

INTERSECTIONS ATYPIQUES

ENS MP 2021, MATHS C

Question préliminaire

1) Le théorème de Rolle montre que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $|Z(f')| \geq |Z(f)| - 1$. Une simple récurrence permet alors de conclure :

$$\forall i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad |Z(g^{(i)})| \geq n-i.$$

I Intersections atypiques et fractions rationnelles

Fractions rationnelles et rationalité

2.a) La dimension de l'espace de départ est $(p+1) + (q+1) = p+q+2$, donc strictement plus grande que celle de l'espace d'arrivée. Ainsi,

$$\varphi \text{ n'est pas injective.}$$

2.b) Les $x_1, \dots, x_d$ étant choisis distincts dans $K \setminus \mathcal{P}(F)$, on pose

$$y_i = F(x_i) \quad i = 1, \dots, d$$

et on définit l'application φ de la question précédente avec ces valeurs. Par non injectivité, il existe un couple $(U, V) \in K[X]_p \times K[X]_q$, non nul, tel que $\varphi(U, V) = 0$, c'est-à-dire que

$$P(x_i) V(x_i) = Q(x_i) U(x_i) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq d.$$

Les polynômes PV (et donc QU) sont de degré au plus $p+q$ et ont $d = p+q+1$ racines communes : ils sont donc égaux¹, et donc

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{U}{V} \in K[X].$$

2.c) Soit $F \in \mathbf{C}(X)$ telle que $F(K \setminus \mathcal{P}(F)) \cap K$ soit un ensemble infini.

On note $F = P/Q$, on note $p = \deg P$ et $q = \deg Q$, et on pose $d = p+q+1$. On choisit maintenant d points distincts $y_1, \dots, y_d$ dans $F(K \setminus \mathcal{P}(F)) \cap K$; ils admettent des antécédents par F dans $K \setminus \mathcal{P}(F)$, qu'on note $x_1, \dots, x_d$. Ceux-ci sont donc eux à deux distincts et on peut appliquer la question **2.b**, qui montre que

$$F \in K(X).$$

Intersections avec le cercle unité

3.a) Tout d'abord, remarquons que, pour tout $z \in \mathbf{U}$, on a

$$\overline{F(z)} = \overline{F(\bar{z})} = \overline{F\left(\frac{1}{z}\right)} = G(z).$$

Par conséquent, pour tout $z \in \mathbf{U} \setminus \mathcal{P}(F)$, il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) $F(z) \in \mathbf{U}$;
- (b) $F(z) \cdot \overline{F(z)} = 1$;
- (c) $F(z) \cdot G(z) = 1$.

$$\text{Pour tout } z \in \mathbf{U} \setminus \mathcal{P}(F), \text{ on a } F(z) \in \mathbf{U} \text{ si et seulement si } F(z) G(z) = 1.$$

3.b) Procédons par double implication.

¹Leur différence est de degré au plus $p+q$ et admet $p+q+1$ racines au moins.

- Supposons $F(z) \cdot G(z) = 1$. L'ensemble $\mathbf{U} \setminus \mathcal{P}(F)$ étant infini, et tous ses éléments vérifient $F(z)G(z) = 1$, et donc $F(z) \in \mathbf{U}$ par la question 3.a. Ainsi, F est spéciale.
- Supposons F spéciale, c'est-à-dire que l'ensemble

$$\mathcal{K} := \{z \in \mathbf{U} \setminus \mathcal{P}(F) ; F(z) \in \mathbf{U}\}$$

est infini. Écrivons la fraction rationnelle G sous la forme $G = R/S$. Alors

$$\forall z \in \mathcal{K} \quad F(z) \cdot G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot \frac{R(z)}{S(z)} = 1,$$

ou encore

$$\forall z \in \mathcal{K} \quad P(z)S(z) = Q(z)R(z).$$

Les polynômes PQ et QR coïncidant sur un ensemble infini, ils sont égaux, et donc $FG = 1$.

$$\boxed{F \text{ est spéciale si et seulement si } G(X) \cdot F(X) = 1.}$$

4) Soit $\alpha \in \mathbf{C}$. Par définition, on a

$$\overline{B_\alpha} \left(\frac{1}{X} \right) = \frac{\frac{1}{X} - \bar{\alpha}}{1 - \alpha/X} = \frac{1 - \bar{\alpha}X}{X - \alpha},$$

ce qui montre que $B_\alpha(X) \cdot \overline{B_\alpha}(1/X) = 1$. D'après la question 3.b,

$$\boxed{B_\alpha(X) \text{ est spéciale.}}$$

Cas particuliers :

$$\boxed{B_0 = 1 \text{ et, pour tout } \alpha \in \mathbf{U}, B_\alpha(X) = -\alpha.}$$

Remarque 1 (Interprétation géométrique) Géométriquement, B_0 envoie tous les points du cercle unité sur le point 1, tandis que B_α effectue une rotation de l'ensemble du cercle.

Si $|\alpha| < 1$, la fonction B_α est holomorphe sur le disque unité, et l'envoie bijectivement sur lui-même, tout en envoyant le point α sur 0. Cette fonction est notamment utilisée en physique (théorie du potentiel à deux dimensions).

