M^{(1)}|\Big] = \begin{pmatrix} 2p & 1-p \\ 1-p & p/2 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique χ vaut

$$\chi = (2p - X)(\frac{p}{2} - X) - (1-p)^2 = X^2 - \frac{5p}{2}X + (2p-1).$$

Le discriminant Δ est égal à $\dfrac{16 - 32p + 25p^2}{4}$, qui est strictement positif (il est positif en 0 et le discriminant du polynôme en p au numérateur est $32^2 - 4 \times 25 \times 16$ qui est strictement négatif). Il y a donc deux racines réelles égales à

$$\frac{5p \pm \sqrt{16 - 32p + 25p^2}}{4}.$$

On en déduit que $\rho(\mathbb{E}(|M^{(1)}|) = \dfrac{5p + \sqrt{16 - 32p + 25p^2}}{4}$, d'où le résultat.

Partie IV. Le théorème de Furstenberg-Kesten

(par Erwan Biland)

1). Montrer que l'on peut écrire $\|\psi_n\| \leqslant \|Q_{k_0}^{(1)}\| \cdot \|Q_{k_0}^{(2)}\| \cdots \|Q_{k_0}^{(q)}\| \cdot \|Q_r\|$, où...

On a $k_0, n \in \mathbb{N}^*$, et $n = qk_0 + r$ avec $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0, k_0 - 1]\!]$.

Pour $i \in [\![1, q]\!]$, on pose $Q_{k_0}^{(i)} = M^{(ik_0)} \cdot M^{(ik_0-1)} \cdots M^{(ik_0-k_0+1)}$.

Le k_0-uplet aléatoire $(M^{(ik_0-k_0+1)}, ..., M^{(ik_0-1)}, M^{(ik_0)})$ suit la même loi (produit de k_0 lois μ indépendantes) que $(M^{(1)}, ..., M^{(k_0-1)}, M^{(k_0)})$ et donc la variable aléatoire $Q_{k_0}^{(i)}$ suit la même loi que Ψ_{k_0}.

On pose $R_r^{(q)} = M^{qk_0+r} \cdot M^{qk_0+r-1} \cdots M^{qk_0+1}$, avec la convention $R_0^{(q)} = I_d$ (et $\Psi_0 = I_d$).

Je n'ai pas suivi la notation Q_r proposée par l'énoncé, car il m'a semblé nécessaire d'expliciter la dépendance à l'égard de q en vue de la question suivante, où n varie.

De même, la variable aléatoire $Q_r^{(q)}$ suit la même loi que Ψ_r.

Par le lemme des coalitions, les variables aléatoires $Q_{k_0}^{(1)}, Q_r \cdot Q_{k_0}^{(2)}, ..., Q_{k_0}^{(q)}, Q_r^{(q)}$ sont mutuellement indépendantes.

Par associativité du produit matriciel, on a $\Psi_n = Q_r^{(q)} \cdot Q_{k_0}^{(q)} \cdots Q_{k_0}^{(2)} \cdot Q_{k_0}^{(1)}$.

Par sous-multiplicativité de la norme d'opérateur prouvé plus haut, on obtient l'inégalité demandée.

2). En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\big(\frac{1}{n}\log |\!|\!|\Psi_n|\!|\!| \geqslant \ell(\mu) + \varepsilon\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Posons $\varepsilon' = \varepsilon/3$.

D'après la question **II.2)**, on a $\mathbb{E}\Big[\dfrac{1}{k}\log |\!|\!|\Psi_k|\!|\!|\Big] \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell(\mu)$.

Il existe donc un $k_0 \geqslant 1$ tel que $\mathbb{E}\Big[\dfrac{1}{k_0}\log |\!|\!|\Psi_{k_0}|\!|\!|\Big] \leqslant \ell(\mu) + \varepsilon'$. Notons E_{k_0} cette espérance.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, et $q_n = \lfloor n/k_0 \rfloor$, $r_n = n - q_n k_0$ résultant de la division euclidienne de n par k_0.