5) F étant spéciale, on sait donc d'ores et déjà que

$$G(X) = \frac{\overline{P}(1/X)}{\overline{Q}(1/X)} = \frac{Q(X)}{P(X)}.$$

5.a) Soit $\alpha \in \mathbf{C}^* \setminus \mathcal{P}(F)$ (c'est-à-dire que $Q(\alpha) \neq 0$). Alors il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) $F(\alpha) = 0$;
- (b) $P(\alpha) = 0$;
- (c) $\alpha \in \mathcal{P}(G)$;
- (d) $\overline{Q}(1/\alpha) = 0$;
- (e) $Q(1/\bar{\alpha}) = 0$;
- (f) $1/\bar{\alpha} \in \mathcal{P}(F)$.

$$\boxed{F(\alpha) = 0 \text{ si et seulement si } 1/\bar{\alpha} \in \mathcal{P}(F).}$$

Remarque 2 L'égalité

$$P(X) \cdot \overline{P}(1/X) = Q(X) \cdot \overline{Q}(1/X)$$

et le fait que $Q(\alpha) \neq 0$ montrent que la multiplicité de $1/\bar{\alpha}$ comme racine de $\overline{Q}$ (c'est-à-dire celle de $1/\alpha$ comme racine de $\overline{Q}$) est au moins égale à celle de α comme racine de P .

5.b) Supposons $F \in \mathbf{C}[X]$, de sorte que $\mathcal{P}(F) = \emptyset$. La question précédente que F n'a aucune racine non nulle. Elle s'écrit donc sous la forme $F = \alpha X^d$ où $d = \deg F \geq 0$ (puisque la fonction nulle n'est pas spéciale).

Puisqu'alors $G(X) = \bar{c}/X$, la condition $FG = 1$ donne $|c|^2 = 1$, donc $c \in \mathbf{U}$.

$$\boxed{\text{Si } F \text{ est un polynôme, alors } F = cX^d \text{ avec } c \in \mathbf{U} \text{ et } d \in \mathbf{N}.}$$

5.c) Tout d'abord, quitte à factoriser F par une puissance de X , on peut supposer que P n'admet pas 0 pour racine. En effet, si F est spéciale, il est immédiat que F/X^k est encore spéciale.

Procédons par récurrence sur le nombre n de racines de P .

- **Si P n'admet aucune racine**, alors on peut écrire $F = 1/Q$ avec $Q \in \mathbf{C}[X]$; de plus la fonction $Q = 1/F$ est également spéciale, et la question 5.b montre que Q est de la forme $Q = cX^d$, avec $c \in \mathbf{U}$, donc $F = \bar{c}X^{-d} = X^{-d}B_{-c}$, ce qui est de la forme voulue.
- **Supposons la propriété vérifiée jusqu'au rang n**. Si P admet n racines, on en choisit une qu'on note α (et on rappelle que $\alpha \neq 0$). Alors $1/\bar{\alpha}$ est racine de Q, et on écrit

$$P(X) = (X - \alpha) P^*(X) \quad Q(X) = (X - \bar{\alpha}^{-1}) Q^*(X)$$

de sorte que

$$F = \frac{P}{Q} = \frac{(X - \alpha) P^*(X)}{(X - \bar{\alpha}^{-1}) Q^*(X)} = -\bar{\alpha} B_{\alpha}(X) \frac{P^*(X)}{Q^*(X)}.$$

Les fonctions B_{α} et F étant spéciales, il en est donc de même de $-\bar{\alpha} P^*/Q^*$; on applique alors la proposition admise au rang n , pour obtenir

$$F = B_{\alpha}(X) \cdot X^d \prod_{i=1}^n B_{a_i}(X)$$

qui est encore de la forme voulue.

Il existe des entiers d, n avec $n \geq 0$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{C}$ tels que

$$F(X) = X^d \prod_{i=1}^n B_{a_i}(X).$$

Racines de l'unité

- 6)** Le nombre $F(\zeta_{n_j})$ étant de module 1, il existe un unique $\theta \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ tel que $F(\zeta_{n_j}) = e^{2i\pi\theta}$. De plus, $F(\zeta_{n_j})$ étant élément de Λ , il existe un entier p tel que $F(\zeta_{n_j})^p = 1$, c'est-à-dire $e^{2i\pi p\theta} = 1$. Il existe donc un entier $k \in \mathbf{Z}$ tel que $2\pi p\theta = 2k\pi$, donc $\theta = k/p$ est rationnel.

Il existe un unique rationnel $q_j \in]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ tel que $F(\zeta_{n_j}) = e^{2i\pi q_j}$.

- 7)** La suite $(q_j)_j$ étant bornée, on sait qu'elle converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. Soit q une valeur d'adhérence : il existe une extractrice φ telle que $q_{\varphi(j)} \rightarrow q$. De plus, $-\frac{1}{2} \leq q_j \leq \frac{1}{2}$. Alors

$$F(\zeta_{n_{\varphi(j)}}) = e^{2i\pi q_{\varphi(j)}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} e^{2i\pi q}$$

et, par continuité de F , on a également $F(\zeta_{n_{\varphi(j)}}) \rightarrow 1$. Ainsi, $e^{2i\pi q} = 1$ et, par localisation de q , on en déduit $q = 0$. La seule valeur d'adhérence de $(q_j)_j$ étant 0 :

$$\lim_{j \rightarrow \infty} q_j = 0.$$

- 8.a)** Décomposons P sur la base $((X - 1)^n)_{n \geq 0}$:

$$P = \sum_{k=1}^d a_k (X - 1)^k$$

avec $a_1 = P'(1)$. Notons m le plus petit indice tel que $a_m \neq 0$. On a notamment

$$P(z) \underset{z \rightarrow 1}{\sim} a_m (z - 1)^m$$

puis, en utilisant $e^z - 1 \sim z$

$$P(\zeta_n) \underset{n \rightarrow 0}{\sim} a_m (e^{2i\pi/n} - 1)^m \sim a_m \left(\frac{2i\pi}{n} \right)^m,$$

ce qui montre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n P(\zeta_n) = \begin{cases} 2i\pi a_1 & \text{si } m = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = 2i\pi P'(1).$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n P(\zeta_n) = 2i\pi P'(1).$$

8.b) Écrivons $F - 1 = \frac{P-Q}{Q} = \frac{\Delta}{Q}$, où $\Delta = P - Q$ est un polynôme qui vérifie $\Delta(1) = 0$. En utilisant ce qui précède, on a donc

$$n_j [F(\zeta_{n_j}) - 1] = \frac{n_j \Delta(\zeta_{n_j})}{Q(\zeta_{n_j})} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2i\pi \Delta'(1)}{Q(1)}.$$

$$\boxed{\lim_{j \rightarrow \infty} n_j (F(\zeta_{n_j}) - 1) = 2i\pi \frac{P'(1) - Q'(1)}{Q(1)}}.$$

Or, par définition, on a également

$$n_j [F(\zeta_{n_j}) - 1] = n_j [e^{2i\pi q_j} - 1] \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2i\pi n_j q_j,$$

ce qui montre que

$$\boxed{\text{La suite } (n_j q_j)_{j \geq 1} \text{ converge.}}$$

9) La suite de terme général $cn_j q_j$ étant convergente et à valeurs entières, elle est stationnaire : il existe un entier $k \in \mathbf{Z}$ et un rang N tels que

$$\forall j \geq N \quad cn_j q_j = k.$$

Pour tout $j \geq N$, on a donc

$$F(e^{2i\pi/n_j}) = e^{2i\pi q_j} = (e^{2i\pi/cn_j})^k$$

ou encore, en notant $\alpha_j := e^{2i\pi/cn_j}$, la relation $F(\alpha_j^c) = \alpha_j^k$.

Autrement dit, pour une infinité de valeurs distinctes, on a la relation $z^k Q(z^c) = P(z^c)$.

- Si $k \geq 0$, on en déduit l'égalité *polynomiale*

$$P(X^c) = X^k Q(X^c).$$

Les polynômes P et Q étant choisis premiers entre eux, les polynômes $P(X^c)$ et $Q(X^c)$ le sont également, donc $Q(X^c) = 1$ et donc $Q = 1$. On en déduit $P(X^c) = X^k$, donc P est de la forme $P = X^d$, (avec $d = k/c$ entier).

- Si $k < 0$, on écrit de même

$$X^{|k|} P(X^c) = Q(X^c),$$

ce qui mène à $P = 1$ puis $Q(X^c) = X^{|k|}$, et finalement $Q(X) = X^d$ avec $d = |k|/c$.

Dans les deux cas, on a montré que $F(X) = X^d$ où $d = k/c$ est un entier relatif.

$$\boxed{\text{Il existe } d \in \mathbf{Z} \text{ tel que } F(X) = X^d.}$$

10) On peut choisir $d := p + q + 1$ points distincts $x_1, \dots, x_d$ de $\Lambda \setminus \mathcal{P}(F)$. En les écrivant tous sous la forme $e^{2i\pi a_k/b_k}$ et en posant $p = \text{PPCM}(b_1, \dots, b_d)$, on voit que les x_k sont tous des puissances de ζ_p . Notamment, $F(x_k) \in \mathbf{Q}(\zeta_p)$. La question **2.b** montre alors que

$$\boxed{F \in \mathbf{Q}(\zeta_p)(X).}$$

11)

11.a) Tout d'abord, notons que $\zeta = \zeta_v^u$. Comme u et v sont premiers entre eux, il existe des entiers α, β tels que $\alpha u + \beta v = 1$, ce qui donne

$$\zeta_v = \zeta_v^{\alpha u} \cdot \underbrace{\zeta_v^{\beta v}}_{=1} = \zeta_v^\alpha. \quad (*)$$

On note $\ell = \text{PPCM}(N, v)$ et $d = \text{PGCD}(N, v)$, de sorte que $\ell d = Nv$. Par Bézout, il existe des entiers a' et b tels que

$$d = \frac{vN}{\ell} = a'N + bv$$

ou encore

$$\frac{1}{\ell} = \frac{a'}{v} + \frac{b}{N}.$$

Multiplions par $2i\pi$ et prenons l'exponentielle :

$$\zeta_\ell = \zeta_v^{a'} \cdot \zeta_N^b.$$

Injectons la relation $(*)$:

$$\zeta_\ell = \zeta_v^{\alpha a'} \cdot \zeta_N^b$$

et il ne reste plus qu'à poser $a := \alpha a'$ pour conclure :

$$\boxed{\text{Il existe } a, b \in \mathbf{Z} \text{ tels que } \zeta_\ell = \zeta^{\alpha a'} \cdot \zeta_N^b.}$$