On a $\dfrac{1}{n}\log |\!|\!|\Psi_n|\!|\!| \leqslant \dfrac{k_0 q_n}{n}\left(\dfrac{1}{q_n}\displaystyle\sum_{i=1}^{q_n}\dfrac{1}{k_0}\log |\!|\!|Q_{k_0}^{(i)}|\!|\!|\right) + \dfrac{1}{n}\log |\!|\!|Q_{r_n}^{(q_n)}|\!|\!|$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, si $\dfrac{1}{q_n}\displaystyle\sum_{i=1}^{q_n}\dfrac{1}{k_0}\log |\!|\!|Q_{k_0}^{(i)}(\omega)|\!|\!| < E_{k_0} + \varepsilon'$ et $\dfrac{1}{n}\log |\!|\!|Q_{r_n}^{(q_n)}(\omega)|\!|\!| < \varepsilon'$,

alors, comme $\dfrac{k_0 q_n}{n} \leqslant 1$, on a $\dfrac{1}{n}\log |\!|\!|\Psi_n(\omega)|\!|\!| \leqslant \ell(\mu) + 3\varepsilon' = \ell(\mu) + \varepsilon$.

Donc, par passage à l'évènement contraire,

$$\mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\log |\!|\!|\Psi_n|\!|\!| \geqslant \ell(\mu) + \varepsilon\Big) \leqslant \mathbb{P}\Big(\frac{1}{q_n}\sum_{i=1}^{q_n}\frac{1}{k_0}\log |\!|\!|Q_{k_0}^{(i)}|\!|\!| \geqslant E_{k_0} + \varepsilon'\Big) + \mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\log |\!|\!|Q_{r_n}^{(q_n)}|\!|\!| \geqslant \varepsilon'\Big).$$

D'une part, par le lemme des coalitions, les variables $\frac{1}{k_0}\log |\!|\!|Q_{k_0}^{(i)}|\!|\!|$, pour $i \in \mathbb{N}^*$, sont indépendantes identiquement distribuées de même loi que $\frac{1}{k_0}\log |\!|\!|\Psi_{k_0}|\!|\!|$.
Cette loi est à support fini donc admet un moment d'ordre 2, et une espérance qu'on a notée E_{k_0}.
Donc, par la loi faible des grands nombres, et comme $q_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$,

$$\mathbb{P}\Big(\frac{1}{q_n}\sum_{i=1}^{q_n}\frac{1}{k_0}\log |\!|\!|Q_{k_0}^{(i)}|\!|\!| \geqslant E_{k_0} + \varepsilon'\Big) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 0.$$

D'autre part, pour $r \in [\![0, k_0 - 1]\!]$ fixé, et $q \in \mathbb{N}^*$, la variable $\log |\!|\!|Q_r^{(q)}|\!|\!|$ est de même loi que $\log |\!|\!|\Psi_r|\!|\!|$, qui est à support fini et admet donc un moment d'ordre 1.
Notons $E'_{k_0} = \max\Big\{\mathbb{E}[|\log |\!|\!|\Psi_r|\!|\!||]\ ;\ r \in [\![0, k_0]\!]\Big\}$
Alors, en appliquant l'inégalité de Markov à la variable positive $|\log |\!|\!|Q_{r_n}^{(q_n)}|\!|\!||$, on obtient

$$\mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\log |\!|\!|Q_{r_n}^{(q_n)}|\!|\!| \geqslant \varepsilon'\Big) \quad \leqslant \quad \frac{E'_{k_0}}{n\varepsilon'} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 0.$$

Par somme de limites et encadrement, on conclut

$$\mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\log |\!|\!|\Psi_n|\!|\!| \geqslant \ell(\mu) + \varepsilon\Big) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 0.$$

On peut s'étonner que l'énoncé demande de prouver un résultat avec une inégalité large, alors qu'il écrit la convergence en probabilité avec une inégalité stricte. En tout état de cause, on obtient immédiatement par encadrement

$$\mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\log\|\!|\Psi_n|\!\| > \ell(\mu)+\varepsilon\Big) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 0.$$

3). Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ suite de variables aléatoires à valeurs dans $[a,b]$ telles que $\mathbb{E}[X_n]\xrightarrow[n\to\infty]{}\ell$ et $\forall\,\varepsilon>0,\ \mathbb{P}(X_n>\ell+\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Montrer que $X_n\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}\ell$.

Les variables X_n sont bornées donc d'espérances finies. Quitte à remplacer les variables X_n par $X_n-\ell$ (et a,b par $a-\ell, b-\ell$) , on peut supposer $\ell=0$, ce qu'on fera désormais.