11.b) Puisque ζ est élément de $\mathbf{Q}(\zeta_N)$ par hypothèse, ainsi bien sûr que ζ_N^b , on en déduit que $\zeta_\ell \in \mathbf{Q}(\zeta_N)$, et donc

$$\mathbf{Q}(\zeta_\ell) \subset \mathbf{Q}(\zeta_N).$$

En regardant les dimensions de ces $\mathbf{Q}$ -espaces vectoriels on en déduit

$$\boxed{\varphi(\ell) \leq \varphi(N).}$$

Décomposons les entiers N et ℓ en produits de facteurs premiers ; puisque ℓ est multiple de N , on peut écrire

$$N = \prod_{i=1}^r p_i^{k_i} \quad \text{et} \quad \ell = \prod_{i=1}^r p_i^{n_i} \cdot \prod_{j=1}^s q_j^{m_j}$$

où les (éventuels) q_j sont des entiers premiers distincts des p_i , et où $n_i \geq k_i$. L'inégalité précédente, compte-tenu de la décomposition aimablement rappelée par l'énoncé, s'écrit

$$\prod_{i=1}^r p_i^{n_i-1} (p_i - 1) \cdot \prod_{j=1}^s q_j^{m_j-1} (q_j - 1) \leq \prod_{i=1}^r p_i^{k_i-1} (p_i - 1)$$

ce qui implique deux choses :

- pour tout $i \in \llbracket 1 ; r \rrbracket$, on a l'inégalité $k_i \leq n_i$, et finalement l'égalité $k_i = n_i$;
- si $s \geq 1$, alors pour tout $j \in \llbracket 1 ; s \rrbracket$ on a $q_j^{m_j-1} (q_j - 1) = 1$, c'est-à-dire que $q_j = 2$ et $m_j = 1$.

Ainsi, on a $\ell = N$ ou $\ell = 2N$. Dans les deux cas :

$$\boxed{\ell \text{ divise } 2N.}$$

Pour conclure, ℓ étant multiple de v , $\ell q = (\ell/v)y$ est entier, donc $2Nq$ est entier.

$$\boxed{2Nq \in \mathbf{Z}.}$$

12) $\square$ Fixons momentanément $j \in \mathbf{N}$. On a

$$e^{2i\pi q_j} = F(\zeta_{n_j}) \quad F \in \mathbf{Q}(\zeta_p)(X).$$

Les coefficient de F étant sous la forme de fractions rationnelles (à coefficients dans $\mathbf{Q}$) en ζ_p , qu'on multiplie ensuite par des puissances de ζ_{n_j} , et toute puissance de ζ_p et de ζ_{n_j} étant une puissance de ζ_{pn_j} , la quantité $F(\zeta_{n_j})$ s'écrit donc comme fraction rationnelle (à coefficients dans $\mathbf{Q}$) en ζ_{pn_j} ; ainsi, on a montré que

$$e^{2i\pi q_j} \in \mathbf{Q}(\zeta_{pn_j}).$$

Nous allons maintenant appliquer la question 11 à l'entier $N = pn_j$ et au rationnel $q = q_j$: l'hypothèse

$$\zeta = e^{2i\pi q_j} \in \mathbf{Q}(\zeta_N)$$

est bien vérifiée, on en déduit que $2pn_j q_j$ est entier. $\square$

L'entier $c := 2p$ ne dépendant pas de j ,

$$\boxed{\text{L'entier } c = 2p \text{ est tel que } cn_j q_j \in \mathbf{Z} \text{ pour tout } j \geq 1.}$$

On peut alors appliquer le résultat de la question 9 et conclure que :

$$\boxed{\text{Il existe } d \in \mathbf{Z} \text{ tel que } F(X) = X^d.}$$

13) Soit $F \in \mathbf{C}(X)$ telle que $F(\Lambda \setminus \mathcal{P}(F)) \subset \Lambda$.

- **1^{er} cas : $1 \notin \mathcal{P}(F)$** ; on note $\omega := F(1)$, et $\omega \in \Lambda$ est donc non nul. Posons $\tilde{F} = F/\omega$. Alors $\tilde{F}(1) = 1$ et de plus $\tilde{F}(\Lambda \setminus \mathcal{P}(F)) \subset \Lambda$. L'ensemble $\mathcal{P}(F)$ étant fini, on construit par récurrence immédiate une suite $(n_j)_j$ strictement croissante telle que $\zeta_{n_j} \notin \mathcal{P}(F)$, et donc $F(\zeta_{n_j}) \in \Lambda$. On peut alors appliquer le résultat des questions 6–12 : il existe un entier $d \in \mathbf{Z}$ tel que $\tilde{F} = X^d$, et enfin $F = \omega X^d$.
- **2^e cas : $1 \in \mathcal{P}(F)$** . Puisque $\Lambda \setminus \mathcal{P}(F)$ est infini, on en choisit un élément ω et on pose $\tilde{F}(X) = F(\omega X)$. Alors $1 \notin \mathcal{P}(\tilde{F})$ et $\tilde{F}(\Lambda \setminus \mathcal{P}(\tilde{F})) \subset \Lambda$. On est alors ramené au cas précédent : il existe $\omega' \in \Lambda$ tel que $\tilde{F}(X) = \omega' X^d$, puis $F(X) = \tilde{F}(\omega^{-1}X) = \omega' \omega^{-d} X^d$ et $\omega' \omega^{-d} \in \Lambda$.

Dans tous les cas, il existe $\omega \in \Lambda$ et $d \in \mathbf{Z}$ tels que $F(X) = \omega X^d$.

La réciproque est immédiate :

$$\boxed{\text{Les fractions rationnelles } F \in \mathbf{C}(X) \text{ telles que } F(\Lambda \setminus \mathcal{P}(F)) \subset \Lambda \text{ sont les } F(X) = \omega X^d, \text{ pour } \omega \in \Lambda \text{ et } d \in \mathbf{Z}.}$$

II Intersections atypiques : le cas transcendant

Courbes et fonctions transcendentes

14) La fonction f est somme d'une série entière de rayon infini, donc

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbf{R}.$$

Supposons f plate en 0, alors pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0$$

(et donc f est identiquement nulle).

$$\text{Si } f \text{ est plate en 0, alors } a_n = 0 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

15)

15.a) Prenons $a := \alpha_n$ et notons N le degré de P_n , et β son coefficient dominant ($\beta \neq 0$). Alors $P_n(x) \sim \beta x^n$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^N e^{ax}} = \beta.$$

Notamment,

$$f \text{ n'est pas identiquement nulle.}$$

15.b) Commençons par le cas particulier proposé.

► **Supposons f plate en $x = 0$.** Les fonctions polynômes et exponentielles sont développables en série entière avec un rayon infini ; leurs produits et les sommes d'iceux le sont également : f est donc somme sur $\mathbf{R}$ d'une série entière. La question 14 montre alors que f est identiquement nulle, en **contradiction** avec la question 15.a. ◀

► **Supposons f plate en un point $x_0 \in \mathbf{R}$.** La fonction $\tilde{f} : x \mapsto f(x - x_0)$ est donc plate en 0. Or on peut écrire

$$f(x - x_0) = \sum_{i=1}^n \underbrace{P_x(x - x_0) e^{-\alpha_i x_0}}_{=: Q_i(x)} \cdot e^{\alpha_i x}$$

où les Q_i sont encore des polynômes. Le premier point montre alors que $\tilde{f}$, et donc f , est identiquement nulle, ce qui apporte la **contradiction** voulue. ◀

$$f \text{ n'est plate en aucun } x \in \mathbf{R}.$$

16) Soit $d \geq 1$, des polynômes $Q_0, \dots, Q_d$ non tous nuls (et même tous non nuls quitte à diminuer d) tels que

$$\varphi : x \mapsto \sum_{k=0}^d Q_k(x) P(x)^k e^{k\alpha x}$$

soit plate en un point x_0 de I .

Puisque $\alpha \neq 0$, les réels $k\alpha$ sont deux à deux distincts ; les polynômes $Q_k P^k$ sont tous non nuls. La question 15.b montre que φ n'est plate en aucun point.

$$f \text{ est transcendante.}$$

17) La fonction g se décompose sous la forme

$$g : x \mapsto \sum_{1 \leq i, j \leq d} a_{i,j} x^{i-1} f(x)^{j-1}$$

donc, par transcendance de f ,

$$g \text{ n'est plate en aucun } x \in I.$$

18) Considérons la d -courbe C_r , d'équation

$$\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{i,j} x^{i-1} y^{j-1} = 0.$$

On point (x, y) de $C_r \cap \Gamma(f)$ vérifie donc l'équation précédente ainsi que la relation $y = f(x)$, c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{i,j} x^{i-1} f(x)^{j-1} = 0.$$

Cette équation a, par hypothèse, au moins r^2 solutions. Si l'on pose

$$g : x \mapsto \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d a_{i,j} x^{i-1} f(x)^{j-1},$$

alors $g \in V$ et g s'annule au moins r^2 fois sur I .

Enfin, comme les $a_{i,j}$ sont non tous nuls, la fonction g n'est pas plate par transcendance de f , et en particulier, elle n'est pas identiquement nulle.

On a trouvé $g \in V$, $g \neq 0$ telle que $|Z(g)| \geq r^2$.

Soit g une telle fonction. Découpons I en r segments de longueur égale, tous semi-ouverts à droite, sauf le dernier qui est fermé, de sorte que I est égale à l'union disjointe

$$I = \bigsqcup_{i=1}^r J_i \quad \ell(J_i) = \frac{\ell(I)}{r}.$$

Il y a r^2 zéros de g dans r . Si chacun des r intervalles J_i en contenait au plus $r-1$, le nombre total serait $\leq r(r-1) < r^2$, ce qui est faux. Ainsi, l'un des J_i contient au moins r zéros de g .

Il existe un segment $K \subset I$, de longueur $\ell(K) \leq \ell(I)/r$, tel que $|Z(g) \cap K| \geq r$.

Remarque 3 On a évidemment utilisé, en le redémontrant, le *principe des tiroirs* de Dirichlet (ou des chaussettes, ou des pigeonniers, etc).