Soit $\varepsilon>0$ et $\delta>0$ fixés.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$, par la même méthode que pour l'inégalité de Markov, on prouve la majoration :
$$\mathbb{E}[X_n] \ \leqslant\ -\varepsilon\,\mathbb{P}(X_n<-\varepsilon)+\alpha\,\mathbb{P}(-\varepsilon\leqslant X_n\leqslant\alpha)+b\,\mathbb{P}(X_n>\alpha).$$
En majorant $\mathbb{P}(-\varepsilon\leqslant X_n\leqslant\alpha)$ par 1, on en déduit
$$\mathbb{P}(X_n<-\varepsilon) \quad\leqslant\quad \frac{1}{\varepsilon}\,\Big(-\mathbb{E}[X_n]+\alpha+b\,\mathbb{P}(X_n>\alpha)\Big).$$
Fixons désormais $\alpha=\delta\varepsilon/3>0$.

Comme $\mathbb{E}[X_n]\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ et $\mathbb{P}(X_n>\alpha)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $n\geqslant n_0$, $-\mathbb{E}[X_n]\leqslant\alpha$ et $b\mathbb{P}(X_n>\alpha)\leqslant\alpha$.

Alors, pour tout $n\geqslant n_0$, $\mathbb{P}(X_n<-\varepsilon)\leqslant 3\alpha/\varepsilon=\delta$.

Ceci prouve que, pour tout $\varepsilon>0$, $\mathbb{P}(X_n<-\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Or on a déjà, pour tout $\varepsilon>0$, $\mathbb{P}(X_n>\varepsilon)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Donc la suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ converge en probabilité vers $\ell=0$.

4). En déduire le théorème de Furstenberg-Kesten.

On considère la suite de variables aléatoires réelles $\big(\frac{1}{n}\log\|\!|\Psi_n|\!\|\big)_{n\geqslant 1}$.

D'après la question **II.2.a)**, il existe des constantes $\alpha,\beta>0$ telles que, pour tout $n\geqslant 1$, la variable $\frac{1}{n}\log\|\!|\Psi_n|\!\|$ est à valeurs dans le segment $[\log\alpha,\log\beta]$.

Par la question **II.2.c)**, on sait que $\mathbb{E}\big[\frac{1}{n}\log\|\!|\Psi_n|\!\|\big]\xrightarrow[n\to\infty]{}\ell(\mu)$.

Enfin, on a montré à la question **IV.2)** que, pour tout $\varepsilon>0$, $\mathbb{P}\big(\frac{1}{n}\log\|\!|\Psi_n|\!\|>\ell(\mu)+\varepsilon\big)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

On peut donc conclure, par la question **IV.3)**, que $\frac{1}{n}\log\|\!|\Psi_n|\!\|\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}\ell(\mu)$.

5). Avec les hypothèses de III.2.b), on va montrer que $\ell(\mu)\leqslant\max\limits_{1\leqslant k\leqslant d}\mathbb{E}\big[\log|\mathfrak{M}^{(1)}_{k,k}|\big]$.

Remarquons que les notations proposées par l'énoncé laissent entendre que les matrices appartenant au support $\mathcal{S}$ sont, non seulement trigonalisables via une même matrice de passage, mais en fait déjà toutes triangulaires supérieures. C'est l'hypothèse que l'on fera dans la suite.
Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\Psi_n=\mathfrak{M}^{(n)}\cdots\mathfrak{M}^{(1)}$.

Pour $k\in[\![1,d]\!]$, notons $E_k=\mathbb{E}\big[\log|\mathfrak{M}^{(1)}_{k,k}|\big]$. Notons $\ell=\ell(\mu)$ et $m=\max\big\{E_1,\dots,E_d\big\}$.

Par l'absurde, on suppose $\ell>m$. Pour les deux premières questions, on fixe $d=2$.

5.a). Montrer que $\frac{1}{n}\log|X^{(n)}_{1,2}|\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}\ell(\mu)$.

Par équivalence des normes, comme en **I.5)**, on a $\frac{1}{n}\log\|\Psi_n\|_\infty\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}\ell$.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}\log|X^{(n)}_{1,2}|\leqslant\frac{1}{n}\log\|\Psi_n\|_\infty$.

Donc, pour tout $\varepsilon>0$,
$$\mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\log|X^{(n)}_{1,2}|>\ell+\varepsilon\Big)\ \leqslant\ \mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\log\|\Psi_n\|_\infty>\ell+\varepsilon\Big)\ \xrightarrow[n\to\infty]{}\ 0.$$
Soit $\varepsilon>0$ fixé. Quitte à le remplacer $\min\big\{\varepsilon,\frac{\ell-m}{3}\big\}$, on supposera désormais $\varepsilon\leqslant\frac{\ell-m}{3}$.