19) Pour tout $r \geq 1$, notons g_r la fonction de la question 18 et K_r le segment associé; on décompose g_r dans la base $(g_1, g_2, \dots, g_n)$ sous la forme

$$g_r = b_1 g_1 + \dots + b_n g_n.$$

En notant $B = |b_1| + \dots + |b_n|$, réel strictement positif, la fonction

$$B^{-1} g_r = G_{\underline{a}} \quad \underline{a} = \left(\frac{b_1}{B}, \dots, \frac{b_n}{B} \right)$$

a les mêmes zéros que g_r .

Il existe une suite $(\underline{a}_r)_{r \geq 1}$ d'éléments de S_n , ainsi qu'une suite $(K_r)_{r \geq 1}$ de segments inclus dans I dont les longueurs tendent vers 0 quand $r \rightarrow +\infty$, et tels que $|Z(G_{\underline{a}_r}) \cap K_r| \geq r$ pour tout $r \geq 1$.

20) On vérifie rapidement que

- **S_n est fermé** — L'application $\Sigma : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\Sigma(a_1, \dots, a_n) = |a_1| + \dots + |a_n|$ est continue, et donc $S_n = \Sigma^{-1}(\{1\})$ est fermé.
- **S_n est borné** — C'est même la sphère unité pour la norme $\|\cdot\|_1$.

L'espace $\mathbf{R}^n$ étant de dimension finie,

S_n est compact.

Notons $x_r = \min K_r$ pour tout $r \geq 1$. L'espace $S_n \times I$ étant compact, la suite $(\underline{a}_r, x_r)$ admet une sous-suite convergente, c'est-à-dire que

Il existe $\underline{a} \in S_n$, $x \in I$ et une suite strictement croissante d'entiers $(r_s)_{s \geq 1}$ tels que $\lim_{s \rightarrow +\infty} \underline{a}_{r_s} = \underline{a}$ et $\lim_{s \rightarrow +\infty} \min K_{r_s} = x$.

21) $G_{\underline{a}}$ est une fonction non nulle car $\underline{a} \neq 0$. Montrons qu'elle est plate en x .

□ **Fixons un entier $k \geq 0$.** Pour tout $r > k$,

- la fonction $G_{\underline{a}_r}$ s'annule r fois au moins sur $K_r = [x_r; y_r]$;
- d'après la question 1, la fonctions $G_{\underline{a}_r}^{(k)}$ s'annule donc une fois au moins en un point $\delta_r \in K_r$.

Les suites $(x_r)_{r \geq 1}$ et $(y_r)_{r \geq 1}$ admettant pour limite x , il en est de même par encadrement pour la suite $(\delta_r)_{r \geq 1}$.

Or la suite $(G_{\underline{a}_r}^{(k)})_{r \geq 1}$ converge *uniformément* vers $G_{\underline{a}}$, par simple convergence des suites de coordonnées. Pour tout $r \geq 1$, écrivons

$$|G_{\underline{a}}^{(k)}(x) - \underbrace{G_{\underline{a}_r}^{(k)}(x_r)}_{=0}| \leq |G_{\underline{a}}^{(k)}(x) - G_{\underline{a}}^{(k)}(x_r)| + |G_{\underline{a}}^{(k)}(x_r) - G_{\underline{a}_r}^{(k)}(x_r)|$$

Le premier terme tend vers 0 par continuité de la fonction $G_{\underline{a}}^{(k)}$. Le second terme tend vers 0 grâce à la convergence uniforme. On en déduit que $G_{\underline{a}}^{(k)}(x) = 0$. $\square$

$G_{\underline{a}}$ est plate en x .

La supposition faite après l'énoncé du théorème 2 aboutit donc à une contradiction puisque, f étant transcendante, la fonction $G_{\underline{a}}$ ne saurait être plate en aucun point.

Ainsi, il existe une constante c_1 majorant le cardinal de $\Gamma(f) \cap C$ pour toute d -courbe C .

Le théorème 2 est démontré.

Une inégalité

22)

22.a) Notons $g : x \mapsto \beta f(x) - \prod_{i=1}^{n-1} (x - x_i) f(x_n)$. La fonction g s'annule alors en $x_1, \dots, x_n$ donc il existe un élément $y \in I$ tel que $g^{(n)}(y) = 0$, ou encore

$$f(x_n) = \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!} \beta.$$

22.b) Notons L le polynôme de Lagrange interpolant f aux points $x_1, \dots, x_{n-1}$: c'est un polynôme de degré au plus $n-2$, qui s'écrit

$$L(x) = \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{x_n - x_j}{x_i - x_j}.$$

Notamment, la fonction $\hat{f} = f - L$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ et s'annule aux points $x_1, \dots, x_{n-1}$, la question précédente permet de trouver un réel $y \in I$ tel que

$$\hat{f}(x_n) = \frac{\hat{f}^{(n-1)}(y)}{(n-1)!} \beta = \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!} \beta$$

puisque $L^{(n-1)} = 0$.

Il existe $y \in I$ tel que $f(x_n) - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n-1} \frac{x_n - x_j}{x_i - x_j} = \frac{f^{(n-1)}(y)}{(n-1)!} \beta.$

23) On applique la question précédente aux fonctions $f_1, f_2, \dots, f_n$, ce qui nous fournit les réels $(y_1, y_2, \dots, y_n)$. Par opérations élémentaires sur les colonnes, les formules précédentes mènent à

$$\det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_{n-1}) & f_1^{(n-1)}(y_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_{n-1}) & f_n^{(n-1)}(y_n) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_{n-1}) & \frac{\beta}{(n-1)!} f_1(x_n) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_{n-1}) & \frac{\beta}{(n-1)!} f_n(x_n) \end{pmatrix}$$

d'où l'on conclut

$$\det A(x_1, \dots, x_n) = \frac{\beta}{(n-1)!} \cdot \det \begin{pmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_{n-1}) & f_1^{(n-1)}(y_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_{n-1}) & f_n^{(n-1)}(y_n) \end{pmatrix}.$$

24) On conclut maintenant par récurrence.

- **Au rang $n = 2$** , la propriété est immédiate : pour tous $x_1, x_2 \in I$, il existe y_1, y_2 tels que

$$\det A(x_1, x_2) = \frac{|x_2 - x_1|}{(2-1)!} \cdot \begin{vmatrix} f_1(x_1) & f'_1(y_1) \\ f_2(x_1) & f'_2(y_2) \end{vmatrix}$$

donc

$$|\det A(x_1, x_2)| \leq (\|f_1\|_\infty \|f'_2\|_\infty + \|f'_1\|_\infty \|f_2\|_\infty) \cdot |x_2 - x_1|.$$

- **Soit $n \geq 3$ et supposons la propriété vraie au rang $n-1$** . On note avec un chapeau les indices « absents² »
Il existe donc des constantes $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ telles que pour tous $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ et tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$|\det A_{f_1, \dots, \hat{f}_k, \dots, f_n}(x_1, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)| \leq \gamma_i \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq n \\ i, j \neq k}} |x_j - x_i|.$$

Développons maintenant $A(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ selon la dernière colonne dans la forme de la question 23. On obtient par inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |\det A(x_1, \dots, x_n)| &\leq \frac{\beta}{(n-1)!} \sum_{i=1}^n |f_i^{(n-1)}(y_i)| |A_{f_1, \dots, \hat{f}_i, \dots, f_n}(x_1, \dots, x_{n-1})| \\ &\leq \frac{\beta}{(n-1)!} \sum_{i=1}^n \|f_i^{(n-1)}\|_\infty \cdot \gamma_i \prod_{1 \leq k < \ell \leq n-1} |x_k - x_\ell| \\ &\leq c \prod_{1 \leq k < \ell \leq n} |x_k - x_\ell| \end{aligned}$$

en notant par exemple

$$c = \frac{\beta}{(n-1)!} \cdot \max_{i=1, \dots, n} \gamma_i \|f_i^{(n-1)}\|_\infty.$$

Le théorème 3 est démontré par récurrence.

Intersections atypiques : le cas transcendant

25) Notons $P_k = (x_k, y_k)$ pour $k = 1, \dots, n$. Il suffit alors de constater qu'il y a équivalence entre les énoncés :

- (a) il existe une d -courbe contenant $P_1, \dots, P_n$;
- (b) il existe $(a_{ij})_{i,j} \neq 0$ tel que, pour $k = 1, \dots, n$, $\sum_{i,j} a_{i,j} x_k^i y_k^j = 0$;
- (c) il existe $(a_{ij})_{i,j} \neq 0$ tel que, en notant

$$A = {}^t(a_{1,1}, \dots, a_{1,d}, a_{2,1}, \dots, a_{2,d}, \dots, a_{d,1}, \dots, a_{d,d})$$

on ait ${}^tB(P_1, \dots, P_n) \cdot A = 0$;

- (d) $\text{Ker } {}^tB(P_1, \dots, P_n) \neq \{0\}$;
- (e) $\text{rg } {}^tB(P_1, \dots, P_n) < d^2$; (car $\text{rg } {}^tB + \dim \text{Ker } {}^tB = d^2$)
- (f) $\text{rg } B(P_1, \dots, P_n) < d^2$.

Il existe une d -courbe contenant $P_1, \dots, P_n$ si et seulement si $\text{rang}(B(P_1, \dots, P_n)) < d^2$.

²Par exemple, $x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n$ représente $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$.

26) Chaque point P_i étant de la forme $(x_i, f(x_i))$, on a

$$B(P_1, \dots, P_n) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ x_1 & \dots & \dots & x_{d^2} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ x_1^{d-1} & \dots & \dots & x_{d^2}^{d-1} \\ f(x_1) & \dots & \dots & f(x_{d^2}) \\ x_1 f(x_1) & \dots & \dots & x_{d^2} f(x_{d^2}) \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ x_1^{d-1} f(x_1) & \dots & \dots & x_{d^2}^{d-1} f(x_{d^2}) \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ x_1 f(x_1)^{d-1} & \dots & \dots & x_{d^2} f(x_{d^2})^{d-1} \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ x_1^{d-1} f(x_1)^{d-1} & \dots & \dots & x_{d^2}^{d-1} f(x_{d^2})^{d-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{d^2}(\mathbf{R}).$$