Par inclusion d'évènements, on a pour tout $n\geqslant 1$
$$\mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\log|X^{(n)}_{1,2}|<\ell\text{-}\varepsilon\Big)\leqslant\mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\log\|\Psi_n\|_\infty<\ell\text{-}\varepsilon\Big)+\mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\log|X^{(n)}_{1,1}|\geqslant\ell\text{-}\varepsilon\Big)+\mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\log|X^{(n)}_{2,2}|\geqslant\ell\text{-}\varepsilon\Big)$$
On a déjà vu que $\mathbb{P}\Big(\dfrac{1}{n}\log\|\Psi_n\|_\infty<\ell-\varepsilon\Big)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$.

Pour $k\in[\![1,2]\!]$, d'après la question préliminaire, $\frac{1}{n}\log|X^{(n)}_{k,k}|\xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}}E_k$.

Or, comme $\varepsilon \leqslant \frac{\ell-m}{3}$, on a $\ell-\varepsilon > m+\varepsilon \geqslant E_k+\varepsilon$, donc $\mathbb{P}\big(\frac{1}{n}\log|X_{2,2}^{(n)}| \geqslant \ell-\varepsilon\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Ainsi, par somme de limites et encadrement,

$$\mathbb{P}\Big(\frac{1}{n}\log|X_{1,2}^{(n)}| < \ell-\varepsilon\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ceci achève de prouver la convergence en probabilité de $\frac{1}{n}\log|X_{1,2}^{(n)}|$ vers $\ell(\mu)$.

5.b). Conclure dans le cas $d=2$

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on note $\tilde{\Psi}_n = \mathfrak{M}^{(2n)}\cdot\mathfrak{M}^{(2n-1)}\cdots\mathfrak{M}^{(n+1)}$. Comme à la question **IV.1)**, la variable $\tilde{\Psi}_n$ est indépendante et de même loi que Ψ_n, et $\Psi_{2n} = \tilde{\Psi}_n\cdot\Psi_n$.

En notant $\tilde{\Psi}_n = \big(\tilde{X}_{i,j}^{(n)}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$, on a $X_{1,2}^{2n} = \tilde{X}_{1,1}^{(n)}X_{1,2}^{(n)} + \tilde{X}_{1,2}^{(n)}X_{2,2}^{(n)}$

(on remarque que l'ordre des matrices est différent de celui de l'énoncé, ce qui ne change rien).

On commence par prouver deux lemmes.

Lemme 1. *Soient $(A_n)_{n\geqslant1}$, $(B_n)_{n\geqslant1}$ des suites de variables aléatoires réelles et α,β des réels tels que $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \alpha$ et $B_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \beta$. Alors $A_n+B_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \alpha+\beta$ et $\max\{A_n,B_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \max\{\alpha,\beta\}$.*

Pour $\varepsilon>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on remarque que

$$\big[|A_n-\alpha|\leqslant\varepsilon/2\big] \cap \big[|B_n-\beta|\leqslant\varepsilon/2\big] \subseteq \big[|An+B_n-\alpha-\beta|\leqslant\varepsilon\big].$$

Par passage à l'évènement contraire,

$$\mathbb{P}\big(|An+B_n-\alpha-\beta|>\varepsilon\big) \leqslant \mathbb{P}\big(|A_n-\alpha|>\varepsilon/2\big)+\mathbb{P}\big(|B_n-\beta|>\varepsilon/2\big).$$

Par somme de limites et encadrement, on obtient $A_n+B_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \alpha+\beta$.

De même, on montre que, pour tout $\varepsilon>0$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\big(|\max\{An,B_n\}-\max\{\alpha,\beta\}|>\varepsilon\big) \leqslant \mathbb{P}\big(|A_n-\alpha|>\varepsilon\big)+\mathbb{P}\big(|B_n-\beta|>\varepsilon\big),$$

et on en déduit que $\max\{A_n,B_n\} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \max\{\alpha,\beta\}$.

Lemme 2. *Soient $(A_n)_{n\geqslant1}$, $(B_n)_{n\geqslant1}$ des suites de variables aléatoires réelles et α,β des réels tels que $A_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \alpha$ et $B_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \beta$. Si $\forall n\in\mathbb{N}$, $A_n\leqslant B_n$, alors $\alpha\leqslant\beta$.*

Par l'absurde, on suppose $\forall n\in\mathbb{N}$, $A_n\leqslant B_n$ et $\alpha>\beta$. On pose $\varepsilon=\frac{\alpha-\beta}{3}$.