On applique alors le théorème 3 aux fonctions

$$\varphi_{i+dj+1} : x \mapsto x^i f(x)^j$$

ce qui mène à l'existence d'un réel c_2 tel que, quel que soit le choix des points $x_1, \dots, x_{d^2}$,

$$|\det B(P_1, \dots, P_{d^2})| \leq c_2 \prod_{1 \leq i < j \leq d^2} |x_j - x_i|.$$

Dans ce produit, on a $d^2(d^2-1)/2$ facteurs, tous majorés par $\max_{1 \leq i < j \leq d^2} |x_i - x_j|$. En notant $c = c_2^{2/d^2(d^2-1)}$, constante toujours indépendante des points $P_1, \dots, P_{d^2}$, on a bien obtenu

$$|\det B(P_1, \dots, P_{d^2})| \leq \left(c \cdot \max_{1 \leq i < j \leq d^2} |x_i - x_j| \right)^{\frac{d^2(d^2-1)}{2}}.$$

27)

27.a) Si l'on multiplie la ligne $i + jd + 1$ par n^{i+j} , on obtient une matrice à coefficients tous entiers, donc de déterminant entier ; son déterminant est celui de $B(P_1, \dots, P_{d^2})$, multiplié par n^α , où

$$\alpha = \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} (i+j) = \sum_{i=0}^{d-1} \left(di + \frac{d(d-1)}{2} \right) = d^2(d-1).$$

$$n^{d^2(d-1)} \cdot \det B(P_1, \dots, P_{d^2}) \text{ est un entier.}$$

27.b) On suppose que $P_1, \dots, P_{d^2}$ ne sont pas sur une même d -courbe. La question 25 montre que $\text{rg } B(P_1, \dots, P_{d^2}) \geq d^2$, donc la matrice B est inversible et son déterminant est non nul. Étant entier, le nombre $n^{d^2(d-1)} \cdot \det B(P_1, \dots, P_{d^2})$ vérifie donc

$$n^{d^2(d-1)} \cdot |\det B(P_1, \dots, P_{d^2})| \geq 1,$$

et de la question 26 on tire

$$\left(c \cdot \max_{1 \leq i < j \leq d^2} |x_i - x_j| \right)^{\frac{d^2(d^2-1)}{2}} \geq 1$$

ou encore

$$\max_{1 \leq i < j \leq d^2} |x_i - x_j| \geq c^{-1} n^{-\frac{2}{d+1}}.$$

28) On note m le nombre de points de $\Gamma(f) \cap \frac{1}{n} \mathbf{Z}^2$ dont l'abscisse est dans J .

- La question 25 montre directement que si $m < d^2$ alors la matrice $B(P_1, \dots, P_n)$, qui est de rang $r \leq n$, est donc de rang $r < d^2$, et que donc il existe une d -courbe contenant tous ces points.

- Supposons alors que $m \geq d^2$. Quels que soient les d^2 points choisis parmi ces m , ils appartiennent à une d -courbe (sinon la question 27.b aboutit à une contradiction : deux d'entre eux seront trop éloignés!), et donc la matrice B correspondante est de rang strictement inférieur à d^2 .
Toutes les matrice *extraites* d'ordre d^2 de $B(P_1, \dots, P_m)$ étant non inversibles, cela prouve que la matrice elle-même est de rang strictement inférieur à d^2 :

$$\text{rg } B(P_1, \dots, P_m) = r < d^2$$

et donc les m points sont donc bien sur une même d -courbe.

Il existe une d -courbe contenant tous les points de $\Gamma(f) \cap \frac{1}{n}\mathbf{Z}^2$, dont l'abscisse appartient à J .

29) Découpons l'intervalle I en segments jointifs de taille constante $< c^{-1} n^{-\frac{2}{d+1}}$;

$$I = \bigcup_{k=1}^N J_k.$$

Le nombre de segments est

$$N = \left\lceil \frac{\ell(I)}{\ell(J_1)} \right\rceil \leq \ell(I) c n^{\frac{2}{d+1}} + 1.$$

Sur chacun des segments J_k , on va maintenant majorer le nombre point du graphe f qui sont sur le réseau grâce à la question 28 :

$$\begin{aligned} |\Gamma(f|_{J_k}) \cap \frac{1}{n}\mathbf{Z}^2| &\leq |\Gamma(f|_{J_k}) \cap C| && \text{question 28} \\ &\leq |\Gamma(f) \cap C| \\ &\leq c_1 && \text{théorème 2} \end{aligned}$$

où C est une d -courbe qui dépend de k , mais c_1 une constante ne dépendant que de I et de f .

Ainsi, on peut majorer

$$|\Gamma(f) \cap \frac{1}{n}\mathbf{Z}^2| \leq c_1 N \leq c_1 n^\varepsilon \left[\underbrace{c\ell(I)}_{\leq 1} n^{\frac{2}{d+1}-\varepsilon} + \underbrace{\frac{1}{n^\varepsilon}}_{\leq 1} \right] \leq c_3 n^\varepsilon$$

où l'on a noté

$$c_3 = c_1(c\ell(I) + 1).$$

Le théorème 4 est démontré.

~ Corrigé réalisé pour l'UPS par Walter Appel, relu par Marc Rezzouk. ~

Si vous repérez des erreurs ou des coquilles, prière de le signaler à l'adresse : walter.appel@laposte.net