Alors, pour tout $x,y\in\mathbb{R}$, $|x-\alpha|\leqslant\varepsilon$ et $|y-\beta|\leqslant\varepsilon$ entraîne $y\leqslant\beta+\varepsilon<\alpha-\varepsilon\leqslant x$. Par la contraposée, $[A_n\leqslant B_n] \subsetneq [|X_n-\alpha|>\varepsilon]\cup[|Y_n-\beta|>\varepsilon]$, d'où

$$1 = \mathbb{P}(A_n\leqslant B_n) \leqslant \mathbb{P}(|X_n-\alpha|>\varepsilon)+\mathbb{P}(|Y_n-\beta|>\varepsilon).$$

Mais le membre de droite de cette inégalité est de limite nulle, donc $1\leqslant0$: contradiction.

Revenons à la question posée.

Pour tout $a,b\in\mathbb{R}$, on a $a+b\leqslant2\max\{a,b\}$. Donc pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$|X_{1,2}^{2n}| \leqslant 2\max\big\{|\tilde{X}_{1,1}^{(n)}X_{1,2}^{(n)}|,|\tilde{X}_{1,2}^{(n)}X_{2,2}^{(n)}|\big\}$$

d'où, par croissance du logarithme,

$$\frac{1}{2n}\log|X_{1,2}^{2n}| \leqslant \frac{\log2}{2n}+\frac{1}{2}\max\Big\{\frac{1}{n}\log|\tilde{X}_{1,1}^{(n)}|+\frac{1}{n}\log|X_{1,2}^{(n)}|,\frac{1}{n}\log|\tilde{X}_{1,2}^{(n)}|+\frac{1}{n}\log|X_{2,2}^{(n)}|\Big\}.$$

On sait que par a) que le membre de gauche converge en probabilité vers ℓ.

D'après le lemme 1, le membre de droite converge en probabilité vers $\frac{1}{2}\max\{E_1+\ell,\ell+E_2\}$.

Par le lemme 2 (passage à la «limite en probabilité» dans les inégalités larges), on en déduit

$$\ell \leqslant \frac{1}{2}\max\{E_1+\ell,\ell+E_2\} = \frac{\ell+m}{2}.$$

Donc $\ell\leqslant m$: contradiction.

5.c). Généraliser au cas $d\geqslant2$

On note maintenant $\Psi_n=(X_{i,j}^{(n)})_{1\leqslant i,j\leqslant d}$, les variables $X_{i,j}^{(n)}$ étant nulles pour $i>j$.

Par équivalence des normes, on a toujours $\frac{1}{n}\log\|\Psi_n\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \ell$.

D'après la question **III.1.c)**, on a $\frac{1}{n}\log\rho(\Psi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} m$.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}\log\rho(\Psi_n)\leqslant\frac{1}{n}\log\|\Psi_n\|_\infty$.

Donc, par le lemme 2 ci-dessus, $m \leqslant \ell$.

En reprenant les calculs de la question **I.3.c)** pour $n = d$, on obtient, pour $A_1, ..., A_d \in \mathcal{M}_d(\mathbb{C})$,

$$\|A_1 \cdots A_d\|_\infty \;\leqslant\; d^{d-1} \cdot \max_{1 \leqslant k \leqslant d} \rho(A_k) \cdot \big(\max_{1 \leqslant k \leqslant d} \|A_k\|_\infty\big)^{d-1}.$$

Comme à la question précédente, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on construit d copies indépendantes $\Psi_n^{(1)}, ..., \Psi_n^{(d)}$ de Ψ_n telles que

$$\Psi_{dn} = \Psi_n^{(d)} \cdots \Psi_n^{(1)}.$$

En appliquant l'inégalité ci-dessus et en passant au logarithme, on obtient alors

$$\frac{1}{dn} \log \|\Psi_{dn}\|_\infty \;\leqslant\; \frac{(d-1)\log d}{dn} + \frac{1}{d} \max_{1 \leqslant k \leqslant d} \big(\frac{1}{n} \log \rho(\Psi_n^{(k)})\big) + \frac{d-1}{d} \max_{1 \leqslant k \leqslant d} \big(\frac{1}{n} \log \|\Psi_n^{(k)}\|_\infty\big).$$

Par les lemmes 1 et 2, comme à la question précédente, on en déduit $\ell \leqslant 0 + \dfrac{1}{d} m + \dfrac{d-1}{d} \ell$.

Ainsi $\ell \leqslant m$, et par antisymétrie $\ell = m$, ce qu'il fallait démontrer.